
3 2044 106 336 787





ARCHIVES NÉERLANDAISES

DES

SCIENCES
EXACTES ET NATURELLES

PUBLIÉES PAR

LA SOCIÉTÉ HOLLANDAISE DES SCIENCES à HARLEM,

ET RÉDIGÉES PAR

le Sécretaire de la Société,

AVEC LA COLLOBORATION DE

MM. D. Bierens de Haan, C. A. J. A. Oudemans, W. Koster,
C. H. D. Buys Ballot, C. K. Hoffmann et J. M. van Bemmelen.

TOME XX.

HAARLEM,
LES HÉRITIERS LOOSJES.
1886.

TABLE DES MATIÈRES.

Programme de la Société Hollandaise des Sciences pour l'année 1885 I—V.

R. D. M. VERBEEK. Sur la détermination du temps de la plus forte explosion du Krakatau, le 27 août 1883 .... Pag. 1.

H. TEN KATE, Description d'un crâne d'Indien moqui .... 〃 14.

G. J. MICHAËLIS, Sur la théorie de la rotation des molécules dans un corps solide .... 〃 20.

HUGO DE VRIES, Une expérience de cours sur la diffusion ...... 〃 36.

P. H. SCHOUTE, Sur la construction de courbes unicursales par points et tangentes .... 〃 49.

C. VAN WISSELINGH, La gaîne du cylindre central dans la racine des phanérogames .... 〃 95.

J. W. GILTAY, L'emploi de la pile auxiliaire dans la téléphonie 〃 117.

H. A. LORENTZ, Sur l'application aux phénomenes thermo-électriques de la seconde loi de la théorie mécanique de la chaleur 〃 129.

R. SISSINGH, Mesures de la polarisation elliptique de la lumière 〃 171.

J. H. VAN 'T HOFF, L'équilibre chimique dans les systèmes gazeux ou dissous à l'état dilué .... 〃 239.

S. DE JAGER, Les oscillations de la pression sanguine artérielle lors de la respiration par soufflet et de la respiration dans l'air condensé ou raréfié .... 〃 303.

C. H. D. BUYS BALLOT, Étude d'une variation périodique de la température en 27,675 jours, d'après les observations de 155 années = 2046 périodes successives .... 〃 348.

W. EINTHOVEN, Stéréoscopie dépendant d'une différence de couleur .... Pag. 361.

CH. M. SCHOLS, Une projection équivalente avec déviation minimum pour un terrain circulaire d'étendue restreinte... 〃 388.

C. A. J. OUDEMANS et C. A. PEKELHARING, Saccharomyces capillitii Oudemans et Pekelharing, Blastomycète du cuir chevelu .... 〃 404.

C. A. J. A. OUDEMANS, Sporendonema terrestre Oud., exemple de formation endogène des spores chez les hyphomycètes.. 〃 419.

C. VAN WISSELINGH, Sur l'endoderme .... 〃 427.

B. J. GOOSSENS, Sur le point de fusion de la glace sous des pressions inférieures à celle de l'atmosphère................ 〃 449.

TOME XX. 1me Livraison.

ARCHIVES NÉERLANDAISES

DES

SCIENCES EXACTES ET NATURELLES

PUBLIÉES PAR

LA SOCIÉTÉ HOLLANDAISE DES SCIENCES À HARLEM,

ET RÉDIGÉES PAR

le Secrétaire de la Société,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. D. Bierens de Haan, C. A. J. A. Oudemans, W. Koster,
C. H. D. Buijs Ballot et C. K. Hoffmann.

HARLEM
LES HÉRITIERS LOOSJES.
1885.

PARIS
GAUTHIER-VILLARS.

LEIPSIG
G. E. SCHULZE.



ARCHIVES NÉERLANDAISES
DES
Sciences exactes et naturelles.

SUR LA DÉTERMINATION
DU
TEMPS DE LA PLUS FORTE EXPLOSION DU KRAKATAU, LE 27 AOUT 1883;

PAR

R. D. M. VERBEEK.

Parmi les nombreux phénomènes volcaniques de la remarquable année 1883, deux éruptions attirent particulièrement l'attention.

L'une d'elles, j'ai à peine besoin de le dire, est l'épouvantable catastrophe de Krakatau, qui ,entre toutes les éruptions dont l'humanité a été ou sera le témoin, continuera certainement à occuper un des premiers rangs.

L'autre est l'éruption du mont Augustin, île du Cook's Sond, dans l'Alaska (Amérique du N.-O). Ce volcan, qui avait déjà montré un commencement d'activité au mois d'août de l'année précédente, eut, le 26 octobre 1883, à 8 heures du matin, une éruption violente, dans laquelle la montagne se fendit de haut en bas en deux parties. Le fragment septentrional, à ce que l'on rapporte, s'est affaissé sous la mer; le dessin donné [1]), toutefois, ferait plutôt supposer que la moitié septentrionale ne s'est pas abîmée tout entière, mais que sa partie supérieure seule est tombée dans les eaux. Quoi qu'il en soit, il n'y a pas à douter que la grande vague qui arriva à Port Graham, à l'extrémité sud-est de la baie, 25 minutes après

[1]) *Science*, t. III, 1884, p. 188.

qu'on y eut entendu la forte explosion, n'ait été occasionnée par l'immersion subite d'une grande masse de roches, et *non* par des tremblements de terre. A cet égard, nous trouvons un remarquable accord avec ce qui s'est passé à Krakatau; ici également, aucun tremblement de terre tant soit peu important n'a eu lieu durant l'éruption; le pic s'est fendu de haut en bas en deux parties, et la grande vague a été le résultat de l'effondrement, ainsi que je l'ai déjà mentionné dans mon „Rapport sommaire sur l'éruption de Krakatau".

Une analogie d'un autre genre existe entre Krakatau et Santorin, dans l'Archipel grec.

On sait que le groupe de Santorin est composé de roches d'âge très différent; les îles Thera, Therasia et Aspronisi appartiennent à une ancienne paroi de cratère, qui enclot la baie de Santorin. Cette baie a été formée, dans les temps préhistoriques, par l'effondrement du volcan. Dans l'enceinte constituée par les produits anciens eurent lieu à diverses époques des érupiions, à la suite desquelles apparurent trois îles, les Kaimeni, de même que le Vésuve s'est élevé au milieu de l'enceinte du Monte-Somma.

A Krakatau on distingue également des matières éruptives d'âge différent. Verlaten-eiland et Lang-eiland sont des parties d'une ancienne enceinte de cratère, les restes, s'élevant au-dessus des eaux, d'un très grand volcan effondré. Le Pic, la portion sud de l'île de Krakatau avant la dernière catastrophe, appartient aussi aux roches anciennes du groupe; mais la montagne étant formée essentiellement de basalte, tandis que Lang-eiland est constituée par de l'andésite pyroxénique riche en verre, ce volcan a dû naissance à une éruption particulière.

Dans le cirque formé par Verlaten-eiland, Lang-eiland et le Pic, se produisirent plus tard d'importantes éruptions, lors desquelles furent amenées au jour les andésites pyroxéniques de la partie septentrionale de Krakatau. Celles-ci finirent par se souder au Pic en une terre unique, l'île de Krakatau telle

que nous la connaissions avant 1883, qui s'étendait jusque tout près de Verlaten-eiland et de Lang-eiland.

Quant à l'époque où se forma cette partie nord de Krakatau, nous ne possédons aucune information; on sait seulement qu'en 1680 eut lieu une éruption, sans grande importance probablement, à l'extrémité septentrionale de l'île. Ensuite est venue l'éruption de mai—août 1883, qui a fini par l'effondrement de la partie centrale du volcan; les roches anciennes ont presque toutes été épargnées dans cette catastrophe; seule la moitié nord du Pic s'est abimée avec les roches plus récentes.

Il n'est pas impossible que plus tard de nouvelles îles surgiront entre les trois qui existent aujourd'hui: Krakatau occupant une position particulièrement favorable sous le rapport des éruptions, on peut bien admettre que l'activité sousmarine recommencera d'ici à quelque temps.

Il y a trois ans, j'ai déjà signalé [1]) la circonstance que Krakatau est située sur une fente, qui traverse le détroit de la Sonde, en allant du Radja Bassa, sur la côte de Sumatra, au Goenoeng Pajoeng, sur la côte de Java.

Mais ce volcan se trouve aussi près de l'intersection des lignes plus ou moins courbes sur lesquelles sont distribués les volcans de Sumatra et de Java.

Comme direction principale pour Sumatra, on peut prendre la ligne qui joint Atjeh-hoofd au mont Tangka (ou Kalambajan); cette ligne est dirigée de $138\frac{1}{2}°$ à $318\frac{1}{2}°$, c'est-à-dire, à peu près du N.O. au S.E.

Pour Java, on peut regarder comme direction principale des volcans, et en outre comme axe longitudinal de l'île, la ligne qui unit le volcan le plus occidental de Java, le Karang, aux cimes volcaniques situées le plus à l'est, savoir, le Wilis, le Keloet, le Kawi et le Semeroe; la direction de cette ligne est de 105°.

---

[1]) *Verhandelingen van de Kon. Akad. van Wetensch.* t. XXI, 1881. Verbeek en Fennema, *Nieuwe geologische ontdekkingen op Java*, p. 13. Voir aussi: *Arch. néerl.*, t. XVI, p. 64.

Ces deux lignes se coupent sous un angle d'un peu plus de 33° et leur point d'intersection coïncide avec le volcan Krakatau.

Or, la fente transversale du détroit de la Sonde passant également par Krakatau, les *trois* lignes se coupent près de ce volcan; Krakatau se trouve donc sur un point faible de l'écorce terrestre (Voir la petite carte, Pl. I).

Les lignes en question forment l'intersection, avec la surface terrestre, de trois plans, suivant lesquels ont très probablement eu lieu des glissements du sol. Les cotes de profondeur inscrites sur la carte marine de 1874, dressée par M. Blommendal, montrent qu'au S. E. de Krakatau, donc à l'E. de la fente du détroit de la Sonde, la profondeur de la mer n'est que de 100 à 108 mètres, tandis qu'au S. O. de Krakatau, c'est-à-dire à l'O. de notre fente transversale, elle atteint de 122 à 144 mètres. La partie sud-ouest du détroit de la Sonde est donc notablement plus profonde que les autres parties. On peut en conclure que cette pièce s'est plus affaissée, ou a été moins soulevée que les pièces adjacentes; nos fentes ont donc été produites par glissement.

Si l'on prend en considération cette situation éminemment favorable aux actions volcaniques, il n'y a pas lieu de s'étonner que le Krakatau ait eu, l'an dernier, une si formidable éruption, mais plutôt que le volcan soit resté en repos pendant plus de 200 ans.

Au point de vue des grands mouvements que l'éruption du Krakatau a imprimés, le 27 août, à l'air et à la mer, il convient de déterminer aussi exactement que possible l'heure à laquelle les ondes prirent naissance, parce que de cette heure dépend la vitesse du mouvement.

A défaut d'indications de baromètres enregistreurs, j'ai déterminé le temps des explosions les plus fortes, durant l'éruption du Krakatau, à l'aide des données fournies par l'indicateur de l'usine à gaz de Batavia.

La courbe de pression de cet indicateur, tracée par un crayon à la surface d'une feuille de papier tendue sur un cylindre tournant, affecte ordinairement, en rapport avec la pression donnée au gaz dans l'usine, une allure plus ou moins régulière; mais, du dimanche 26 août à 5 heures du soir jusqu'au lundi 27 août à 11 heures du matin, elle présente une quinzaine de dentelures aiguës, imputables à des ondes aériennes qui exercèrent une pression sur le régulateur de l'usine, d'où résulta une augmentation de pression non seulement dans le régulateur lui-même, mais aussi dans l'indicateur communiquant avec lui.

Les plus fortes oscillations eurent lieu le 27 au matin, à $5^{h.}43^{m.}$, $6^{h.}57^{m.}$, $10^{h.}15^{m.}$ et $11^{h.}5^{m.}$, temps de *Batavia*, et parmi elles la troisième perturbation, celle de $10^{h.}15^{m.}$, est de beaucoup la plus importante de toutes.

Bien que, sur le graphique de la pression, cette perturbation apparaisse comme un accident très tranché et subit, le mouvement ne se produisit nullement sous la forme de choc ou de secousse, mais s'opéra d'une manière très graduelle. On peut reconnaître dans la figure que la période de la plus forte perturbation a été d'environ $\frac{1}{4}$ d'heure; le crayon s'éleva pendant 7 ou 8 minutes, puis s'abaissa pendant un temps à peu près égal. La pression, d'environ 15 millimètres d'eau à 10 heures, monta jusqu'à 80 millimètres, donnant une différence de 65 millimètres d'eau, équivalente à $\frac{65}{13} = 5$ millimètres de mercure.

A bord du steamer néerlandais *Prinses Wilhelmina*, commandant Visman, mouillé dans le port extérieur de Tandjoeng Priok, on nota que ce jour-là, entre 9 et 12 h. du matin, un baromètre à mercure et deux baromètres anéroïdes montèrent et descendirent à courts intervalles, entre les limites de 750 et 762 millimètres. Si l'on suppose que l'ascension et la dépression, par rapport au niveau primitif, aient été égales, ce qui probablement n'a pas été tout à fait le cas, l'augmentation de la pression atmosphérique aurait été de 6 millimètres.

Ce chiffre est très rapproché de celui que nous avons trouvé plus haut, d'après le tracé de l'indicateur. L'onde aérienne a agi ici de même que l'eussent fait des poids, placés sur le couvercle du régulateur pour augmenter la pression, avec cette différence, toutefois, que dans ce dernier cas l'augmentation se produit subitement, tandis que sous l'influence de l'onde elle a eu lieu plus graduellement. Je crois donc pouvoir admettre que le mouvement ascensionnel de l'indicateur donne aussi une mesure de l'augmentation de la pression de l'air, et que par conséquent cette augmentation, à Batavia, n'a pas été moindre que 5 à 6 millimètres, c'est-à-dire que $\frac{1}{150}$ à $\frac{1}{125}$ de la pression atmosphérique totale.

Suivant le commandant Logan, du navire le *Berbice*, les écarts se seraient même élevés, dans le détroit de la Sonde, à 2 pouces anglais, c'est-à-dire à 50 millimètres.

Les pressions mentionnées plus haut sont toutefois déjà suffisantes pour expliquer la sensation de surdité et les bourdonnements d'oreille éprouvés par quelques personnes durant l'éruption.

En admettant que les ondes aériennes eussent la même vitesse que le son, savoir, de 347 mètres par seconde à 25° Cels., la distance de 150 kilomètres, qui sépare Krakatau de Batavia, aurait été parcourue en $7\frac{1}{5}$ minutes. En réalité, ainsi que l'ont montré des observations postérieures, la vitesse a été un peu plus faible, de sorte que la durée du trajet fut de 8 minutes; ci-dessous, j'ai tenu compte de cette différence, peu importante d'ailleurs.

A ce chiffre ajoutons, pour l'inertie de l'appareil, $1\frac{2}{3}$ minute, ce qui est probablement trop, vu que l'indicateur marque presque immédiatement l'augmentation de pression, lorsqu'on pose des poids sur le régulateur; en outre, portons en compte $5\frac{1}{3}$ minutes pour la différence de temps qui correspond à la différence de $1\frac{1}{3}$° entre les longitudes de Krakatau et de Batavia;

on trouve alors que la plus forte explosion a eu lieu à $10^h15^m - (8^m + 1\frac{2}{3}^m + 5\frac{1}{3}^m) = 10^h$, temps de *Krakatau*, avec une incertitude de $1\frac{2}{3}$ minute.

De perturbations barométriques observées en différents lieux d'Europe et d'Amérique, le général Strackey a déduit [1]) que l'onde s'est formée à 9^h24^m, temps de Krakatau. La différence entre cette détermination et la nôtre provient vraisemblablement, en majeure partie, de ce que les barogrammes étaient à trop petite échelle pour permettre des mesures précises; en partie aussi de ce qu'il n'est nullement facile de reconnaître, à son retour, la même phase de la perturbation.

Les réductions des barogrammes des stations européennes, publiées dans la Revue autrichienne de météorologie [2]), et le tracé barométrique d'Utrecht, que M. le professeur Buys Ballot a eu l'obligeance de me faire parvenir, sont à échelle trop petite pour qu'à leur aide on puisse déterminer exactement le temps du maximum des différentes ondes. Récemment, j'ai reçu de M. H. C. Russell, *Government Astronomer* à Sydney, les très beaux barogrammes de cette station pour les dates du 24 au 31 août, barogrammes montrant 5 perturbations, qui nous mettent en état de contrôler la détermination, ci-dessus donnée, du temps de l'explosion.

Dans la fig. ci-jointe (Pl. I) sont représentées les 4 premières de ces perturbations. La première s'est produite le 27 août, entre 5 et 7 heures de l'après-midi; la seconde, le 28 août, entre 6 et 8 heures de l'après-midi; la troisième, le 29 août, entre 4 et 7 heures du matin; la quatrième, le 30 août, entre 6 et 8 heures du matin; la cinquième, qui n'est plus très distincte, le 30 août, entre 2 et 8 heures de l'après-midi.

La 1e perturbation présente 17 ondulations différentes, avec une période moyenne de $7\frac{1}{2}$ minutes sur l'échelle du temps. La différence entre le niveau le plus haut et le plus bas est de 0,109 inch. = 2,76 millimètres.

---

1) *Nature*. N°. 738, 20 déc., p. 181.

2) *Zeitschrift d. österr. Gesellsch. für Meteor.*, t. XIX, p. 97.

Le point le plus élevé de la ligne se trouve environ au milieu de la perturbation entière; ce maximum a lieu à $6^h3\frac{1}{2}^m$ après midi. Dans la 2e perturbation, le maximum occupe également à peu près le milieu de la perturbation et se produit à 7^h14^m après midi. La 3e perturbation montre de nouveau 17 ondes, mais la forme n'est plus la même que celle de la 1e perturbation. Pour point correspondant à notre maximum de la 1e perturbation, on a choisi le maximum de $5^h39\frac{1}{2}^m$ du matin, lequel est situé au milieu de la perturbation et appartient à la 9e onde, de même que dans la perturbation I.

Le maximum de la 4e perturbation, enfin, tombe à 7^h5^m du matin.

Si l'on admet que ces quatre perturbations sont dues à une onde aérienne, ou plutôt à une série d'ondes, émises lors de l'éruption de Krakatau, les perturbations I et III provenant du mouvement ondulatoire de l'Ouest à l'Est, les perturbations II et IV du mouvement de l'Est à l'Ouest, et si l'on admet, en outre, que les quatre maxima susdits correspondent à l'onde de 10 h. du matin, la vitesse des ondes peut être calculée au moyen de ces données.

Le cratère *Donan*, de Krakatau, se trouvait à:

6° 7′ Lat. Sud
105° 26′ Long. Est de Greenwich.

L'observatoire de Sydney est situé à

33° 51′ 41″ Lat. Sud
151° 11′ 50″ Long. Est de Greenwich.

La différence de longitude est donc de 151° 11′ 50″—105° 26′ = 45° 45′ 50″, ou de 3^h3^m en temps.

La distance de ces deux points, suivant le grand cercle, est, de l'O. à l'E., égale à 3033 milles marins, et, de l'E. à l'O., égale à 18567 milles marins.

	Heure de Sydney.	Différence des heures.	Heure de Krakatau.	Temps écoulé depuis l'éruption du 27 août, 10 h. du matin.
Max. Perturb. I	27 août, 6 h. $3\frac{1}{2}$ m. soir	3 h. 3m.	27 août, 3 h. $\frac{1}{2}$ m. soir	5 h. $\frac{1}{2}$ m.
" " II	28 " 7 h. 14 m. soir	3 h. 3m.	28 " 4 h. 11 m. soir	30 h. 11 m.
" " III	29 " 5 h. $39\frac{1}{2}$ m. mat.	3 h. 3m.	29 " 2 h. $36\frac{1}{2}$m. mat.	40 h. $36\frac{1}{2}$ m.
" " IV	30 " 7 h. 5 m. mat.	3 h. 3m.	30 " 4 h. 2 m. mat.	66 h. 2 m.

L'onde I, qui alla directement à Sydney, avait donc une vitesse de $\frac{3033}{5\frac{1}{120}} = 605,59$ milles marins par heure. L'onde II, qui atteignit Sydney dans la direction de l'ouest, avait une vitesse de $\frac{18567}{30\frac{11}{60}} = 615,14$ milles marins par heure.

L'onde qui fit le tour du globe de I à III, donc de l'O. à l'E., a employé pour ce parcours;

$40^h\,36\frac{1}{2}^m - 5^h\,\frac{1}{2}^m = 35^h\,36^m$, de sorte que la vitesse de I à III a été: $\frac{360 \times 60}{35\frac{36}{60}} = 606,74$ milles marins par heure.

Pour l'onde II à IV, on trouve de même:

temps $= 66^h\,2^m - 30^h\,11^m = 35^h\,51^m$, et par conséquent:

vitesse $= \frac{360 \times 60}{35\frac{51}{60}} = 602,51$ milles marins par heure.

Mouvement.	Vitesse en milles marins par heure.	Moyennes.	Moyenne de toutes les valeurs.
Krak. — I. O.—E.	605,59	610,3	
Krak. — II. E.—O.	615,14	(607,6) valeurs dépendantes de	
	(609,6)	l'heure de l'éruption.	607,5
I — III. O.—E.	606,74	604,6	(607,3)
II — IV. E.—O.	602.51	(607,0) valeurs indépendantes de	
	(607,2)	l'heure de l'éruption.	

ou, en mètres par seconde:

Mouvement.	Vitesse en mètres par seconde. [1]	Moyennes.	Moyenne de toutes les valeurs.	Vitesse à 10 kilom. au-dessus de la surface.
Krak. — I. O.—E.	312,06	314,52 valeurs dépendantes de l'heure de l'éruption	313,0	313,5
Krak. — II. E.—O.	316,99			
I — III. O.—E.	312,66	311,57 valeurs indépendantes de l'heure de l'éruption.		
II — IV. E.—O.	310,48			

Ces nombres, dont les deux premiers sont dépendants de l'heure à laquelle l'onde a été formée, les deux derniers tout à fait indépendants de cette heure, s'accordent très bien entre eux, ce qui prouve non seulemnt que la plus forte explosion a réellement eu lieu à un moment très rapproché de 10 heures, mais aussi que nous avons choisi, dans les perturbations barométriques, les bons maxima. Le chiffre correspondant à la seconde perturbation est celui qui s'écarte le plus des autres; peut-être aurions-nous dû prendre ici, non pas l'onde de $7^h\,14^m$, mais celle de $7^h\,30\frac{1}{2}^m$, ce qui eût donné une vitesse de 609.6 milles par heure; le quatrième nombre devient alors 607,2 milles; ces deux valeurs ont été inscrites entre parenthèses dans le tableau ci-dessus. Si nous avions toutefois pris, dans la 3e perturbation, l'une des ondes antérieures à la dépression, par exemple celle de $4^h\,52^m$, nous aurions trouvé pour la vitesse 620,54 milles, nombre presque certainement fautif.

Rien ne dénote l'influence d'un vent de direction déterminée, car, si une pareille influence s'était fait sentir, la 1e et la 3e valeur, relatives au mouvement O—E, devraient être *toutes les deux* notablement plus grandes, ou *toutes les deux* notablement plus petites que les 2e et 4e valeurs, relatives au mouvement E—O; or cela n'est pas le cas.

[1]) Le mille géographique évalué à 7420,4 mètres, et, par suite, le mille marin à 1855,1 mètres.

Ainsi que nous l'avons fait remarquer ci-dessus, il peut y avoir une erreur d'environ 2 minutes dans notre détermination de l'heure de l'explosion, si l'inertie de l'indicateur a été portée en compte pour une valeur trop forte. En admettant que l'onde ait pris naissance à 10^h2^m et, en outre, que dans la 3e perturbation le maximum corresponde à l'onde de $7^h30\frac{1}{2}^m$, nous obtenons pour les 4 vitesses 609,65, 610,25, 606,74 et 607,17 milles, en moyenne 608,5 milles par heure, ou 313,5 mètres par seconde. Ces nombres concordent encore mieux que ceux donnés précédemment. *Je regarde donc* 10^h2^m, *temps de Krakatau, comme l'heure la plus probable de la plus forte explosion.*

Si nous supposons, enfin, que le mouvement n'a pas eu lieu à la surface même de la terre, mais à 10 kilomètres au-dessus de cette surface, la vitesse ne s'en trouve modifiée que de 0^m,5 par seconde. La vitesse est donc d'environ $\frac{1}{17}$ plus petite que celle du son à 0° Cels., ou égale à celle du son à —30° Cels.

La période des différentes ondes de la 1e perturbation mesurait en moyenne, sur l'échelle du temps, $7\frac{1}{2}$ minutes, correspondant à une longueur de 140,000 mètres. Comme, à mesure que le mouvement se propage, les ondes diminuent d'amplitude, deviennent plus tendues, il arrive que plusieurs ondes, grandes et petites, se confondent en quelque sorte, sur le tracé, en une onde unique, de très longue période. C'est à cela qu'il faut attribuer le fait que, dans certains barogrammes d'Europe, les ondes ont en apparence une période de 1 heure, donc une longueur de plus de 1 million de mètres.

Pour le calcul de la vitesse de ces ondes aériennes il faut des tracés au moins aussi grands que les barogrammes de Sydney. Une erreur de 2 minutes seulement, dans la détermination de l'heure du maximum de la 1e perturbation, donne déjà, dans la vitesse, une erreur de 4 milles par heure. Pour les 3 perturbations suivantes, toutefois, une erreur de 2 minutes a peu d'importance, parce qu'ici le laps de temps est beaucoup plus considérable, de sorte que l'erreur relative devient plus petite.

Je prends la liberté d'ajouter ici quelques remarques concernant les formidables ondes qui ont surgi dans la mer, lors de l'éruption.

Parmi les différentes ondes observées dans le détroit de la Sonde, il y en a eu trois principales, savoir, le 26 août entre $5\frac{1}{2}$ et 6 heures du matin, le 27 à 6 heures $\frac{1}{2}$ du matin, et le même jour après 10 heures. Cette dernière a été de beaucoup la plus haute des trois.

Les deux premières ondes ont probablement été produites par la chute, dans la mer, de grandes quantités de matières éjaculées lors des éruptions du dimanche soir, à 5^h5^m, et du lundi matin, à 5^h28^m, temps de Krakatau.

La dernière onde ne peut pas être attribuée à l'explosion de 10 heures, vu que, d'après diverses observations, et d'après les indications marégraphiques de Tandjoeng Priok, près de Batavia, la formation de cette onde doit avoir eu lieu plus tôt.

A l'aide des heures où la grande vague est arrivée à Tandjoeng Priok et au Vlakke Hoek, savoir 12^h30^m et 10^h30^m, ainsi que des profondeurs moyennes de la mer, j'ai calculé, d'abord la vitesse des ondes par la formule connue de Russel: $h = \frac{v^2}{g}$, ou $v = \sqrt{gh}$, puis le temps. De cette manière, j'obtiens $9^h\,45^m$, temps de Krakatau, pour l'instant le plus probable de la formation de la grande onde.

Cette onde ne pouvant non plus être attribuée à des tremblements de terre, il me paraît que la cause en doit être cherchée dans le prodigieux effondrement du volcan de Krakatau. Il est probable que déjà, peu de temps auparavant, la mer avait pénétré dans le cratère par en haut; l'effondrement se fit donc dans la mer, occasionnant le déplacement subit d'une immense masse d'eau et, par suite, la formation de l'onde.

La détermination du temps est ici beaucoup plus incertaine que dans le cas de l'onde aérienne; les profondeurs de la mer, en effet, ne sont pas partout suffisamment connues, et en

outre, dans certains parages, elles varient continuellement d'un point à l'autre, ce qui laisse subsister quelque incertitude sur la profondeur moyenne de la mer, et par conséquent aussi sur la vitesse des ondes. Il n'est pas probable, toutefois, que l'erreur s'élève à plus de 7 minutes de part ou d'autre, c'est-à-dire à plus de 7 minutes avant ou après $9^h 45^m$.

Les données jusqu'ici connues, quant au moment de l'arrivée des ondes en divers points du littoral de l'Océan Indien, conduisent naturellement, pour la vitesse, à des valeurs très différentes; pour des ondes, en effet, dont la longueur est très grande, mais dont la hauteur est faible par rapport à la profondeur de la mer, la vitesse dépend uniquement de la profondeur, et cela suivant la relation, ci-dessus rappelée, de Russel.

J'ai trouvé les vitesses les plus grandes dans les directions de Rodriguez, de Maurice et de l'Afrique australe.

Pour le trajet Krakatau—Rodriguez, calculé suivant le grand cercle, j'ai trouvé une vitesse moyenne de 393,7 milles marins par heure, ou 202,9 mètres par seconde; pour Krakatau—Port Elisabeth (Afrique australe), 390,6 milles par heure, ou 201,3 mètres par seconde; pour Krakatau—Maurice 378,3 milles par heure, ou 194,9 mètres par seconde; vitesses qui correspondent aux profondeurs moyennes très considérables de 4208, 4142 et 3885 mètres. Pour Krakatau—Ceylan, j'ai trouvé des profondeurs de 2000 à 2500 mètres, quoique la carte marine anglaise indique ici des profondeurs beaucoup plus grandes. Je ne m'explique pas bien à quoi tient cette différence.

Les ondes parties de Krakatau nous fournissent donc un moyen d'arriver à la connaissance des profondeurs de l'Océan Indien, et d'y exécuter, en quelque sorte, des sondages bathométriques. On comprend de quelle utilité sont pour de pareils calculs les appareils marégraphiques, qui inscrivent le temps exact de l'arrivée des ondes.

BUITENZORG, 10 mai 1884.

DESCRIPTION D'UN CRÂNE D'INDIEN MOQUI,

PAR LE

Dr H. TEN KATE.

Les Indiens Moquis ou Hopite, que j'ai eu occasion de voir chez eux [1]), forment, comme on le sait, une petite tribu d'environ 1800 âmes, répartie sur six villages [2]) ou *pueblos* situés dans les régions désolées de l'Arizona, un des territoires des Etats-Unis.

Le crâne, qui fait l'objet de la présente note, n'a pas été exhumé par moi-même. Il me fut gracieusement offert par M. le Dr. J. Sullivan, qui me l'envoya quelques mois après mon retour. M. Sullivan, qui, dans le but de poursuivre ses études ethnographiques, séjourne depuis longtemps chez ces Indiens, l'a exhumé lui-même d'un de leurs tombeaux, de sorte que l'authenticité est hors de doute.

Ce crâne se trouve actuellement au Musée ethnographique de Leide. A ma connaissance, il n'y a que le musée de Philadelphie qui possède un ou deux de ces crânes. Vu la grande rareté de ces pièces et l'absence totale de descriptions, on justifiera, je l'espère, l'exposé détaillé des mensurations de ce crâne.

A titre de comparaison j'ajoute à cette description les prin-

---

[1]) Cf.mon ouvrage intitulé „*Reizen en onderzoekingen in Noord-Amerika*". Leide, 1885.

[2]) Les habitants d'un septième village, Tehua, quoique considérés comme Moquis, sont d'une tribu différente.

cipales mesures anthropologiques [1]) que j'ai prises sur un certain nombre de Moquis vivants.

Disons, avant de donner la description du crâne en question, un mot sur le mode de sépulture des Moquis. On dépose le corps dans une cavité formée de carreaux de pierre ou de bois, après l'avoir placé dans une position accroupie, les mains sur les genoux et ayant un bâton entre les mains. On croit que l'âme du défunt sort du tombeau en passant par ce bâton, dressé au-dessus du monceau de grandes pierres qui s'élève à l'endroit où le cadavre est enterré. Rien que ces bâtons n'indique où se trouvent les tombeaux, qui se perdent entre les rochers et les sillons du terrain. Les cimetières se trouvent au pied des hauts rochers isolés (*mesas*) s'élevant au-dessus de la plaine et sur lesquels les Moquis ont bâti leurs villages.

Au juger, il se trouve parmi les Moquis deux types fondamentaux, en dehors des types peu accusés et des nombreux mélanges.

L'un aux traits anguleux et au nez aquilin ou busqué, le type indien par excellence; l'autre caractérisé par la physionomie rappelant à la fois des caractères mongoliques et celtiques, tels que la face large et aplatie, le nez droit ou légèrement retroussé et plus ou moins épaté, l'œil bridé, etc. Le premier type se trouve généralement parmi les hommes; le dernier est très général chez les femmes.

Il semble que ces types sont tous les deux brachycéphales, car une série mixte de ces types et de leurs mélanges, composée de 20 personnes, que j'ai mesurées sur place, n'a révélé que des indices franchement brachycéphales ou sous-brachycéphales, répartis ainsi:

15 hommes: 80,43; 81,03; 81,82; 85,05; 85,55; 86,18; 86,47; 88,09; 88,84; 89,56; 90,—; 90,60; 91,38; 94,61; 95,81;
5 femmes: 84,48; 86,58; 90,70; 93,33; 94,93;

---

[1]) Toutes les mesures, sur le vivant et sur le crâne sec, sont prises d'après les „*Instructions*" de Paul Broca.

ce qui donne pour les premiers une moyenne de 87,69, pour les dernières de 90,04, et comme moyenne générale 88,27: brachycéphales très prononcés.

Pris dans leur ensemble, les Moquis sont de petite taille. Quinze hommes, mesurés par moi, avaient une taille moyenne de $1^{m},61$; 5 femmes, de $1^{m},484$ [1]; donnant une moyenne générale de $1^{m},578$.

La couleur de la peau des Moquis, comme celle des Zuñis et des Indiens Pueblos en général, est très claire, comparée à celle de la plupart des autres tribus.

D'une manière générale, la couleur de la face est égale au numéro 33 de l'échelle chromatique de Broca; celle des bras répond aux numéros 29 et 37.

Le crâne qui fait l'objet de la présente communication n'appartient très probablement pas à l'un des types primordiaux indiqués plus haut, mais à un type secondaire, présentant un mélange des caractères de ces deux types.

De sexe masculin, âgé de 30 à 40 ans, les principaux caractères descriptifs de notre crâne Moqui se résument ainsi: (Cf. les figures, Pl. II et III).

Assez petit, de forme régulière, sauf un léger degré d'aplatissement occipito-pariétal. Front assez droit. Arcade sourcilière peu développée. Insertions musculaires fortement marquées. Au-dessus de l'inion un bourrelet assez proéminent (*Torus occipitalis*, Ecker). Sutures très simples, notamment la suture coronale. Sténocrotaphie des deux côtés. *Os apicis squamae occipitalis*; une suture presque verticale et partiellement soudée divise cet os en deux. Apophyse marginale (Luschka) du côté droit. Os propres du nez assez proéminents. Prognathisme du maxillaire supérieur peu accusé. Palatin court. Dents usées.

---

[1]) Dans une note préliminaire, insérée dans les *Bulletins de la Société d'Anthropologie* de Paris, 1883, p. 802, il a été imprimé par erreur que la taille moyenne des hommes est de $1^{m},67$ et celle des femmes de $1^{m},482$.

Des mesures, exprimées en millimètres, résultent les chiffres que voici:

Diamètres.

Antéro-postérieur max.	168.
Transversal max.	140.
Vertical	132.
Transverse frontal min.	93.
Biorbitaire externe	110.
Occipital maximum	104.
Naso-basilaire	94.
Bizygomatique	128.
Longueur de la face (ophryon)	91.
,, ,, ,, ,, (nasion)	69.
,, ,, ,, ,, (avec mâchoire)	112.
Longueur du nez	50.
Largeur ,, ,,	23.
Hauteur de l'orbite	35.
Largeur ,, ,,	37.
Longueur du trou occipital	33.
Largeur [1]) ,, ,, ,,	25. (?)
Longueur max. du palais	50.
Largeur ,, ,, ,,	37.

Courbes.

Médiane totale	350.
Horizontale ,,	485.

Indices.

Céphalique	83,33.
Vertical	78,57.
Facial [2])	71,09.

[1]) Comme les condyles couvrent une grande partie des bords du trou occipital, une mensuration exacte n'a pu être faite.

[2]) D'après la formule: $\frac{\text{L. ophr.-alv.} \times 100}{\text{D. bizygomat.}}$

Nasal	46,—.
Orbitaire	94,59.
Occipital	75,76. (?)
Palatin	74,—.
Capacité crânienne [1]	1353 cent.cub.

Les mensurations exécutées sur le maxillaire inférieur donnent les chiffres suivants:

Largeur	bicondylienne	117
	bigoniaque	82,5
Hauteur	symphysienne	29
	molaire	26
Corde	gonio-symphysienne	84
	condylo-coronoïde	30
Angle	mandibulaire	109°
	symphysien	65°

Il résulte des indices principaux que notre crâne Moqui est sous-brachycéphale, mégasème (face [2]), leptorrhinien et mégasème (orbite).

Comme on l'a fait des Indiens Pueblos en général, on a essayé d'établir la parenté des Moquis avec les Aztèques. J'ai déjà dit ailleurs [3]) que si cette hypothèse est à peine admissible au point de vue historique, ethnographique et linguistique, l'anthropologie pour sa part ne l'appuie guère.

---

[1]) D'après la méthode de l'indice cubique perfectionnée par le Dr Manouvrier. Cf. *Association française pour l'avancement des sciences.* Congrès de Reims, 1880.

[2]) L'indice facial supérieur de M. Kollmann: $\frac{\text{L.nasion-alv.} \times 100}{\text{D. bizygomat.}}$ donne 53,90: leptoprosope.

[3]) *Revue d'anthropologie*, 2e série, t. VII, 1884, p. 490, 491.

Ce que nous savons de la crâniologie des Aztèques indique qu'ils ne sont pas brachycéphales, mais généralement dolichocéphales, tandis que les Indiens Moquis sont très brachycéphales et présentent souvent les mêmes traits céphaliques que les Zuñis et les autres Indiens Pueblos, tels que la brachycéphalie excessive et l'aplatissement exagéré de l'occiput, ce qui ne les rapproche pas des Aztèques, mais des Cliffdwellers, des construteurs des Casas grandes, des Moundbuilders et des plus anciens peuples de l'Anahuac [1]).

---

[1]) Un crâne de Santiago-Tlaltelolco, que j'ai examiné à Philadelphie, rentre par ses diverses mesures dans la catégorie de notre crâne Moqui, par exemple: d.a.p. 168; d. tr. max. 140; d. vert. 133; ind. céph. 83,33. Voir *Anthropologie du Mexique*, 1re partie, p. 26, par E. T. Hamy, Paris 1884.

Un crane ♀ Moqui, du musée de Philadelphie, me donna: d.a.p. 164; d. tr. max. 134; ind. céph. 81,70.

SUR LA THÉORIE

DE LA

ROTATION DES MOLÉCULES DANS UN CORPS SOLIDE,

PAR

G. J. MICHAËLIS.

---

§ 1. Si l'on se représente un corps solide comme composé de molécules de forme quelconque, qui, dans l'état naturel du corps, sont en équilibre, par leur action mutuelle, à des distances déterminées, ces molécules doivent, sous l'influence de forces extérieures, être déplacées et en même temps subir une rotation.

C'est à cette rotation que Wilh. Weber a attribué les phénomènes secondaires de l'action élastique. En considérant les molécules comme de petits aimants, qui sont orientés par une force magnétique extérieure, il a aussi donné une explication du magnétisme induit. A la même cause peuvent être rapportées les déformations qu'éprouvent les corps aimantés. Weber n'a pas développé sous la forme mathématique sa théorie de l'action élastique secondaire, et il ne l'a fait que d'une manière incomplète pour sa théorie du magnétisme induit. Dans cette dernière, par exemple, il admet arbitrairement une force qui tend à maintenir les molécules dans leurs directions primitives. Or, une pareille force peut être déduite de l'action réciproque des molécules, en faisant, au sujet de leur structure et de leur arrangement, certaines hypothèses déterminées.

Les autres phénomènes précités se laissent également décrire mathématiquement, en négligeant toutefois l'influence de la température, vu que, à raison de notre ignorance de la nature des mouvements thermiques, les molécules sont supposées au repos dans leurs positions d'équilibre.

Soit donné un système de molécules, dont les points exercent l'un sur l'autre des forces, fonctions diverses de leurs distances mutuelles. Dans l'état naturel du système, ces forces sont en équilibre. La rotation que les molécules subissent, lorsque des forces extérieures déterminées agissent sur le système, sera étudiée analytiquement dans ce qui suit. Nous partirons d'hypothèses particulières concernant la structure et l'arrangement des molécules, hypothèses qui simplifient notablement les calculs. On conçoit aisément que l'adoption d'hypothèses plus générales conduirait à des résultats de même nature que ceux auxquels nous allons parvenir [1]).

§ 2. Représentons-nous deux molécules égales. En des points correspondants O et O' menons deux systèmes de coordonnées rectangulaires $(x\ y\ z)$ et $(x'\ y'\ z')$, qui soient situés de la même manière dans chaque molécule. Entre ces deux systèmes existent les relations:

$$\left.\begin{array}{l} x = x_0 + \alpha x' + \beta y' + \gamma z' \\ y = y_0 + \alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 z' \\ z = z_0 + \alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2 z' \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Faisons la distance $OO' = R$; soient $x_1\ y_1\ z_1$ les coordonnées d'un point déterminé de la première molécule, x'_1, y'_1, z'_1 celles d'un point de la seconde par rapport au système $(x'\ y'\ z')$, r leur distance. Soit $F(r)$ le potentiel de l'action entre ces deux points, potentiel dont l'accroissement représente le travail des forces. On a alors les formules:

---

[1]) Ce point a été étudié de plus près dans les *Verslagen en Mededeelingen der Kon. Akad. van Wetensch.*, (2), t. XX, p. 300.

$$F(r)=F+(\alpha x_1'+\beta y_1'+\gamma z_1'-x_1)\frac{\partial F}{\partial x}+(\alpha_1 x_1'+\beta_1 y_1'+\gamma_1 z_1'-y_1)\frac{\partial F}{\partial y}+$$

$$+(\alpha_2 x_1'+\beta_2 y_1'+\gamma_2 z_1'-z_1)\frac{\partial F}{\partial z}+\tfrac{1}{2}(\alpha x_1'+\beta y_1'+\gamma z_1'-x_1)^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+$$

$$+\tfrac{1}{2}(\alpha_1 x_1'+\beta_1 y_1'+\gamma_1 z_1'-y_1)^2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\tfrac{1}{2}(\alpha_2 x_1'+\beta_2 y_1'+\gamma_2 z_1'-z_1)^2\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}+$$

$$+(\alpha x_1'+\beta y_1'+\gamma z_1'-x_1)(\alpha_1 x_1'+\beta_1 y_1'+\gamma_1 z_1'-y_1)\frac{d^2 F}{\partial x\,\partial y}+$$

$$+(\alpha x_1'+\beta y_1'+\gamma z_1'-x_1)(\alpha_2 x_1'+\beta_2 y_1'+\gamma_2 z_1'-z_1)\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial z}+$$

$$+(\alpha_1 x_1'+\beta_1 y_1'+\gamma_1 z_1'-y_1)(\alpha_2 x_1'+\beta_2 y+\gamma_2 z_1'-z_1)\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial z}\,..\,(2)$$

F est ici la valeur de $F(r)$ pour $r=R$.

Le développement est exact jusqu'aux termes du second degré par rapport aux dimensions linéaires des molécules. Une expression semblable représente le potentiel des forces qui agissent entre tout couple de points des deux molécules. En prenant la somme pour toutes les combinaisons de ces points, deux à deux, on obtient le potentiel de l'action réciproque des deux molécules.

La fonction prend une forme plus simple si l'on suppose qu'il existe dans les molécules trois plans de symétrie faisant entre eux des angles droits, et dont deux soient des plans de symétrie équivalents. Ceux-ci étant choisis pour plans des xz et des xy, le potentiel prend la forme:

$$\Sigma F(r)=\Sigma\Big\{F+\tfrac{1}{2}\Big[\alpha^2(x_1'^2-y_1'^2)+x_1^2+y_1'^2-2\alpha\, x_1 x_1'\Big]\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$$

$$+\tfrac{1}{2}\Big[\alpha_1^2(x_1'^2-y_1'^2)+y_1^2+y_1'^2\Big]\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\tfrac{1}{2}\Big[\alpha_2^2(x_1'^2-y_1'^2)+$$

$$+y_1^2+y_1'^2\Big]\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}+\Big[\alpha\alpha_1(x_1'^2-y_1'^2)-\alpha_1 x_1 x_1'\Big]\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}+$$

$$+\Big[\alpha\alpha_2(x_1'^2-y_1'^2)-\alpha_2 x_1 x_1'\Big]\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}+\Big[\alpha_1\alpha_2(x_1'^2-y_1'^2)\Big]\frac{\partial^2 F}{\partial\eta\partial z}(3)$$

Cette expression vaut aussi lorsque des points qui, par rapport au plan de yz, sont l'image l'un de l'autre, possèdent des propriétés opposées, ce qui peut arriver dans les aimants.

Faisons maintenant passer par le point O des axes fixes (ξ, η, ζ), liés au système $(x\,y\,z)$ par les relations:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= ax + by + cz \\ \eta &= a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ \zeta &= a_2 x + b_2 y + c_2 z \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$\frac{\partial F}{\partial x}$ se transforme alors en $a\frac{\partial F}{\partial \xi} + a_1\frac{\partial F}{\partial \eta} + a_2\frac{\partial F}{\partial \zeta}$, tandis que $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$, par exemple, peut être remplacé par la forme symbolique $\left(a\frac{\partial F}{\partial \xi} + a_1\frac{\partial F}{\partial \eta} + a_2\frac{\partial F}{\partial \zeta}\right)^2$, où, au lieu des carrés des dérivées, on doit écrire : $\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial \zeta^2}$.

Pour trouver le potentiel des forces exercées par le système sur *une* molécule, il faut transporter les nouveaux axes dans la formule (3), puis prendre la somme pour toutes les molécules qui se trouvent dans la sphère d'action de celle qu'on considère. Nous admettrons deux hypothèses: 1° que l'arrangement des molécules, dans la sphère d'action, est partout le même autour d'une droite, que nous choisissons pour axe des ξ; 2° que toutes les molécules qui exercent une action sur la molécule considérée sont parallèles entre elles, sans être pour cela nécessairement parallèles à cette dernière. Nous nous servirons de cette hypothèse au § 5. Les termes qui contiennent $\frac{\partial^2 F}{\partial \xi\,\partial \eta}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial \xi\,\partial \zeta}$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial \eta\,\partial \zeta}$ sont évidemment des fonctions impaires des coordonnées et disparaissent par conséquent dans la sommation.

A l'aide des hypothèses adoptées, on déduit facilement de l'équation (3) la formule suivante pour le potentiel cherché:

$$V_1 = \Sigma\,\Sigma \Big\{ F + \tfrac{1}{2}\left[\alpha^2 (x_1'^2 - y_1'^2) + x_1^2 + y_1'^2 - 2\,\alpha x_1 x_1'\right]$$

$$\left[a^2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}\right) + \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}\right] +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left[\alpha_1^2(x_1'^2 - y_1'^2) + y_1'^2 + y_1^2\right]\left[b^2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}\right) + \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}\right] +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left[\alpha_2^2(x_1'^2 - y_1'^2) + y_1^2 + y_1^2\right]\left[c^2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}\right) + \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}\right] +$$

$$+ \left[\alpha\alpha_1 (x_1'^2 - y_1'^2) - \alpha_1 x_1 x_1'\right]\left[a b\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}\right)\right] +$$

$$+ \left[\alpha\alpha_2 (x_1'^2 - y_1'^2) - \alpha_2 x_1 x_1'\right]\left[a c\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}\right)\right] +$$

$$+ \left[\alpha_1\alpha_2 (x_1'^2 - y_1'^2)\right]\left[b c\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}\right)\right] \Big\} \quad . . (5)$$

Elle peut, après quelques réductions, être écrite de cette manière :

$$V_1 = \Sigma\Sigma \Big\{ F + \tfrac{1}{2}\left[(x_1^2 + x_1'^2)\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + (y_1^2 + y_1'^2)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}\right)\right] +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\Big[\cos^2 (x'\xi)\,(x_1'^2 - y_1'^2) - 2\cos (x\xi)\cos (x'\xi)\, x_1 x_1' +$$

$$+ \cos^2 (x\xi)\,(x_1^2 - y_1^2)\Big]\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}\right) - \cos(xx')\, x_1 x_1' \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \Big\} \quad . . (6)$$

Les hypothèses sur lesquelles cette équation repose demandent quelques mots d'explication.

Dans un corps, on distinguera de grands et de petits éléments de volume. Dans un petit élément, les molécules peuvent être regardées comme à peu près parallèles, mais non comme affectant une disposition isotrope. Les molécules, en effet, s'orientent d'après les forces que les autres exercent sur elles. La résultante, pour des molécules adjacentes, ne peut pas différer beaucoup. A l'intérieur du corps, les directions doivent donc varier, avec les coordonnées, d'une manière continue. Mais deux molécules, qui ne sont pas sphériques, exercent l'une sur l'autre, dans des directions différentes,

des actions inégales; il doit en résulter que dans des directions différentes elles ne se placent pas non plus à la même distance l'une de l'autre, en d'autre termes, que le corps consistera en une réunion de parties anisotropes. Il est probable que, si les molécules ont une structure symétrique autour d'un axe, leur arrangement aussi sera le même tout autour d'un axe. L'hypothèse posée peut donc être regardée comme la conséquence de l'hypothèse qui a été faite sur la structure des molécules.

Dans un grand élément de volume, au contraire, il est permis d'admettre que les molécules sont, en moyenne, distribuées également suivant toutes les directions, et, si le corps peut être considéré dans son ensemble comme isotrope, elles auront elles-mêmes une disposition isotrope.

Il s'agit maintenant de savoir si une sphère d'action doit être traitée comme un petit élément, ou comme un grand. Dans le premier cas, toutes les molécules comprises dans une pareille sphère peuvent être regardées comme approximativement parallèles entre elles. L'équation (6) donne alors, pour la partie du potentiel qui dépend des directions, l'expression:

$$V_2 = \tfrac{1}{2}\Sigma\left\{(x_1'-x_1)^2-(y'_1-y_1)^2\right\}\cos^2(x\xi)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial\xi^2}-\frac{\partial^2 F}{\partial\eta^2}\right). \quad (7)$$

Afin de simplifier, on n'a écrit dans cette expression qu'un seul signe de sommation. Dans le coefficient de $\cos^2(x\,\xi)$ on a, pour la symétrie, introduit le terme $y_1 y_1'$, qui, d'après les considérations précédentes, est nul.

Nous commencerons par développer les conséquences de l'hypothèse qui a donné lieu à l'équation (7). Ensuite, nous chercherons comment l'équation (6) peut servir de point de départ pour le calcul des phénomènes lorsque l'action réciproque des molécules reste sensible à des distances finies.

§ 3. Le couple qui agit, à raison des forces internes, sur *une* molécule, lorsque par l'une ou l'autre cause toutes les molécules comprises dans sa sphère d'action sont tournées de

la même quantité, est, d'après l'équation (7), égal à $\frac{1}{2}\frac{\partial V_2}{\partial p}$, p désignant l'angle de déviation ($x\xi$). Ce couple, en effet, a la même valeur que si, dans une unité de volume quelconque, l'état était le même que dans la sphère d'action considérée. En représentant par n le nombre des molécules dans cette unité de volume, on aurait pour le potentiel mutuel $\frac{1}{2} n V_1$, et le travail exécuté lors d'une petite rotation δp serait $\frac{1}{2} n \frac{\partial V_1}{\partial p} \delta p$, ou ici $\frac{1}{2} n \frac{\partial V_2}{\partial p} \delta p$. Toutes les molécules étant sollicitées par des couples de même grandeur, on trouve, pour le couple cherché, l'expression ci-dessus donnée.

Le couple qui, après la déviation, tend à ramener la molécule en question dans sa position primitive a donc pour valeur: $G \sin 2p$, si l'on pose

$$G = \frac{1}{4} \Sigma \left\{ (x'_1 - x_1)^2 - (y'_1 - y_1)^2 \right\} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \right).$$

Pour déterminer maintenant, en premier lieu, l'influence qu'une petite déformation subie par le corps exerce sur le potentiel, nous partirons de l'équation (3).

Si l'on étend cette expression à toutes les molécules contenues dans la sphère d'action, elle devient, puisque toutes ces molécules sont regardées comme parallèles;

$$\Sigma F(r) = \Sigma \left\{ F + \frac{1}{2}(x_1' - x_1)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{1}{2}(y_1' - y_1)^2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right) \right\}. \quad (8)$$

où le terme $2 y_1 y_1'$ a de nouveau été ajouté pour la symétrie. Dans cette expression, nous devons introduire les axes ξ, η et ζ, remplacer les coordonnées ξ, η ζ d'un point par:

$$\left. \begin{array}{l} \xi + u_\xi \xi + u_\eta \eta + u_\zeta \zeta \\ \eta + v_\xi \xi + v_\eta \eta + v_\zeta \zeta \\ \zeta + w_\xi \xi + w_\eta \eta + w_\zeta \zeta \end{array} \right\} \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

puis prendre la somme pour la sphère d'action. Les déplacements que la molécule en question éprouve suivant les axes sont représentés ici par u, v et w, tandis que u_ξ, u_η etc. indiquent les coefficients différentiels $\frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}$ etc. Dans le résultat, on ne tient compte que des premières puissances de u_ξ, u_η etc., vu que ces coefficients sont supposés infiniment petits. Admettons, en outre, que dans la sphère d'action la déviation, à partir d'un arrangement isotrope, soit assez faible pour pouvoir être négligée dans la partie du potentiel qui est proportionnelle à la déformation. Après quelques réductions, on obtient pour cette partie du potentiel, en tant qu'elle dépend des cosinus des directions, la formule:

$$V_4 = \Sigma \left\{ \tfrac{1}{2} \left[(x_1' - x_1)^2 - (y_1' - y_1)^2 \right] \left[a^2 u_\xi + a_1^2 v_\eta + a_2^2 w_\zeta \right] \right.$$

$$\left[\xi \frac{\partial^3 F}{\partial \xi^3} - \xi \frac{\partial^3 F}{\partial \eta^2 \partial \xi} \right) + 2 \left[a a_1 (u_\eta + v_\xi) + a a_2 (u_\zeta + w_\xi) + \right.$$

$$\left. + a_1 a_2 (v_\zeta + w_\eta) \xi \frac{\partial^3 F}{\partial \eta^2 \partial \xi} \right] \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

Dans les termes qui contiennent des dérivées de F, on n'a à conserver, à cause de l'isotropie supposée, que les fonctions paires; les coordonnées peuvent être échangées entre elles.

A l'aide de la formule ci-dessus, on peut calculer les tensions sur les faces latérales d'un petit cube pris dans l'intérieur du corps, en tant que ces tensions dépendent de la partie indiquée du potentiel. Lorsque n représente le nombre des molécules dans le cube, le potentiel mutuel est exprimé par $W = \frac{1}{2} n V_4$, si l'on admet que toutes les molécules soient parallèles. On peut, en effet, calculer le travail exécuté lors d'un petit déplacement virtuel, dans lequel les molécules subissent une translation, mais pas de rotation. Ce travail est:

$$\delta W = \frac{\partial W}{\partial u_\xi} \delta u_\xi + \frac{\partial W}{\partial v_\eta} \delta v_\eta + \frac{\partial W}{\partial w_\zeta} \delta w_\zeta + \frac{\partial W}{\partial u_\eta} \delta (u_\eta + v_\xi) +$$

$$+ \frac{\partial W}{\partial v_\xi} \delta (v_\zeta + w_\xi) + \frac{\partial W}{\partial w_\eta} \delta (w_\eta + v_\zeta)$$

d'où, pour les tensions cherchées, on déduit:

$$\tau_{11} = \frac{\partial W}{\partial u\xi}\,;\ \tau_{22} = \frac{\partial W}{\partial v_\eta}\,;\ \tau_{33} = \frac{\partial W}{\partial w_\zeta}\,;\ \tau_{12} = \frac{\partial W}{\partial u_\eta}\,;\ \tau_{13} = \frac{\partial W}{\partial u_\zeta}\,;$$

$$\tau_{13} = \frac{\partial W}{\partial v\zeta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Si φ_1 désigne l'angle que, dans l'état naturel du corps, les axes des x des molécules font avec un axe fixe quelconque, la tension dans cette direction devient:

$$\tau_{11} = A\, cos^2 \varphi_1\ , \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

lorsqu'on pose:

$$A = \tfrac{1}{4}\, n\, \Sigma \left\{ \left[(x_1' - x_1)^2 - (y_1' - y_1)^2 \right] \left(\xi\, \frac{\partial^3 F}{\partial \xi^3} - \xi\, \frac{\partial^3 F}{\partial \eta^2 \partial \xi} \right) \right. .$$

Quand toutes les molécules ont tourné de la même quantité, et que par là l'angle φ_1 a pris la valeur φ, le changement de tension, dans la direction indiquée, est

$$\tau_{11}' - \tau_{11} = A\, (cos^2 \varphi - cos^2 \varphi_1) \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

Supposons que le corps soit un cylindre, dont l'une des bases est maintenue fixe, tandis que sur l'autre agit une force parallèle à l'axe. Les déplacements peuvent alors, comme on sait, être représentés par:

$$u = \lambda X \quad v = -\mu \lambda Y \text{ et } w = -\mu \lambda Z,$$

où X, Y et Z sont les coordonnées, par rapport à un système dans lequel X est parallèle à l'axe du cylindre et dont l'origine est située dans la base fixe. L'équation (10) donne alors:

$$V_4 = \frac{2\, A}{n} \left[cos^2 \varphi\, (1 + \mu)\, \lambda - \mu\, \lambda \right], \text{ où } a = cos\, \varphi.$$

Le couple qui agit sur la molécule considérée a pour valeur

$$\tfrac{1}{2}\, \frac{\partial V_4}{\partial \varphi} = -\frac{A}{n} (1 + \mu)\, \lambda\, sin\, 2\, \varphi.$$

Le couple qui tend à ramener la molécule à sa position initiale étant, comme il a été dit au commencement de ce §, $G \sin 2p$, la condition d'équilibre devient:

$$\frac{A}{n}(1+\mu)\lambda \sin 2\varphi = G \sin 2p \quad \ldots\ldots (14)$$

ou, plus brièvement:

$$\sin 2p = k \sin 2(\varphi_1 - p),$$

puisqu'on doit évidemment avoir ici $\varphi = \varphi_1 - p$.

En s'arrêtant aux secondes puissances de k (cette quantité supposée petite), on trouve:

$$\cos 2\varphi = \cos 2\varphi_1 + k \sin^2 2\varphi_1 - \tfrac{3}{2} k^2 \cos 2\varphi_1 \sin^2 2\varphi_1.$$

Le changement de tension produit par la rotation des molécules devient donc:

$$\tau_{11}' - \tau_{11} = \tfrac{1}{2} A \left(k \sin^2 2\varphi_1 - \tfrac{3}{2} k^2 \cos 2\varphi_1 \sin^2 2\varphi_1\right).$$

Jusqu'ici nous avons admis que les molécules du cube étaient toutes parallèles. Mais, si ce cube est regardé comme un grand élément de volume, toutes les directions y sont, en moyenne, également représentées. La formule trouvée doit alors être multipliée par $\frac{1}{2} \sin \varphi_1 \, d\varphi_1$, puis intégrée entre les limites 0 et π. Cela donne pour résultat

$$\tau_{11}' - \tau_{11} = A\left(\tfrac{4}{15} k + \tfrac{2}{35} k^2\right) \quad \ldots\ldots (15)$$

Cette quantité est la mesure de l'*intensité* de l'action élastique secondaire suivant l'axe du cylindre, en cas de déformation constante. L'action secondaire croît donc un peu plus rapidement que dans le rapport de la grandeur de la déformation.

M. F. Kohlrausch, qui a fait de très nombreuses recherches sur l'action élastique secondaire, a trouvé, dans le cas de la torsion d'un fil d'argent [1]), que l'action secondaire est à peu près proportionnelle au déplacement antérieur, mais qu'elle

[1]) Pogg. *Annal.*, t. CLVIII, p. 337.

croît un peu plus rapidement que celui-ci. Ce résultat est d'accord avec la théorie, car dans le cas de la torsion on doit trouver une formule de la même forme que (15), si l'on considère cette déformation comme une élongation dans un sens et une compression de même grandeur dans un autre sens. A la vérité, en étirant le caoutchouc, M. Kohlrausch a observé une action secondaire qui croissait un peu moins fortement que dans le rapport de la tension; mais il a fait remarquer lui-même que cette matière ne se prête pas très bien à l'exécution d'expériences exactes.

§ 4. Supposons maintenant que sur le cylindre, dans la direction de son axe, agisse une force magnétique. Provisoirement nous admettrons que, dans ce cas encore, la sphère d'action d'une molécule est un petit élément de volume, dans lequel toutes les molécules sont sensiblement parallèles. Sur une molécule dont l'axe fait un angle φ avec celui du cylindre, agit, dans le plan de ces deux axes, en vertu de la force extérieure, un couple, dont la valeur peut être indiquée par: $D \sin \varphi$. Pour des molécules voisines, D peut être regardé comme constant. De même que dans l'équation (14), la condition d'équilibre est exprimée par

$$D \sin \varphi = G \sin 2p \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

ou, plus brièvement, par:

$$\sin 2p = k_1 \sin (\varphi_1 - p) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Il est évident que, lorsque k_1 a des valeurs très petites ou très grandes, cette équation acquiert la forme que Weber a admise pour le calcul du magnétisme induit. Dans le premier cas, en effet, l'angle p est très petit, et par suite, au lieu de $\sin 2p$, on peut écrire: $2 \sin p$. Lorsque, au contraire, le nombre k_1 est grand, $\sin (\varphi_1 - p)$ peut être remplacé par: $\frac{1}{2} \sin 2 (\varphi_1 - p)$. En poussant l'exactitude jusqu'aux quantités du troisième ordre par rapport à k_1 (ce nombre supposé très petit), on obtient, pour la solution de l'équation (16):

$$\sin p = \tfrac{1}{2} k_1 \sin \varphi_1 - \tfrac{1}{4} k_1^2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 + \tfrac{1}{8} k_1^3 \sin \varphi_1 \cos^2 \varphi_1,$$

ce qui donne:

$$\cos\varphi = \cos\varphi_1 + \tfrac{1}{2}k_1 \sin^2\varphi_1 - \tfrac{3}{8}k_1^2 \sin^2\varphi_1 \cos\varphi_1 + \tfrac{1}{4}k_1^3 \sin^2\varphi_1 \cos^2\varphi_1 \quad (17)$$

De cette formule on peut déduire l'intensité de l'aimantation dans un élément de volume comprenant un grand nombre de sphères d'action. Soient m le moment magnétique d'une molécule, n le nombre des molécules que renferme l'unité de volume, et I l'intensité; on a:

$$I = \tfrac{1}{2}\int_0^\pi m\, n \cos\varphi \sin\varphi_1\, d\varphi_1,$$

ou, après avoir substitué à $\cos\varphi$ la valeur donnée par l'équation (17):

$$I = \tfrac{1}{3} m\, n\, k_1 + \tfrac{1}{30} m\, n\, k_1^3 \quad \ldots\ldots\ldots (18)$$

L'aimantation augmenterait donc un peu plus fortement que dans le rapport de la grandeur de la force.

Le résultat auquel nous sommes parvenus n'est toutefois pas d'accord, quantitativement, avec celui des recherches expérimentales. Les observations de Quintus Icilius, de Rieke, de Stoletow, de Rowland, de Baur et d'autres, montrent bien que, pour de petites forces magnétiques, la fonction $\frac{I}{k_1}$ croît avec ces forces, mais dans une mesure plus forte que ne l'exprime la formule (18). C'est ainsi que M. Baur a trouvé [1]) que, en cas de très faibles forces magnétiques, la fonction $\frac{I}{k_1}$ croît à peu près proportionnellement à la force.

Deux circonstances, toutefois, qui exercent de l'influence sur le résultat, ont été négligées dans l'établissement de l'équation (18).

En premier lieu, les molécules éprouvent, suivant les vues émises par G. Wiedemann, Streintz et autres, une résistance, qui les empêche de se diriger entièrement d'après les forces

[1]) Wiedemann, *Annal.*, t. XI, p. 399.

extérieures. Ce phénomène, nommé accommodation, a pour conséquence que, lorsqu'un corps a subi des déformations répétées dans un même sens, les molécules obéissent plus facilement à l'action des forces. Cela explique que le rapide accroissement de l'aimantation, avec l'accroissement de la force extérieure, devienne, suivant l'observation de M. Wiedemann, moins sensible lorsque, par des forces magnétiques contraires, les molécules ont d'abord été tournées plusieurs fois dans des sens opposés.

La seconde et probablement la principale circonstance négligée dans notre calcul, c'est l'action réciproque des molécules à des distances finies. La notable influence que la forme d'un corps exerce sur son aimantation plaide fortement en faveur de cette hypothèse. Nombre d'observations rendent très vraisemblable que, par exemple dans l'aimantation du fer doux, l'influence de l'action magnétique réciproque des molécules à de grandes distances est le point essentiel. L'action due à l'anisotropie des petits éléments de volume ne jouerait alors qu'un rôle très subordonné.

§ 5. Lorsqu'on part de l'hypothèse mentionnée en dernier lieu, toutes les molécules qui agissent sur celle qu'on considère spécialement peuvent être regardées comme ayant un arrangement isotrope. En ce qui concerne leurs directions dans l'état naturel du corps, on peut admettre que toutes les directions coexistent, mais que les plus nombreuses sont celles qui s'écartent peu de la direction de la molécule considérée; la direction moyenne coïncide alors avec cette dernière. Au sujet de l'application de l'équation (6) à cette hypothèse, je me bornerai à une indication générale.

Tout le système des molécules qui agissent sur la molécule considérée peut être conçu comme un assemblage d'un grand nombre de systèmes isotropes, dans chacun desquels les molécules seraient parallèles entre elles.

De la partie du potentiel V_1 (équation (6)) qui est dépendante des directions, il ne reste, pour un pareil assemblage,

que le terme

$$V_3 = -\Sigma \left\{ \cos (x\,x')\ x_1\, x_1' \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

Ce terme ne subsiste évidemment que si les molécules contiennent des points à propriétés opposées, de sorte que l'action moléculaire, dont il est ici question, peut à juste titre être appelée une action réciproque magnétique.

Chacun des systèmes de molécules parallèles exerce sur la molécule centrale une action dont le potentiel peut être représenté par:

$$-\cos (x\,x')\, \Sigma\, x_1\, x_1' \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2},$$

où la sommation doit être étendue à tout le système considéré. Ce système agit donc comme une force magnétique, dont la grandeur est proportionnelle à $\sin (x\,x')$, et qui est par conséquent dirigée suivant l'axe des x'. Chaque système de molécules parallèles peut être remplacé par une semblable force. La résultante de toutes ces forces tombe évidemment dans la direction de l'axe des x. Si maintenant une force magnétique extérieure, parallèle à l'axe du cylindre, commence à agir, toutes les molécules seront tournées, mais pas toutes de la même quantité dans un même élément de temps. Dans le premier élément de temps, les rotations seront proportionnelles aux sinus des angles que les axes des molécules font avec l'axe du cylindre. Les forces magnétiques, qui représentent les actions exercées sur la molécule centrale par les différents systèmes de molécules parallèles entre elles, éprouvent donc aussi des rotations différentes. Pour quelques-unes de ces forces, l'angle qu'elles font avec la direction initiale de l'axe des x devient plus grand, pour d'autres il devient plus petit. Si l'on admet, comme première approximation, que la résultante ne change pas de direction, tandis que l'axe des x de la molécule centrale subit la déviation p, il se produira un couple rétrogressif, proportionnel à $\sin p$. On arrive alors à la formule de

Weber pour la détermination de l'équilibre. Si l'on veut traiter la question d'une manière plus précise, il faut, de toute nécessité, faire une hypothèse concernant la répartition des différentes directions dans la sphère d'action. Considérons les molécules qui initialement font des angles égaux avec l'axe des x. L'hypothèse la plus naturelle est que, pour chaque direction, le nombre de ces molécules est le même et que, en moyenne, elles sont situées de la même manière dans la sphère d'action. Leur action est représentée par une suite de forces égales, dont les directions forment une surface conique. A raison de la symétrie, il est clair que la résultante de ces forces tourne dans le plan qui passe par l'axe du cylindre et par la direction initiale de l'axe des x. Cela est donc aussi le cas pour la résultante de toutes les forces moléculaires. Cette résultante étant désignée par G', et l'angle qu'elle parcourt par q, l'équation qui sert à déterminer l'équilibre prend la forme

$$D \sin(\varphi_1 - p) = G' \sin(p - q) \quad \text{. . . . .} \quad (20)$$

où D est la force extérieure. Lors de la rotation, la force G' évidemment est variable. Comme seconde approximation, on peut maintenant admettre que la rotation de toutes les molécules qui agissent sur la molécule considérée se laisse calculer suivant la formule de Weber. Le changement de direction et de grandeur de G' peut être trouvé alors moyennant une hypothèse déterminée au sujet de la distribution des directions dans la sphère d'action. La formule (20) fait alors connaître exactement le mouvement d'une molécule. Un calcul de ce genre a été exécuté par M. Chwolson [1]). Dans l'hypothèse qu'il a adoptée entraient toutefois un grand nombre de constantes arbitraires, raison pour laquelle le résultat auquel il est parvenu ne peut être contrôlé par les déterminations expérimentales.

§ 6. Si l'on suppose de nouveau une force magnétique agissant sur le cylindre dans la direction de l'axe, et qu'on

[1]) Pogg. *Annal.*, *Erg. Band* VII, p. 53.

procède d'abord de l'hypothèse que dans une sphère d'action toutes les molécules sont parallèles, on trouve, au moyen de l'équation (17):

$$\cos^2\varphi = \cos^2\varphi_1 + k_1 \sin^2\varphi_1 \cos\varphi_1 + k_1^2 \sin^4\varphi_1 - \tfrac{3}{4} k_1^2 \sin^2\varphi_1 \quad (21)$$

Lorsque les molécules tournent, la tension intérieure du corps doit changer, si ses dimensions restent les mêmes, ainsi qu'on l'a vu au § 3. Par la substitution de l'expression (21) dans l'équation (13), on obtient pour le changement de tension suivant l'axe du cylindre, en supposant parallèles toutes les molécules contenues dans le cube sur les faces duquel la tension est déterminée, la valeur:

$$\tau_{11}' - \tau_{11} = A\,(k_1 \sin^2\varphi_1 \cos\varphi_1 + k_1^2 \sin^4\varphi_1 - \tfrac{3}{4} k_1^2 \sin^2\varphi_1).$$

Si, dans le cube, toutes les directions sont en moyenne représentées également, cette expression doit de nouveau être multipliée par $\frac{1}{2} \sin\varphi_1 \, d\varphi_1$, puis intégrée entre les limites 0 et π. On trouve ainsi:

$$\tau_{11}' - \tau_{11} = \tfrac{1}{30} A\, k_1^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

D'après cela, le changement de tension serait approximativement proportionnel au carré de la force extérieure, lorsque celle-ci est petite. Le résultat reste le même si l'on donne pour base au calcul les considérations du paragraphe précédent, vu que, dans les deux cas, l'équation (17) prend exactement la même forme, jusqu'à la première puissance de k_1. Ce résultat est confirmé par les observations de Joule, suivant lesquelles l'allongement qu'un barreau subit quand on l'aimante par un courant galvanique, est proportionnel au carré de l'aimantation. Lorsque, en effet, A est une quantité positive, il se produira, d'après la formule (22), un accroissement de tension, si le corps est forcé de conserver les mêmes dimensions. Il suit de là qu'un allongement proportionnel du cylindre doit avoir lieu quand celui-ci est abandonné à lui-même.

UNE EXPÉRIENCE DE COURS
SUR LA
DIFFUSION,

PAR

HUGO DE VRIES.

Dans les *Philosophical Transactions* de 1861 (page 199), Graham, en suite de ces célèbres recherches sur la dialyse, a décrit une expérience qui, légèrement modifiée, peut utilement servir, me semble-t-il, à la démonstration des phénomènes de diffusion devant un auditoire nombreux.

Cette expérience avait été instituée par Graham pour l'étude de la vitesse de diffusion du chlorure de sodium dans la gélatine, comparée à celle dans l'eau. Dans des vases cylindriques d'environ 12 cm. de hauteur, il versait à chaud une petite quantité d'un mélange contenant 10 pour cent de chlorure de sodium et 2 pour cent de gélatine japonaise, puis, ce mélange refroidi et coagulé, il achevait de remplir les vases avec une solution renfermant 2°/。 de gélatine, mais pas de sel. Après refroidissement, le tout formait une gelée ferme. Au bout de huit jours, cette gelée était coupée en tranches de 50 cc de volume, et analysée. Le résultat fut que la répartition du sel dans la gelée était la même que dans d'autres vases pareils, où le Na Cl avait diffusé, dans des circonstances du reste identiques, d'une solution à 10°/。 dans l'eau pure. La vitesse de diffusion dans la gelée était donc la même que dans l'eau.

Si dans cette expérience, au lieu de chlorure de sodium, on prend un sel coloré, ou quelque autre composé coloré, celui-ci se répand également par diffusion dans la gelée, et

on a alors l'avantage que la distribution peut être montrée directement, en même temps que la gelée empêche le dérangement de l'expérience par des secousses ou des chocs éventuels. Lorsque la salle est trop grande pour que tous les auditeurs puissent voir l'expérience simultanément, de sorte qu'on est obligé de la montrer successivement à des groupes différents, cet avantage de l'emploi de la gélatine a une valeur incontestable.

Outre cet avantage général, il y en a d'autres, qui rendent la substitution de la gelée à l'eau indispensable dans certains cas déterminés. Qu'il me soit permis de décrire brièvement quelques expériences de diffusion que j'ai faites, cette année, pour la démonstration de ces phénomènes.

Comparaison des vitesses de diffusion dans l'eau et dans les gelées. Je me servais de tubes de verre longs d'au moins $0^m,5$ et ayant environ 5 mm. de diamètre intérieur. Après avoir scellé l'une des extrémités à la lampe, je remplissais le tube, jusqu'à environ 5 cm. de l'autre extrémité, avec la gelée. Comme telle, j'employais ou bien de la gélatine, contenant à peu près 4°/$_0$ de matière solide, qui était versée à chaud et se coagulait par le refroidissement, ou bien de l'hydrate d'acide silicique. Pour obtenir celui-ci, j'ajoutais à une solution de silicate de potasse, après l'avoir fortement diluée, tout juste autant d'acide nitrique qu'il en fallait pour saturer la potasse, et je réglais les concentrations de telle sorte que le mélange contînt à peu près 4°/$_0$ d'acide silicique. Le mélange restait liquide pendant quelques minutes, et pendant ce temps on le versait dans les tubes, où il se coagulait immédiatement. A cause de la rapidité de la coagulation, on est obligé de faire pour chaque tube séparément le mélange des matières en question. La présence du nitrate de potasse dans la gelée n'a évidemment aucun inconvénient pour l'expérience; la gelée était neutre aux réactifs colorés.

Les tubes ainsi préparés, l'espace resté vide était rempli presque entièrement de sel solide et d'eau privée d'air par une ébullition préalable, puis le tube était fermé au moyen

d'un bouchon que, pour toute sûreté, je reliais hermétiquement au tube de verre par un petit caoutchouc. Ensuite, le tube était renversé et suspendu verticalement.

Comme contrôle, je prenais des tubes de mêmes dimensions, où j'introduisais la même quantité de sel solide et qu'ensuite je remplissais avec précaution d'eau bouillie. Lorsqu'on néglige le soin d'employer de l'eau préalablement bouillie, la dissolution du sel peut donner lieu au dégagement de bulles d'air, qui s'élèvent dans le tube et par suite altèrent l'expérience. On sait, en effet, que les solutions salines dissolvent moins facilement les gaz que ne le fait l'eau.

De cette manière, on peut se convaincre que, même lorsque l'expérience dure des mois entiers, la vitesse de diffusion, dans l'eau et dans des gelées aussi molles, ne diffère pas sensiblement. J'ai opéré, entre autres, sur du chromate potassique neutre diffusant dans l'acide silicique, et sur du sulfate de cuivre diffusant dans la gélatine, et j'ai conservé les tubes, dans une armoire obscure, depuis la mi-juillet jusqu'en novembre. Si, toutefois, la gelée contient une proportion d'eau beaucoup moindre, la diffusion y est notablement plus lente.

Lenteur de la diffusion. La diffusion est un mouvement qui, en apparence très rapide quand il s'agit de différences considérables dans le degré de concentration et de distances microscopiques, est en réalité extrêmement lent, lorsque les différences de concentration sont faibles et qu'on considère des distances un peu grandes. En colorant des préparations microscopiques, ou en faisant usage de réactifs sous le microscope, on serait très facilement tenté de croire que les phénomènes de diffusion, en général, se produisent avec une assez grande rapidité; aussi, pour l'explication de divers processus de la physiologie végétale, a-t-on attribué à la diffusion un rôle que, vu sa lenteur, elle ne saurait remplir en aucune façon [1]). Dans l'enseignement de cette science, il importe donc

[1]) Voir: *Ueber die Bedeutung der Circulation und der Rotation des Protoplasma für den Stofftransport in der Pflanze*, dans *Bot. Zg.* 1885, N°1 et 2.

beaucoup de rendre cette propriété de la diffusion aussi palpable que possible. Cela s'applique notamment à la diffusion dans les gelées, eu égard surtout à la théorie de M. Sachs sur le mouvement de l'eau dans les plantes; car cette théorie admet, pour les mouvements de l'eau d'imbibition dans le bois, une vitesse qui est d'un tout autre ordre que les vitesses dont l'eau ou les matières dissoutes, en se diffusant dans les gelées, à de si grandes distances, sont susceptibles.

C'est pour cette raison que, dans les expériences décrites, j'ai donné à mes tubes une longueur si considérable. Au début de l'expérience, à cause de l'emploi de sel solide, la différence de concentration est aussi grande que possible, et la hauteur que le sel atteint dans un laps de temps donné est relativement considérable. Peu à peu, naturellement, l'écart des concentrations diminue, et par suite la limite de la partie colorée s'élève de plus en plus lentement. Dans les deux tubes à chromate potassique neutre, le sel avait au bout de neuf jours atteint environ 16 cm. de hauteur, au bout de cinq semaines environ 30 cm., et au bout de trois mois environ 50 cm. Dans les tubes à sulfate de cuivre, la hauteur, à la fin des mêmes périodes, était respectivement de 6, 13 et 18 cm. Dans aucun de ces tubes le sel, à ce moment, n'était encore entièrement dissous.

Lorsque dans ces expériences on n'emploie pas du sel solide, mais une solution peu concentrée, la hauteur d'ascension, dans le temps donné, est naturellement encore moindre. Il est alors nécessaire, toutefois, de modifier légèrement l'expérience, point sur lequel je reviendrai tout à l'heure.

Pour donner une idée de la lenteur de la diffusion, M. Stephan [1]) a calculé, au moyen des résultats des expériences de Graham, combien de temps il faudrait à 1 milligramme de matière dissoute pour diffuser, d'une solution à 10 pour cent, dans l'eau, par un tube vertical, exactement à la hau-

---

[1]) *Sitz.-ber. d. k. Akad. Wien*, 1879; Bd. 79, II Abth., p. 214.

teur de 1 mètre; en d'autres termes, après combien de temps tout juste 1 milligramme se serait élevé, de la solution en question, jusqu'à la hauteur de 1 mètre, ou plus. Il a trouvé que ce temps serait de 319 jours pour le chlorure de sodium, de 2 ans et 7 mois pour le sucre de canne, et d'environ 14 ans pour l'albumine. De quels énormes espaces de temps les matières dissoutes auraient-elles donc besoin pour parcourir leurs trajets dans les arbrisseaux et les arbres, si ce mouvement devait avoir lieu uniquement par diffusion!

Comparaison des vitesses de diffusion de différentes matières. Les recherches de Graham nous ont appris que les acides diffusent plus rapidement que leurs sels, et que, chez ces derniers, la vitesse de diffusion varie suivant la nature de la base. Les sels potassiques diffusent plus rapidement que les sels des terres alcalines. Pour illustrer ces règles par un exemple, j'ai fait l'expérience suivante. Deux tubes de plus de 0m,50 de longueur, entièrement remplis, de la manière ci-dessus décrite, d'acide silicique gélatineux, furent introduits, renversés, dans deux flacons, dont l'un contenait une solution d'acide chromique, l'autre une solution de chromate potassique neutre. Chaque solution avait un volume de 250 cc et une concentration de 0,1 équiv.; toutes les deux renfermaient donc un même nombre de molécules. Les flacons étaient fermés par un bouchon, en partie pour maintenir les tubes, en partie pour prévenir l'évaporation des solutions.

Peu à peu, le sel et l'acide s'élevèrent dans la gelée, et après quelque temps la différence de vitesse se voyait nettement. Au bout de deux mois, la gelée était colorée par l'acide jusqu'à la hauteur d'environ 33 cm., tandis que dans l'autre tube le sel ne s'était élevé approximativement qu'à 28 cm. Environ deux mois plus tard, la différence était devenue notablement plus grande et plus distincte, mais la limite de la coloration était si peu tranchée, que la hauteur ne se laissait plus guère évaluer en chiffres. Dans ces expériences, le volume des solutions était si grand par rapport à celui de la gelée,

qu'on peut complètement négliger la diminution de concentration des premières, pendant la durée de l'expérience.

Influence de la pesanteur sur la diffusion. Pour l'interprétation exacte de divers processus de la vie des plantes, il est nécessaire de savoir que la pesanteur n'a pas d'influence sur la diffusion, que celle-ci s'opère donc avec la même vitesse, soit de haut en bas, soit de bas en haut. Cette proposition, à peine démontrable sans l'emploi d'une gelée, se laisse au contraire mettre très facilement en évidence par l'intervention d'une pareille substance. A cet effet, en même temps que le tube ci-dessus décrit, à acide silicique et chromate potassique solide, j'en ai préparé un second, exactement pareil, que j'ai suspendu à côté de lui, mais où maintenant le sel se trouvait en haut, la gelée en bas. Pendant trois mois, j'ai examiné ces tubes à peu près de semaine en semaine; au commencement, il existait entre eux une petite différence, mais qui disparut peu à peu. La différence était au désavantage du second tube, et elle ne pouvait donc être attribuée à la pesanteur.

Comparaison des vitesses de diffusion de différentes matières au moyen de la formation d'un précipité dans la gelée. Si l'on remplit de gelée un tube ouvert aux deux côtés, et qu'on la mette en contact par les deux extrémités avec deux solutions, susceptibles de donner ensemble un précipité, ce précipité se formera, au bout de quelque temps, là où les deux matières dissoutes se rencontrent dans la gelée. Toutes les circonstances étant supposées les mêmes aux deux côtés, les chemins parcourus par les deux matières seront la mesure de leurs vitesses relatives. Remplace-t-on, dans une seconde expérience, l'un des sels par un autre, qui donne avec la seconde matière le même précipité, alors les deux expériences, comparées entre elles, feront connaître la vitesse relative des deux sels employés.

Si, après l'apparition des premières traces de précipité, on laisse continuer l'expérience, la production ultérieure du précipité n'a lieu, naturellement, que du côté de la combinaison qui se diffuse le plus lentement, et le point où le précipité a

commencé à se former reste donc toujours nettement marqué.

J'ai, par exemple, fait diffuser de cette manière différents sulfates à l'encontre du chlorure de baryum, et j'ai comparé la vitesse de diffusion de l'acide sulfurique avec celles du sulfate de potasse, du sulfate de soude et du sulfate de magnésie. Il se formait toujours, droit à travers la gelée, une épaisse couche de sulfate de baryte, de sorte que l'endroit où avait eu lieu la rencontre des deux matières était bien accusé. Après avoir enlevé par l'eau les portions de sel qui ne s'étaient pas encore précipitées réciproquement, on pouvait conserver indéfiniment les tubes dans l'eau, pour montrer le précipité formé, à différentes hauteurs, dans les différents tubes. La disposition de ces expériences n'étant toutefois, en ce moment, pas encore assez parfaite pour donner des résultats satisfaisants sous tous les rapports, je ne la décris pas en détail, mais me borne à en communiquer le principe. Peut-être pourra-t-on fonder sur ce principe une méthode propre à comparer entre elles les vitesses de diffusion, même celles des composés incolores.

Sur la relation entre la vitesse de diffusion, le coefficient isotonique et la vitesse d'écoulement par les tubes capillaires. Qu'il me soit permis, avant de terminer cette Note, de présenter quelques considérations pouvant contribuer à la juste appréciation des vitesses relatives de diffusion des différentes matières.

Graham a déterminé les vitesses de diffusion relatives, pour un grand nombre de matières, avec une exactitude suffisante pour qu'il soit possible de comparer ces vitesses avec d'autres propriétés des mêmes matières. Ses résultats ont été contrôlés suivant différentes méthodes par plusieurs auteurs, et, en substance, ils ont toujours été confirmés. Pour rendre ses comparaisons autant que possible indépendantes de l'influence de la concentration, il choisit le degré de concentration le plus faible qui fût compatible avec une analyse précise des liquides à la fin des expériences, savoir, 2 pour cent. Dans ses Mé-

moires il indique aussi combien de temps il fallait à chaque combinaison, dans les mêmes circonstances, pour qu'une même quantité de matière passât du vase à diffusion dans l'eau ambiante, et il calcule les rapports de ces temps, en prenant pour unité celui employé par l'hydrate de potasse. Les chiffres ainsi obtenus sont les temps de diffusion (*times of equal diffusion*) ci-dessous mentionnés.

Il a ainsi reconnu, que les nombreuses matières étudiées se laissaient ranger en un nombre relativement petit de groupes, dans chacun desquels la vitesse de diffusion est à peu près la même pour tous les membres du groupe. Nulle part, toutefois, Graham ne donne un tableau général de ces groupes; on est obligé d'aller les chercher dans les différents Mémoires qu'il a publiés dans les *Philosophical Transactions* de 1850 et 1851, et telle est probablement la raison pour laquelle ses résultats sont restés assez peu connus.

Compare-t-on ces groupes, d'une part avec les coefficients isotoniques, d'autre part avec le frottement interne que les solutions éprouvent en traversant des tubes capillaires, on trouve qu'il existe, dans les deux cas, une connexion manifeste.

Commençons par les coefficients isotoniques, tels qu'ils ont été déterminés en partie par moi-même, en partie par M. Hamburger dans le laboratoire de M. le professeur Donders [1]), et bornons-nous aux groupes pour les membres desquels ces coefficients sont connus, soit par les expériences, soit par le calcul [2]).

---

[1]) Voir: *Eine Methode zur Analyse der Turgorkraft*, dans les *Jahrbücher für wissensch. Botanik* de M. Pringsheim, t. XIV, p. 537, et:

Dr. H. J. Hamburger, *De invloed van scheikundige verbindingen op bloedlichaampjes in verband met hare moleculair-gewichten*, dans *Onderzoekingen v. h. physiol. Lab. te* Utrecht, *uitgegeven door* Donders *en* Engelmann, 3e Sér., t. IX, p. 26.

[2]) Pour les acides et les bases inorganiques, les coefficients isotoniques ne pouvaient être déterminés par les méthodes actuelles. Graham a trouvé pour le temps de diffusion de l'acide nitrique, de l'acide chlorhydrique, de l'acide bromhydrique et de l'acide iodhydrique environ 0,8, pour celui de l'hydrate de potasse et de l'ammoniaque 1, pour celui de l'hydrate de soude 1,2 (*Ph. T.*, 1850, p. 33, 807, 808, 810, 814, e 1851, p. 484, 485).

Les groupes dont il s'agit sont les suivants:

Ier *Groupe. Sels potassiques et ammoniques des acides monobasiques.* Temps de diffusion = 1,4. Ce groupe comprend principalement les matières suivantes:

Chlorure de potassium [2]).
Bromure de potassium [1]).
Iodure de potassium [1]).
Chlorure d'ammonium [1]) [2]).
Nitrate de potasse [2]).
Nitrate d'ammoniaque [2]).
Chlorate de potasse [2]).

Le fait, que le sel potassique et le sel ammonique du même acide ont la même vitesse de diffusion, a été confirmé postérieurement par M. Marignac [3]), et celui de l'égalité de vitesse de K Cl, K Br. et K I, par M. Long [4]).

Le coefficient isotonique est pour toutes ces matières le même, savoir = 3. Les deux chlorures et le nitrate de potasse ont été étudiés par moi-même, l'iodure et le bromure de potassium par M. Hamburger (*l. c.* p. 32).

IIe *Groupe. Sels sodiques des acides monobasiques.* Temps de diffusion = 1,7. Ce groupe comprend:

Nitrate de soude.
Chlorure de sodium.
Bromure de sodium.
Iodure de sodium.

Le coefficient isotonique de tous ces sels est = 3, pour les deux derniers d'après les déterminations de M. Hamburger.

---

[1]) *Ph. T.*, 1850, p. 829—831.
[2]) *Ph. T.*, 1850, p. 33.
[3]) *Bibl. univ.*, Nouv. pér., t. L, 1874, p. 8.
[4]) Pogg. *Ann. Phys.* (2), t. IX, p. 613.
[5]) *Ph. T.*, 1850, p. 45.
[6]) *Ph. T.*, 1850, p. 827—830.

III[e] *Groupe. Sels potassiques et ammoniques des acides bibasiques.* Temps de diffusion = 2. Ce groupe comprend:

Sulfate de potasse [2]).
Sulfate d'ammoniaque [1]).
Chromate de potasse [1])
Carbonate de potasse [1]).
Sulfite de potasse [2]).
Oxalate de potasse [2]).
Tartrate de potasse [2]).

Le coefficient isotonique n'a été déterminé directement que pour le premier et les deux derniers de ces sels, mais, d'après les règles applicables à ces coefficients, il est le même pour tous, savoir = 4.

IV[e] *Groupe. Sels sodiques des acides bibasiques.* Temps de diffusion = 2,45. Ce groupe comprend:

Sulfate de soude [3]).
Sulfite de soude [3]).
Carbonate de soude [3]).
Oxalate de soude [4]).
Tartrate de soude [4]).

Tous ces sels ont, d'après la règle des coefficients isotoniques, le coefficient 4.

V[e] *Groupe. Sels de métaux bivalents et d'acides monobasiques.* Temps de diffusion le même que dans le groupe précédent. Il comprend les chlorures et les nitrates des métaux: calcium, magnésium, baryum, strontium, zinc, cuivre, manganèse etc. [5]). Parmi ces sels, le chlorure de magnésium et le chlorure

---

[1]) *Ph. T.*, 1850, p.31.
[2]) *Ph. T.*, 1851, p.487–494.
[3]) *Ph. T.*, 1850, p.42, et 1851, p. 488—492.
[4]) *Ph. T.*, 1851, p.490 et 492.
[5]) *Ph. T.*, 1850, p.816—821.

de calcium ont un coefficient isotonique égal à celui du groupe précédent (=4), et il en est probablement de même des autres.

VI[e] *Groupe. Sels de métaux bivalents et d'acides bibasiques.* Temps de diffusion = 4. Ce groupe comprend:

Sulfate de magnésie [1]).
Sulfate de zinc [1]).

Le coefficient isotonique a été trouvé, pour le sulfate de magnésie, = 4.

VII[e] *Groupe. Composés organiques, ne contenant pas de métal.* Temps de diffusion le même que dans le groupe VI. Graham l'a déterminé pour le sucre de canne [2]); d'après M. Voit, le sucre de raisin possède à peu près la même vitesse de diffusion que le sucre de canne [3]). Le coefficient isotonique de ces deux matières est le même que celui du groupe précédent.

Si nous réunissons maintenant, en un petit tableau, d'une part les temps de diffusion de ces sels neutres et de ces matières organiques, d'autre part leurs coefficients isotoniques, nous avons:

		Temps de diffusion.	Coeff. isoton.
Groupe	I Sels de K et de NH_4 à ac. monob.	1,4	3
„	II „ „ Na „ „ „	1,7	3
„	III „ „ K et de NH_4 „ „ bibas.	2	3
„	IV „ „ Na „ „ „	2,45	4
„	V „ „ métaux bival. et d'ac. monob.	2,45	4
„	VI „ „ „ „ „ „ bibas.	4	2
„	VII „ Composés organ. ne cont. pas de métal	4	2

---

[1]) *Ph. T.*, 1850, p.45, 822 et 823.
[2]) *Ph. T.*, 1850, p.8.
[3]) Pogg. *Ann.*, t. CXXX, 1867, p. 421.

Il résulte de ce tableau que *les membres d'un même groupe ne possèdent pas seulement la même vitesse de diffusion, mais aussi le même coefficient isotonique.* Mais le rapport de ces deux valeurs n'est nullement le même pour les différents groupes.

Comparons maintenant la vitesse de diffusion avec la vitesse du mouvement dans les tubes capillaires, et prenons à cet effet les chiffres trouvés par M. Hannay au moyen de son *microrhéomètre* [1]).

Dans le tableau suivant sont mentionnés un certain nombre de matières dont les temps de diffusion ont été déterminés par Graham, et les temps d'écoulement à travers un tube de verre capillaire par M. Hannay. Dans la colonne *Temps de diff.* on trouve les premières de ces valeurs, dans la colonne *Microrhéose* l'accélération (—) ou le retard (+) que l'eau éprouve, en traversant un tube capillaire, lorsqu'elle tient en dissolution 1 équiv. de la matière indiquée [2]). La vitesse d'écoulement de l'eau, dans l'appareil de Hannay, était de 131,3 sec.

Matières.	Temps de diff.	Microrhéose.
Nitrate d'ammoniaque	1,4	— 5,8 sec.
„ de potasse	„	— 4,9 „
Chlorure d'ammonium	„	— 3,2 „
„ de potassium	„	— 2,3 „
Nitrate de soude	1,7	+ 6,6 „
Chlorure de sodium.	„	+ 9,4 „
Sulfate d'ammoniaque	2,0	+ 11,2 „
„ de potasse	„	+ 12,3 „
„ „ soude	2,45	+ 24,0 „
„ „ magnésie	4	+ 40,6 „

[1]) J. B. Hannay, *Phil. Trans.*, 1879, p. 283.

[2]) Le calcul de la vitesse de diffusion est indépendant de la question de savoir si la concentration est donnée en centièmes, en équivalents ou en molécules. Lorsque les chiffres donnés ci-dessus, relatifs à la microrhéose, sont recalculés en molécules, l'ordre de succession reste le même.

Pour les matières en question, on peut donc admettre comme règle qu'une diffusion plus lente est associée à une valeur plus élevée du frottement interne, tel qu'on le mesure par l'écoulement à travers un tube capillaire. Il est tout naturel, du reste, que le frottement interne soit un des facteurs qui déterminent la vitesse de la diffusion.

Outre l'attraction des matières dissoutes sur l'eau, telle que l'expriment les coefficients isotoniques, et le frottement que les molécules éprouvent dans leur mouvement au sein du liquide, plusieurs autres facteurs, il est à peine besoin de le dire, exerçent une influence sur la vitesse de diffusion. Mais je n'ai pas l'intention d'essayer ici une analyse approfondie de ce phénomène si complexe.

SUR LA CONSTRUCTION DE COURBES UNICURSALES PAR POINTS ET TANGENTES,

PAR

P. H. SCHOUTE.

---

1. Si P est un point quelconque du plan d'un triangle A B C, et que les droites menées de ce point aux sommets A, B, C coupent les côtés opposés aux points P_a, P_b, P_c, on a, d'après le théorème du marquis de Céva, la relation

$$\frac{B P_a}{C P_a} \cdot \frac{C P_b}{A P_b} \cdot \frac{A P_c}{B P_c} = -1.$$

Si Q_a, Q_b, Q_c ont la même signification pour un autre point Q du plan, on a donc pareillement

$$\frac{B Q_a}{C Q_a} \cdot \frac{C Q_b}{A Q_b} \cdot \frac{A Q_c}{C Q_c} = -1,$$

relation qui, combinée avec la précédente, donne la nouvelle relation

$$\left(\frac{B P_a}{C P_a} : \frac{B Q_a}{C Q_a}\right) \cdot \left(\frac{C P_b}{A P_b} : \frac{C Q_b}{A Q_b}\right) \cdot \left(\frac{A P_c}{B P_c} : \frac{A Q_c}{B Q_c}\right) = 1,$$

ou, suivant la notation connue des rapports anharmoniques,

$$(B\, C\, P_a\, Q_a)\, (C\, A\, P_b\, Q_b)\, (A\, B\, P_c\, Q_c) = 1.$$

Lorsque P et Q sont situés dans le plan du triangle A B C, le produit des trois susdits rapports anharmoniques est donc l'unité. Réciproquement, lorsque P est un point du plan du triangle A B C, et que le produit de ces trois rapports anharmo-

niques est l'unité, les points Q_a, Q_b, Q_c, dont deux peuvent être pris arbitrairement, fourniront trois droites A Q_a, B Q_b, C Q_c passant par un point Q du plan du triangle A B C.

Si ensuite, dans un autre plan, on suppose donnés un triangle A′ B′ C′ et un point P′, et que les droites joignant ce point aux sommets A′, B′, C′ coupent les côtés opposés du triangle en P'_a, P'_b, P'_c, les trois conditions

$$\left.\begin{array}{l}(B\,C\,P_a\,Q_a) = (C'\,B'\,P'_a\,Q'_a)\\ (C\,A\,P_b\,Q_b) = (A'\,C'\,P'_b\,Q'_b)\\ (A\,B\,P_c\,Q_c) = (B'\,A'\,P'_c\,Q'_c)\end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \mathrm{I)}$$

déterminent sur les côtés du triangle A′ B′ C′ trois points Q'_a, Q'_b, Q'_c, pour lesquels les droites A Q'_a, B′Q'_b, C′Q'_c passent par un point Q′ du plan de ce triangle. Car, le produit des trois premiers membres étant, d'après ce qui précède, l'unité, le produit des trois seconds membres est également l'unité; d'où, en vertu de la proposition réciproque indiquée, il résulte que A′ Q'_a, B′ Q'_b, C′ Q'_c passent par un même point.

Le plan qui contient le triangle A B C étant appelé le plan Σ et celui qui contient le triangle A′ B′ C′ le plan Σ', on n'a qu'à se figurer outre ces triangles les points P et P′ fixes, pour voir, dans ce que nous venons de prouver, une relation qui à chaque point arbitraire Q de Σ fait correspondre un point déterminé Q′ de Σ' et réciproquement à chaque point arbitraire Q′ de Σ' un point déterminé Q de Σ. Même lorsque les deux plans s'appliquent l'un sur l'autre, cette correspondance n'en subsiste pas moins entre les points Q et Q′ des deux systèmes plans Σ et Σ', dont alors ce plan est le porteur. Il va sans dire, que ce cas présente la particularité qu'à chaque point quelconque du plan correspondent deux points différents, puisque le point arbitrairement choisi peut aussi bien être attribué au système plan des points Q qu'au système plan des points Q′.

A la règle, qu'à un point déterminé Q correspond un point déterminé Q′ et réciproquement, les points A, B, C du système

Σ et les points A′, B′, C′ du système Σ' font exception. Si en effet on suppose que Q se trouve en A, Q_a est indéterminé, tandis que Q_b et Q_c coïncident avec A. Mais la substitution de ces résultats dans les trois conditions I) montre, que Q'_a est également indéterminé et que Q'_b se confond avec C′, Q'_c avec B′. Ainsi, des droites $A'Q'_a$, $B'Q'_b$, $C'Q'_c$, dont l'intersection doit fournir le point Q′, la première est indéterminée et les deux autres coïncident avec B′C′. Le point A ne correspond donc pas à un point unique, mais à tous les points de la droite B′C′; en général à chacun des sommets d'un des deux triangles ABC et A′ B′ C′ correspond celui des côtés de l'autre triangle qui, dans ce triangle, est opposé au sommet désigné par la même lettre; toujours en supposant quand Σ et Σ' se trouvent dans le même plan, que le sommet considéré soit attribué au système auquel appartient le triangle dont ce sommet fait partie. Pour caractériser ces éléments exceptionnels on parle des *points fondamentaux* A, B, C du système Σ et des *points fondamentaux* A′, B′, C du système Σ'; en même temps la droite qui correspond à un point fondamental est appelée la *droite fondamentale* de ce point, et les triangles A B C et A′B′C′ prennent le nom de *triangles fondamentaux* de Σ et Σ'.

D'après ce qui précède, la cause par laquelle le point fondamental A ne correspond pas à un point unique Q′, mais à une droite fondamentale B′ C′ composée de points Q′ tout entière, c'est la circonstance que la direction de la droite A Q est indéterminée lorsque Q se trouve en A; de sorte qu'on ne saurait plus indiquer le point d'intersection Q_a de cette droite et de B C. Car par cette raison la première condition I) laisse indéterminé le point Q'_a et la droite indéterminée $A'\,Q'_a$ peut couper la droite B′ C′, qui représente en même temps la droite $B'Q'_b$ et la droite $C'\,Q'_c$ des deux autres relations I), en tous les points de celle-ci. Toutefois, si l'on sait non seulement que Q coïncide avec A, mais encore dans quelle direction Q est arrivé en A, le point Q_a, et en même temps le point Q'_a, est connu,

de sorte que pour l'intersection de $A'Q'_a$ et $B'C'$ on trouve un point déterminé. On peut donc dire que les différents points de la droite $B'C'$ correspondent aux points situés dans différentes directions autour de A à une distance infiniment petite de A, de telle sorte qu'à un point déterminé Q' de $B'C'$ correspond un point Q, qui va coïncider avec A dans une direction déterminée et réciproquement, tandis qu'au point A lui-même correspond encore la droite $B'C'$ tout entière. Et ce qui est vrai de A et de $B'C'$ s'applique de la même manière à chaque point fondamental et à sa droite fondamentale.

Lorsque Q est situé en P, Q' est situé en P'; les points P et P', qui avec les points fondamentaux ont déterminé la correspondance, sont donc des points homologues. Ce couple de points PP', qui a servi à définir la correspondance, ne se distingue sous aucun rapport de tout autre couple; en réalité, il peut être remplacé dans les conditions I) par un couple de points quelconque. Car, si RR' désigne un nouveau couple de points, les trois conditions $I_{p,q}$) relatives aux couples de points PP', QQ' et les trois conditions $I_{p,r}$) relatives aux couples PP', RR' mènent immédiatement aux conditions correspondantes $I_{q,r}$), qui prouvent que RR' est aussi un couple de points de la correspondance déterminée par les points fondamentaux et par le couple de points QQ' [1]).

---

[1]) Si x_p, y_p, z_p sont les coordonnées normales du point P par rapport au triangle ABC pris pour triangle de référence, c'est-à-dire si x_p est la perpendiculaire abaissée de P sur BC, cette perpendiculaire étant comptée positive pour un point P situé du même côté de BC que A et négative pour un point P situé par rapport à A du côté opposé de BC, etc., on trouve, les longueurs des côtés BC, CA, AB étant représentées par a, b, c, immédiatement $\frac{BP_a}{CP_a} = -\frac{cz_p}{by_p}$ etc., et par conséquent, avec la même notation pour Q, également $\frac{BQ_a}{CQ_a} = -\frac{cz_q}{by_q}$ etc. Donc si l'on considère x_p, y_p, z_p comme des constantes, x_q, y_q, z_q comme des variables, et qu'on agisse de même pour les coordonnées x'_p, y'_p, z'_p de P' et

2. Lorsque dans les conditions I) les rapports anharmoniques $\frac{BP_a}{CP_a} : \frac{BQ_a}{CQ_a}$, etc. des tétrades de points situés sur les côtés des triangles ABC et A'B'C' sont remplacés par les rapports anharmoniques $\frac{\mathit{Sin}\, BAP}{\mathit{Sin}\, CAP} : \frac{\mathit{Sin}\, BAQ}{\mathit{Sin}\, CAQ}$, etc. des tétrades de droites qui joignent ces points aux sommets opposés des triangles, ces conditions se changent en celles-ci

$$\left.\begin{array}{l} A(BCPQ) = A'(C'B'P'Q') \\ B(CAPQ) = B'(A'C'P'Q') \\ C(ABPQ) = C'(B'A'P'Q') \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots \text{II}),$$

qui de nouveau sont liées de telle sorte, que chacune d'elles est une conséquence des deux autres. Sous cette forme, ces relations démontrent immédiatement qu'à une droite arbitraire de points Q correspond une section conique de points Q' passant par A', B', C' et réciproquement, qu'à une droite arbitraire de points Q' correspond une conique de points Q passant par A, B, C. En effet, si le point Q parcourt

---

x'_q, y'_q, z'_q de Q' par rapport au triangle A'B'C', les relations I) se transforment immédiatement en

$$xx' = \lambda, \quad yy' = \mu, \quad zz' = \nu, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{I}^a)$$

où les indices q ont été omis. En passant de ces équations mises dans la forme

$$\alpha xx' = \beta yy' = \gamma zz' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{I}^{a'})$$

aux coordonnées proportionnelles, en prenant pour unités dans Σ les coordonnées de P', dans Σ' celles de P', on trouve plus simplement encore

$$xx' = yy' = zz',$$

ou

$$x : y : z = \frac{1}{x'} : \frac{1}{y'} : \frac{1}{z'} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{I}^{a''})$$

De cette dernière relation découle algébriquement tout ce qui, ci-dessus, a été obtenu géométriquement.

Envisagés à ce point de vue, les points homologues P et P' prennent le nom de *points d'unité* des systèmes plans Σ et Σ'.

une droite donnée, les faisceaux de rayons A Q et B Q sont perspectifs, tandis que d'après la première des conditions II) les faisceaux de rayons A Q et A′ Q′ et d'après la seconde des conditions II) les faisceaux de rayons B Q et B′ Q′ sont projectifs; par conséquent, les faisceaux de rayons A′ Q′ et B′Q′ sont également projectifs et le lieu géométrique des points Q′ est une conique passant par A′ et B′. Mais cette conique passe aussi par C′; car, si l'on s'était servi des faisceaux de rayons A Q et C Q, on aurait trouvé pour le lieu géométrique du point corespondant Q′ une conique passant par A′ et C′, d'après la première et la troisième des relations II). De la même manière on démontre que réciproquement à une droite quelconque de points Q′ correspond une conique de points Q passant par A, B, C.

Toute correspondance de deux systèmes plans Σ et Σ', caractérisée par la propriété qu'à un point arbitraire Q du système Σ correspond un point déterminé Q′ du système Σ' et réciproquement à un point arbitraire Q′ du système Σ' un point déterminé Q du système Σ, est désignée sous le nom de transformation birationnelle ou, d'après le mathématicien qui s'en est occupé le premier, de transformation de Cremona [1]). Ces transformations birationnelles se classifient d'après le degré de la courbe de points d'un des systèmes qui correspond à une droite arbitraire de points de l'autre système. Pour cette classification on n'a à tenir compte que d'une seule grandeur,

[1]) Les mémoires de Cremona, relatifs à cette question, ont pour titre: „*Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane*" (*Mem. Accad. Bologna*, 1863 e 1865) et „*Sulle trasformazioni razionali nello spazio*" (*Annali di Matem. pura ed applicata* 1872). On peut consulter en outre: pour le plan, Clebsch, „*Vorlesungen über Geometrie*" par Lindemann, p. 478, où l'on trouve l'indication d'autres travaux, entre autres de l'excellent exposé du colonel du génie Dewulf (*Bulletin des sciences math. et astron.*, 1e *Série*, *Tome* V, *pag*. 200), et pour l'espace, Cayley, „*On the rational transformation between two spaces*" (*Proceedings of the Lond. Math. Society*, *Volume* 3) et Noether „*Ueber Flächen welche Schaaren rationaler Curven besitzen*" (*Mathem. Annalen*, *Band* 3).

parce que le degré de la courbe du système Σ, qui correspond à une droite arbitraire du système Σ', est toujours égal au degré de la courbe du système Σ', qui correspond à une droite arbitraire du système Σ. Si, en effet, à une droite arbitraire l de Σ correspond une courbe du degré n de Σ', cette courbe est coupée par une droite arbitraire l' de Σ' en n points Q′; par conséquent, la courbe de Σ qui correspond à l' a n points Q situés sur l, c'est-à-dire que cette courbe de Σ, qui correspond à l' de Σ', est également du degré n.

Après la transformation birationnelle du premier degré, c.à.d. la collinéation ou l'homographie, qu'à l'aide des relations

$$A\,(B\,C\,P\,Q) = A'\,(B'\,C'\,P'\,Q'),$$
$$B\,(C\,A\,P\,Q) = B'\,(C'\,A'\,P'\,Q'),$$
$$C\,(A\,B\,P\,Q) = C'\,(A'\,B'\,P'\,Q'),$$

presque entièrement conformes à II), on obtient exactement de la manière ci-dessus indiquée, la transformation birationelle du second degré, dont je vais donner une déduction géométrique simple, est la plus importante. Ordinairement elle est désignée sous le nom de transformation quadratique.

A leur tour les droites qui passent par un ou deux des points fondamentaux font exception à la règle, qu'à une droite déterminée de points Q correspond une conique de points Q′ passant par A′, B′, C′ et à une droite déterminée de points Q′ une conique de points Q passant par A, B, C. Lorsqu'une droite l de points Q passe par A, le rapport anharmonique A (B C P Q) de la première relation II) est le même pour tous les points Q de l qui ne coïncident pas avec A, d'où il suit que le rapport anharmonique A′ (C′ B P′ Q′) est également constant, et que par conséquent le lieu géométrique du point correspondant Q′ est une droite l' passant par A′. Parce qu'au point A de l correspond la droite entière B′C′, on peut se représenter la combinaison de la droite l' par A′ à la droite B′ C′ comme la conique par A′, B′, C′ qui correspond à l, et admettre que la conique par A′, B′, C′ qui correspond à l se réduit à une droite l', parce que B′ C′ s'en détache comme

partie impropre. De cette manière on reconnaît aussi, qu'à la droite A B passant par deux points fondamentaux ne peut pas correspondre un lieu géométrique de points Q', parce que de la section conique correspondante par A', B', C' se détachent comme parties impropres les deux droites B' C' et C' A'; etc.

La considération des parties impropres des courbes correspondantes, qui vient d'être appliquée, constitue une ressource indispensable pour la recherche de la nature de la courbe en Σ' qui correspond à une courbe donnée en Σ. Parce qu'une courbe quelconque C^n du degré n en Σ est coupée en $2n$ points par la conique passant par A, B, C de Σ qui correspond à une droite quelconque l' de Σ', cette droite l' de Σ' aura également $2n$ points communs avec la courbe de Σ' qui correspond à C^n, et cette courbe sera donc du degré $2n$. Parce que C^n est coupée en n points par chacun des côtés du triangle A B C, la courbe trouvée C'^{2n} de Σ' aura des points multiples de l'ordre n aux points A', B', C'. Mais ce cas général se modifie dès que la courbe supposée passe une ou plusieurs fois par un des points A, B, C; chaque fois que la courbe C^n passe par un des trois points fondamentaux, la droite fondamentale correspondante se détache de C^{2n}. Si donc la courbe donnée C^n passe α fois par A, β fois par B et γ fois par C, la courbe correspondante de Σ' — qui, jointe à α fois la droite B'C', à β fois la droite C'A' et à γ fois la droite A'B', forme une courbe du degré $2n$, à points multiples de l'ordre n en A', B', C' — est une courbe du degré $2n - (\alpha + \beta + \gamma)$, ayant en A' un point multiple de l'ordre $n - \beta - \gamma$, en B' un point multiple de l'ordre $n - \gamma - \alpha$, et en C' un point multiple de l'ordre $n - \alpha - \beta$. En posant $n = 2$ nous trouvons qu'à une conique quelconque C^2 de Σ correspond en Σ' une courbe du quatrième degré à trois points doubles A', B', C'; qu'à une conique C^2 passant par A se rapporte une courbe du troisième degré, qui passe une fois par B' et C' et deux fois par A'; qu'avec une conique C^2 passant par A et B concorde une conique passant par A' et B'; enfin, qu'une conique C^2 passant par A, B, C conduit à une

droite qui ne passe par aucun des trois points A′, B′, C′.

Aux points multiples A, B, C de la courbe de Σ', qui correspond à la courbe donnée C^n de Σ, il se présente encore des particularités en deux cas différents. Tandis que les $n-\beta-\gamma$ branches passant par A′ auront des tangentes différentes dans le cas général où C^n coupe la droite B C en dehors de B et C en $n-\beta-\gamma$ points, et que parmi ces branches il y en aura autant de réelles qu'il se trouve de points réels parmi ces $n-\beta-\gamma$ intersections de B C et de C^n, en premier lieu deux ou plusieurs de ces tangentes coïncideront, chaque fois que deux ou plusieurs des $n-\beta-\gamma$ points d'intersection de C^n et de B C se comportent de cette manière. C'est ainsi qu'à une conique, qui est tangente aux trois côtés du triangle A B C, correspond une courbe du quatrième degré à trois points de rebroussement. Et tandis qu'en général chacune de ces $n-\beta-\gamma$ tangentes a en A′ deux points communs avec la branche qu'elle touche, cette branche aura, en second lieu, un point d'inflexion en A′, lorsque la droite qui joint A au point correspondant d'intersection de C^n et de B C touche la courbe C^n en ce dernier point. C'est ainsi qu'à une conique de Σ, dont le triangle A B C est un triangle autopolaire, correspond en Σ' une courbe très remarquable du quatrième degré, ayant en A′, B′, C trois points doubles, formés chacun par l'intersection de deux branches, qui possèdent en ce point un point d'inflexion [1]).

---

[1]) Par rapport à cette courbe on peut consulter

Dr C. Beyel „*Die Curven vierter Ordnung mit drei doppelten Inflexionsknoten*" (*Zeitschrift für Mathematik und Physik*, t. XXX, 1885) et mes mémoires suivants

„*Over eene bijzondere kromme van den vierden graad met drie dubbelpunten*" (*Verslagen en mededeelingen der Koninkl. Akad. van Wetensch., Afd. Natuurkunde*, 2e série, t. 19, p. 420—431), mémoire dont le colonel du génie Ed. Dewulf a donné un résumé dans le „*Bulletin des sciences math. et astron.*", 2e série, t. VIII, p. 278;

„*Notiz über die Lemniscate*" (*Sitzungsberichte der K. Akad. der Wissensch. II. Abth. Dec-Heft, Jahrg.* 1883);

„*Die Curven vierter Ordnung mit drei Inflexionsknoten*" (*Archiv. der Mathematik*, t. II, 1885).

Si au commencement de cet article nous avons trouvé immédiatement qu'à une droite quelconque l' de Σ' correspond en Σ une conique passant par A, B, C, il ressort maintenant, du résultat obtenu postérieurement, qu'à chaque conique passant par A, B, C de Σ correspond une droite de Σ'. Ce dernier théorème se démontre encore de la manière suivante. Si C^2 est une conique quelconque passant par A, B, C, si Q_1 et Q_2 sont deux points arbitrairement choisis de cette courbe, et si à ces deux points de Σ correspondent en Σ' les points Q_1' et Q_2', il faut qu'à la droite $Q_1' Q_2'$ de Σ' corresponde une conique passant par A, B, C, Q_1, Q_2 de Σ. Or, cette conique doit se confondre avec la courbe C^2 supposée, puisque par cinq points il ne passe qu'une seule conique.

On entend dans le plan, sous le nom de faisceau de courbes, un système linéaire simplement infini de courbes, qui admet *une* courbe passant par un point arbitrairement choisi, et sous le nom de résau de courbes, un système linéaire doublement infini de courbes qui admet *une* courbe passant par deux points arbitrairement choisis. En outre, deux faisceaux sont dits projectifs, lorsqu'à une courbe quelconque de l'un des faisceaux correspond une courbe déterminée de l'autre faisceau et réciproquement; tandis qu'on ne peut conclure à la correspondance projective de deux réseaux que lorsque, indépendamment de l'homologie réciproque des courbes considérées une à une, on a démontré qu'à un faisceau de courbes de l'un des réseaux correspond toujours un faisceau de courbes de l'autre reseau et réciproquement. En l'appliquant à ce que nous venons de trouver par rapport à la transformation quadratique, il s'ensuit immédiatement qu'au réseau de droites de Σ correspond projectivement le réseau des coniques passant par A', B', C' de Σ' et réciproquement, qu'au réseau des droites de Σ' correspond projectivement le réseau des coniques passant par A, B, C de Σ.

La transformation quadratique dont il vient d'être question est la seule transformation quadratique possible. Lorsqu'en

effet à des droites de Σ correspondent des coniques de Σ', la correspondance des points Q et Q′ un à un exige que deux de ces coniques aient un seul point d'intersection se déplaçant avec ces coniques, cela étant le cas pour les droites de Σ. Or, il résulte de là que ces coniques passent par trois points fixes, etc.

3. Une transformation quadratique est dite involutive, lorsque les deux systèmes plans Σ et Σ' sont situés dans un même plan, et qu'à un point arbitraire de ce plan, considéré comme appartenant à chacun des deux systèmes, correspond un même point [1]). Nous allons chercher sous quelles conditions deux systèmes plans situés dans un même plan forment une transformation quadratique involutive.

Ainsi qu'on le reconnaît immédiatement, pour que deux systèmes plans Σ et Σ' en transformation quadratique soient involutifs, il faut avant tout que les triangles A B C et A′ B′ C′ des points fondamentaux coïncident. Cela peut évidemment se faire de trois manières différentes: en premier lieu, de telle sorte que chaque point fondamental de Σ coïncide avec le

[1]) En omettant le mot „quadratique" cette définition s'applique à toute correspondance birationnelle involutive. Une certaine correspondance birationnelle involutive du troisième ordre a été décrite par L. Saltel, vers 1872, dans différents journaux mathématiques belges, sous le nom de transformation arguésienne (d'après Desargues), et a été employée par lui à la construction théorique de différentes courbes. Postérieurement, M. R. de Paolis a traité, sous le nom de transformation conjuguée, d'une remarquable correspondance involutive dans son Mémoire: „*Le trasformazioni piane doppie*" (*Reale Acc. dei Lincei* 1876—77), correspondance que plus tard j'ai déduite d'une autre manière et étendue à l'espace (*Annuaire de l'Association française pour l'avancement des sciences*, *Congrès de Montpellier* 1879 *et Congrès de Reims* 1880). Ensuite, M. C. Le Paige, dans son Mémoire: „*Sur quelques transformations géométriques uniformes*" (*Bulletins de l'Académie de Belgique*, 1882) entre autres a donné deux transformations de ce genre, dont je me suis occupé ensuite dans un article „*Sur deux transformations géométriques uniformes*" (*Annuaire de l'Association française pour l'avancement des sciences*, *Congrès de Rouen*, 1883).

point fondamental de Σ', qui porte le même nom ; en second lieu, de façon que cette coïncidence des noms ne se présente que chez un couple de points fondamentaux des deux systèmes ; en troisième lieu, de façon qu'il n'y ait aucune coïncidence de points fondamentaux de même nom. Chacun de ces trois cas doit être examiné séparément.

Lorsque A′ coïncide avec A, B′ avec B, et C′ avec C, les conditions II) se transforment en

$$\left.\begin{aligned} A\,(B\,C\,P\,Q) &= A\,(C\,B\,P'\,Q') \\ B\,(C\,A\,P\,Q) &= B\,(A\,C\,P'\,Q') \\ C\,(A\,B\,P\,Q) &= C\,(B\,A\,P'\,Q') \end{aligned}\right\}, \quad \ldots\ldots \quad (\mathrm{II}^a)$$

qu'on peut écrire sous la forme

$$\left.\begin{aligned} A\,(B\,C\,P\,Q) &= A\,(B\,C\,Q'\,P') \\ B\,(C\,A\,P\,Q) &= B\,(C\,A\,Q'\,P') \\ C\,(A\,B\,P\,Q) &= C\,(A\,B\,Q'\,P') \end{aligned}\right\}. \quad \ldots\ldots \quad (\mathrm{II}^{a'})$$

Or, ces relations prouvent immédiatement que Q′ coïncide avec P lorsque Q coïncide avec P′, ce qui exprime précisément le caractère involutif de la transformation quadratique. Deux systèmes plans Σ et Σ', qui forment dans un même plan une transformation quadratique, se trouvent donc en involution lorsque les points fondamentaux de même nom des deux systèmes coïncident. A cette transformation je donne le nom d'*involution quadratique régulière*.

Dans l'involution quadratique régulière, à chaque droite passant par un point fondamental déterminé correspond doublement une droite passant par ce même point fondamental ; par conséquent, les couples de droites correspondantes passant par un point fondamental forment un faisceau de rayons en involution, dont les droites fondamentales passant par ce point fondamental sont un couple. Or, un point étant déjà déterminé comme intersection de deux droites, la correspondance est fixée par la détermination de deux des trois faisceaux de rayons en involution. C'est ainsi que deux faisceaux de rayons en involution avec les sommets A et B, choisis tout à fait arbitrairement, déterminent une involution quadratique

régulière, pour laquelle le point d'intersection des deux rayons correspondants à A B est le troisième point fondamental C. Les rayons doubles des deux faisceaux de rayons en involution se coupent en quatre points correspondants à eux-mêmes, également situés sur deux droites passant par C; par conséquent ces points sont les sommets d'un quadrangle complet, pour lequel A, B, C forment les points d'intersection des trois couples de côtés opposés. Evidemment la transformation peut être déterminée par les quatre points qui correspondent à eux-mêmes et à cette fin ces quatre points peuvent être choisis arbitrairement, pourvu qu'on ait soin que parmi ces quatre points il n'y en ait pas trois situés en ligne droite.

Chacun des quatre points qui correspondent à eux-mêmes et que j'appellerai les points S [1]), possède cette intéressante propriété, que toute courbe passant par ce point y touche sa courbe correspondante. En effet, si à chacune des droites passant par un point S déterminé on rapporte la tangente de la conique correspondante en ce point, on engendre deux faisceaux projectifs de rayons qui coïncident, parce qu'ils ont trois couples de rayons coïncidents, savoir les rayons S A, S B, S C. Cela démontre immédiatement la propriété énoncée.

Puisque l'involution quadratique régulière peut être déterminée par quatre points, soit qu'à cet effet on emploie A, B, C et un point S, soit qu'on fasse usage des quatre points S, les différentes transformations de cette rubrique ont entre elles ce rapport, que l'une peut toujours être considérée comme la projection centrale ou la perspective de l'autre. Car deux

---

[1]) Dans une transformation quadratique non involutive des deux systèmes plans Σ et Σ' situés dans un même plan, il y a également quatre points S correspondants à eux-mêmes. C'est ce qu'on trouve démontré dans le Mémoire intéressant: *„Das Strahlensystem vierter Ordnung, zweiter Klasse"* (*Journal für reine und angewandte Math.* t. 97, p. 147) de M. W. Stahl, où est étudié géométriquement le système des droites joignant entre eux les points correspondants des deux systèmes plans Σ et Σ' d'une transformation quadratique, situés dans des plans différents.

quadrangles peuvent toujours être regardés comme la projection centrale l'un de l'autre. Parmi ces transformations, celle-là surtout est remarquable, où le point S situé à l'intérieur du triangle A B C est le centre du cercle inscrit dans ce triangle, et où les autres points S, — parce que les droites fondamentales par un point fondamental, formant un couple des faisceaux de rayons en involution autour de ce point, séparent harmoniquement les rayons doubles de cette involution, — doivent être les centres des cercles ex-inscrits. Cette involution quadratique régulière, que j'ai décrite antérieurement comme la transformation par droites symétriques [1]), mérite également le nom d'involution quadratique hyperbolico-équilatère, parce que les trois faisceaux de rayons en involution A, B, C, tout comme le faisceau des diamètres conjugués d'une hyperbole équilatère, consistent en couples de rayons qui sont antiparallèles entre eux par rapport aux rayons doubles; elle établit un rapport simple entre différents points remarquables du triangle [2]).

Lorsque dans un plan sont données deux coniques C_1^2 et C_2^2, on peut rapporter à chaque point P du plan le point d'intersection P' des polaires p_1 et p_2 de P par rapport à C_1^2 et C_2^2. Il en résulte dans ce plan une transformation

---

[1]) „*Over een paar met elkaar samenhangende involutorische birationeele transformaties*" (*Nieuw Archief voor Wiskunde*, t. 9, p. 117—140), ou „*Deux cas particuliers de la transformation birationnelle*" (*Bulletin des sciences math. et astron.* 2e *Série*, *Tome* VI, *pages* 152—169 *et* 174—189). J'ai donné en outre sous le titre: „*Application de la transformation par droites symétriques à un problème de* Steiner" (*Bulletin des sciences math. et astron.*, 2e *Série*, *Tome* VII, *page* 314—324) une application de cette transformation.

Dans un très intéressant travail, intitulé „*Mémoire sur le tétraèdre*", M. J. Neuberg désigne cette correspondance sous le nom de transformation isogonale.

[2]) Voir un Mémoire de M. H. Brocard, intitulé: „*Nouvelles propriétés du triangle*" (*Annuaire de l'Association française pour l'avancement des sciences*, *Congrès de Rouen*, 1883).

involutive, qu'on reconnaît facilement pour une involution quadratique régulière Car si P parcourt une droite l, les deux polaires p_1 et p_2 engendreront autour des pôles L_1 et L_2 de l par rapport à C_1^2 et C_2^2 des faisceaux de rayons, qui sont projectifs à la ponctuelle P sur l et par conséquent aussi entre eux; donc le lieu géométrique des points correspondants P' est une conique passant par L_1 et L_2 et la correspondance des points P et P' est une involution quadratique. Et de celle-ci les sommets du triangle autopolaire commun à C_1^2 et à C_2^2 sont les points fondamentaux, ce qui fait voir que la relation des points P et P' est une involution quadratique régulière. Dans cette involution les intersections de C_1^2 et C_2^2 sont les points S correspondants à eux-mêmes. De sorte que réciproquement toute involution quadratique régulière peut être déduite de deux coniques ou, si l'on veut, d'un faisceau de coniques [1]); de cette manière l'involution hyperbolico-équilatère, par exemple, se rapporte à un faisceau d'hyperboles équilatères, d'après la situation des points S.

Lorsque les rayons doubles de l'un des deux ou des deux faisceaux de rayons en involution déterminants sont imaginaires, les quatre points S sont imaginaires. Mais la nouvelle considération, qui met l'involution quadratique régulière en rapport avec un faisceau de coniques, nous apprend qu'il y a même des involutions quadratiques régulières n'admettant qu'un seul point fondamental réel. En effet, si relativement à cette question de la réalité nous distinguons les trois cas différents où le nombre des points d'intersection réels de C_1^2 et C_2^2 est ou bien quatre, ou bien deux, ou bien zéro, nous savons par la théorie des coniques, que les cas premier et dernier conduisent à un triangle autopolaire commun aux deux coniques

---

[1]) „*Leçons sur la géométrie de position*" par le Dr. Th. Reye, traduites de l'allemand par O. Chemin, première partie, page 205, problèmes 61 et 62.

entièrement réel, et par conséquent à une involution quadratique régulière à trois points fondamentaux réels, ou à quatre points S réels, ou à quatre points S imaginaires; tandis que dans le second cas on trouve un triangle autopolaire commun, dont seulement deux éléments opposés, un sommet et un côté, sont réels, de sorte que dans ce cas les deux coniques conduisent à une involution quadratique régulière à un seul point fondamental réel.

La considération des couples de points qui sont conjugués l'un de l'autre par rapport à deux coniques peut aussi nous instruire quant à la coïncidence des points fondamentaux. A cette fin nous considérons les quatre points d'intersection des deux coniques, et nous supposons successivement que deux, trois ou quatre de ces points S se confondent une fois en un seul point, ou que deux couples de points S se confondent deux fois en deux points. Comme le premier cas, celui du contact simple des coniques C_1^2 et C_2^2, se présentera itérativement dans les applications, nous ne nous étendrons que sur ce cas, en nous bornant pour les autres cas à la mention des résultats.

Si les points S_1 et S_2, Pl. IV, fig. 1, se rapprochent de plus en plus, jusqu'à ce qu'ils viennent se confondre en un point déterminé S dans une direction déterminée, les points fondamentaux A et B se confondront en un point, et les droites fondamentales *a* et *b* de ces points se confondront en une droite; mais la droite de jonction de A et B, ainsi que le point d'intersection des droites fondamentales de A et B, n'en resteront pas moins déterminés. Tandis qu'en effet le point d'intersection C de ces droites fondamentales reste le point d'intersection des droites S_1 S_2 et S_3 S_4, dont maintenant la première est tangente commune de C_1^2 et de C_2^2 en S, la droite fondamentale *c* de ce point C est la polaire commune de C par rapport à C_1^2 et C_2^2, qui sépare harmoniquement C des points S_3 et S_4. Et dans ce système, au réseau des droites du plan, correspond involutivement le réseau des coniques qui passent par C et

touchent en A la polaire commune de C par rapport à C_1^2 et à C_2^2. Mais les courbes, qui dans cette transformation correspondent à des courbes données, peuvent présenter des singularités auxquelles l'involution quadratique régulière ordinaire ne saurait donner lieu. Ainsi, à une conique arbitraire correspond, dans ce cas particulier, une courbe du quatrième degré, à deux branches qui se touchent en S suivant la droite de jonction des deux points A et B confondus en S; branches qui ou bien se prolongent aux deux côtés de S, ou bien sont toutes les deux imaginaires aux deux côtés de S, ou bien sont seulement réelles à l'un des côtés de S mais alors situées du même côté de la tangente A B, selon que la conique donnée coupe la droite A B en deux points réels, en deux points imaginaires, ou en deux points coïncidents; il se produit donc en S une singularité d'ordre supérieur, qui ne doit pas être confondue avec un point de rebroussement, mais qui doit être considérée comme la coïncidence de deux points doubles [1]).

---

[1]) Si, dans le cas de la coïncidence de A et B (fig. 1), on prend la tangente commune en A pour côté $x = 0$, la droite A B pour côté $y = 0$, et la corde commune S_3 S_4 pour côté $z = 0$ du triangle de référence, les équations des deux coniques qui déterminent la transformation peuvent être données sous la forme $x^2 \pm y^2 - 2xz = 0$ et $x^2 \pm y^2 - 2\lambda xz = 0$, où le signe supérieur s'applique lorsque S_3 et S_4 sont imaginaires, le signe inférieur lorsque S_3 et S_4 sont réels. En admettant ici la première supposition, l'intersection des polaires du point x', y', z' est déterminée par les équations $x(x' - z') + yy' - zx' = 0$ et $x(x' - \lambda z') + yy' - \lambda zx' = 0$, ou $xx' + yy' = 0$ et $xz' + zx' = 0$, d'où l'on déduit les relations $x : y : z = - x'y' : x'^2 : y'z'$. Si l'équation de la courbe donnée est $Px^2 + Qy^2 + Rz^2 + 2Syz + 2Tzx + 2Uxy = 0$, celle qui lui correspond est $Px^2y^2 + Qx^4 + Ry^2z^2 + 2Sx^2yz - 2Txy^2z - 2Ux^3y = 0$, qui peut être étudiée algébriquement.

Parce que z^4 manque, cette courbe passe par S; parce que z^3 manque, la courbe a en S un point double, dont les tangentes, obtenues en posant le coefficient de z^2 égal à zéro, coïncident avec A B. En écrivant l'équation sous la forme $y^2(Px^2 - 2Txz + Rz^2) - 2y(Ux - Sz)x^2 + Qx^4 = 0$, qu'elle prend quand on l'ordonne suivant y, et en représentant

Lorsque trois points S se confondent en un même point, les trois points fondamentaux A, B, C se réunissent également en ce point. Dans ce cas, la correspondance persiste, et au réseau des droites de Σ correspond un réseau de coniques de Σ', qui, en ce point de coïncidence, s'osculent bien entre elles, mais n'osculent pas les coniques données C_1^2 et C_2^2.

$\frac{yz}{x^2}$ par μ et $\frac{x}{z}$ par δ, on a $\mu^2(R - 2T\delta + P\delta^2) + 2\mu(S - U\delta) + Q = 0$, ou, ordonnée suivant δ, $R\mu^2 + 2S\mu + Q - 2\delta\mu(T\mu + U) + P\delta^2\mu^2 = 0$, équation à laquelle on satisfait en posant $R\mu^2 + 2S\mu + Q = 0$ et $\delta = 0$, ce qui signifie que la courbe est osculée en S par les deux coniques $yz = \mu_1 x^2$ et $yz = \mu_2 x^2$, lorsque μ_1 et μ_2 sont les racines de l'équation $R\mu^2 + 2S\mu + Q = 0$.

Si, dans la relation entre μ et δ, nous remplaçons μ par $\mu_i + \Delta\mu$, où μ_i représente ou bien μ_1 ou bien μ_2 et $\Delta\mu$ un petit accroissement, $\Delta\mu$ est déterminé par la condition $(R\mu_i + S)\Delta\mu - \delta\mu_i(T\mu + U) = 0$ et par conséquent réel, tant pour de petites valeurs positives que négatives de x et de $\frac{x}{z}$ ou δ, lorsque μ_i est réel, c'est-à-dire, lorsque les racines μ_1 et μ_2 sont réelles. Pour des racines réelles μ_1 et μ_2 qui diffèrent l'une de l'autre, les deux branches passent donc de part et d'autre de S, tandis qu'elles sont évidemment toutes les deux entièrement imaginaires dans le cas où μ_1 et μ_2 sont imaginaires. Mais si μ_1 et μ_2 sont égales l'une à l'autre, la substitution de $\mu_i + \Delta\mu$ pour μ donne la relation $R(\Delta\mu)^2 - \delta\mu_i(T\mu_i + U) = 0$, et alors $\Delta\mu$ est réel, ou bien seulement pour des valeurs positives de x et de $\frac{x}{z}$ ou δ, ou bien seulement pour des valeurs négatives; de sorte que les deux branches, dans ce cas, ne passent pas de part et d'autre de S, mais sont situées du même côté de A B (point de rebroussement de 2e espèce).

Si donc tout dépend de la nature des racines de l'équation $R\mu^2 + 2S\mu + Q = 0$, et si nous avons des branches continues pour $S^2 - RQ > 0$, un point isolé avec direction déterminée de tangente pour $S^2 - RQ < 0$, et un point de rebroussement de seconde espèce pour $S^2 - RQ = 0$, d'un autre côté l'équation $Rz^2 + 2Syz + Qy^2 = 0$ donne les points d'intersection de la conique donnée et de la tangente commune. Or, de là résulte immédiatement ce qui a été énoncé plus haut.

Lorsque μ_1 et μ_2 sont toutes les deux nulles, une droite se détache de la courbe du quatrième degré, par suite de $Q = 0$, et la courbe restante du troisième degré oscule cette droite, parce qu'on a encore $S = 0$.

Lorsque les quatre points S coïncident tous en un même point, ou coïncident deux à deux, la correspondance n'est plus possible.

Après avoir étudié l'involution quadratique régulière, nous avons, en second lieu, à traiter le cas où A′ coïncide avec B, B′ avec A, et C′ avec C. Puisque ici, à un rayon passant par A doit correspondre réciproquement un rayon passant par B, le point d'intersection de chaque rayon par A avec le rayon correspondant par B doit être un point S correspondant à lui-même, et la transformation, pour être possible, doit posséder une conique de points S passant par A et B, lieu géométrique du point d'intersection des rayons correspondants des deux faisceaux A et B. Mais alors il faut en outre que le faisceau de rayons C, correspondant à lui-même, ne contienne que des rayons correspondants à eux-mêmes, et dans ce cas l'involution des points sur un rayon déterminé passant par C peut être regardée comme déterminée par les deux points S situés sur cette droite. Ainsi nous trouvons que cette transformation, que j'appellerai l'involution quadratique irrégulière, existe réellement. Car, lorsqu'on suppose une conique C^2 et un point C dans son plan, la transformation en question est simplement la correspondance des points, situés sur des droites passant par C, qui sont conjugués l'un de l'autre par rapport à C^2; C^2 est alors la conique des points S, et les points de contact des tangentes menées de C à C^2, qui bien entendu peuvent être imaginaires, sont les deux autres points fondamentaux.

Des relations II) on peut déduire également que la possibilité de l'involution quadratique irrégulière exige, que tous les rayons passant par l'un des points fondamentaux correspondent à eux-mêmes. Lorsque A′ coïncide avec B, B′ avec A et C′ avec C, les conditions II) deviennent

$$\left.\begin{array}{l} A\,(B\,C\,P\,Q) = B\,(C\,A\,P'\,Q') \\ B\,(C\,A\,P\,Q) = A\,(B\,C\,P'\,Q') \\ C\,(A\,B\,P\,Q) = C\,(A\,B\,P'\,Q') \end{array}\right\} \;\ldots\ldots\; II^{b})$$

Pour que la coïncidence de Q et P′ comporte la coïncidence de Q′ et P, il faut que les relations

$$\left.\begin{array}{l} A(BCPP') = B(CAP'P) \\ B(CAPP') = A(BCP'P) \\ C(ABPP') = C(ABP'P) \end{array}\right\} \ldots\ldots \quad II^b)$$

soient satisfaites.

La première de ces relations, ou

$$\frac{Sin\, BAP}{Sin\, CAP} : \frac{Sin\, BAP'}{Sin\, CAP'} = \frac{Sin\, ABP}{Sin\, CBP} : \frac{Sin\, ABP'}{Sin\, CBP'},$$

se transforme, à l'aide des deux équations

$$\frac{Sin BAP}{Sin CAP} \cdot \frac{Sin\, CPB}{Sin\, APB} \cdot \frac{Sin ACP}{Sin BCP} = -1, \quad \frac{Sin BAP'}{Sin\, CAP'} \cdot \frac{Sin\, CBP'}{Sin\, ABP'} \cdot \frac{Sin ACP'}{Sin BCP'} = -1,$$

évidentes à la simple inspection de la figure, en

$$\frac{Sin\, ACP}{Sin\, BCP} = \frac{Sin\, ACP'}{Sin\, BCP'};$$

d'où il suit que CP doit coïncider avec CP′ et que par conséquent la droite joignant les points correspondants P et P′ doit passer par C, etc.

On voit, par ce qui précède, que l'involution quadratique régulière et irrégulière ne peuvent être mises sur la même ligne, en ce qui concerne le degré de particularité du cas. Tandis que la première est établie dès qu'on a superposé d'une manière déterminée les triangles ABC et A′B′C′, la génération de la seconde exige en outre, que les points déterminants P et P′ soient situés en ligne droite avec le point fondamental né de la réunion de deux points fondamentaux de même nom. Cependant les involutions quadratiques régulière et irrégulière jouissent à la fois de la propriété, que deux de ces transformations de même espèce peuvent toujours être considérées comme la projection centrale l'une de l'autre; toutefois avec cette réserve que les deux transformations qu'on veut mettre en rapport perspectif doivent s'accorder quant à l'état de réalité et, pour l'involution

quadratique régulière, en outre quant à la coïncidence des points fondamentaux [1]).

Si pour la conique C^2 et le point C, qui entrent dans la description de l'involution quadratique irrégulière, on prend un cercle et son centre, on est conduit à la transformation par rayons vecteurs réciproques. Dans cette correspondance, les points homologues sont situés sur des droites passant par C, ou bien toujours au même côté de C, ou bien toujours à des côtés différents de C, toujours de telle façon que le produit de leurs distances à C soit constant; alors C est appelé le centre de la transformation, tandis que le produit constant, qu'on suppose positif dans le premier cas et négatif dans le second, en forme ce qu'on appelle la puissance [2]).

Pour le cas enfin où l'on suppose, en troisième lieu, que A' tombe sur B, B' sur C et C' sur A, nous nous bornerons à remarquer qu'il ne saurait donner lieu à une involution; car à un point Q de A B correspond le point A, au même point Q' de A B le point B.

4. Si à l'aide d'une transformation quadratique on convertit une ligne droite en conique, qu'à cette conique on applique une nouvelle transformation quadratique avec d'autres points fondamentaux, et qu'on répète cette opération un certain nombre de fois, le résultat sera une courbe déterminée de degré supérieur, correspondant point par point à la droite qui a servi de point de départ. Toutes les courbes différentes qui de cette manière peuvent être déduites d'une

---

[1]) La relation entre les coordonnées des points correspondants peut être mise sous la forme $x x_1 = y z_1 = z x_1$. On a donc $x : y : z = \frac{1}{x_1} : \frac{1}{z_1} : \frac{1}{y_1}$ (involution quadratique régulière avec échange mutuel de y_1 et z_1).

[2]) Par rapport à un système quelconque de coordonnées rectangulaires, mené par le centre, les coordonnées des courbes correspondantes sont liées entre elles, si k^2 désigne la puissance, par les relations $x = \frac{k^2 x_1}{x_1^2 + y_1^2}$ et $y = \frac{k^2 y_1}{y_1^2 + x_1^2}$.

droite, ont ce caractère commun, que leurs points se succèdent d'une manière continue; c'est-à-dire que, d'un point arbitrairement choisi sur une pareille courbe, on peut toujours — au moins à l'aide de l'infini — parvenir, le long de la courbe même, à un autre point quelconque. La courbe considérée doit donc former un ensemble fermé et ne peut pas être composée de deux ou plusieurs parties discontinues. Pour cette raison, on appelle ces courbes des courbes unicursales, c'est-à-dire, des courbes qui peuvent être parcourues d'un seul trait. Je note seulement en passant, d'abord qu'une courbe unicursale C^n du $n^{\text{ième}}$ degré possède toujours $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ points doubles, si un point multiple de l'ordre k est compté pour $\frac{k(k-1)}{2}$ points doubles et que d'autres réunions de points doubles soient également comptées d'une manière convenable; en second lieu, que les coordonnées homogènes des points d'une pareille courbe, par rapport à un triangle de référence arbitrairement choisi, peuvent être exprimées en formes du degré n d'une même variable. Réciproquement, on peut démontrer que toute courbe qui possède l'une des trois propriétés parfaitement équivalentes, dont il vient d'être question, peut être convertie, à l'aide de différentes transformations quadratiques, en ligne droite [1]).

---

[1]) Lorsque la droite l est transformée en une courbe C^n, il existe entre les points P et P′ des deux systèmes Σ et Σ' une transformation birationnelle du degré n, évidemment le résultat de la réunion des différentes transformations quadratiques, dont on s'est servi. Réciproquement il est connu, que toute transformation birationnelle du degré n, quel que soit son mode de formation, peut toujours être décomposée en un certain nombre de transformations quadratiques. Comme exemples de cette décomposition, je citerai celle de la correspondance par cercles symétriques (*Nieuw Achief voor Wiskunde*, t. IX, p. 129, ou *Bulletin des sciences math. et astron* , 2e Série, t. VI. 1882) et celle d'une correspondance donnée par M. J. Neuberg (*Wiskundige opgaven „Een onvermoeide arbeid*", etc", t. 2, p. 237, problème 148).

Dans les considérations précédentes est impliquée une construction linéaire générale de toute courbe unicursale, dont les données déterminantes sont choisies de manière qu'elles ne conduisent qu'à une courbe unique. Effectivement, on n'a qu'à combiner les données déterminantes avec des transformations quadratiques successivement appliquées, de telle sorte que la courbe à déterminer se transforme en ligne droite; de cette droite on fera ensuite ressortir point par point la courbe demandée, comme celle qui correspond à la droite dans la transformation résultant de la réunion des différentes transformations quadratiques.

Après ce qui précède, la construction de la tangente en un point déterminé de la courbe unicursale ne présente pas non plus de difficulté. Car, à l'aide de ce théorème découlant de la définition même du contact — que deux courbes qui se touchent en dehors des points fondamentaux d'une transformation quadratique, sont converties par cette transformation en deux autres courbes également tangentes l'une à l'autre, — on peut montrer que la construction demandée s'exécute simplement en appliquant, à plusieurs reprises successives, la construction de la tangente en un point déterminé à une conique déterminée, et cette dernière construction peut se faire au moyen du théorème de Pascal. Soient, en effet, P un point de la droite l mise en rapport avec la courbe, P′ le point correspondant à P dans la première transformation quadratique, P″ le point correspondant à P′ dans la deuxième transformation quadratique, etc., et enfin P^n le point correspondant de la courbe dont on veut déterminer la tangente en ce point. Alors on peut construire d'abord la tangente l' en P′ à la conique qui dans la première transformation quadratique correspond à l, ensuite la tangente l'' en P″ à la conique qui dans la seconde transformation quadratique correspond à l', etc., et, en continuant de la sorte, enfin la tangente l^n en P^n à la conique qui dans la dernière transformation quadratique correspond à l^{n-1}. Cette

droite l^n sera la droite demandée [1]). Donc, la construction de la tangente l^n n'offrira plus aucune difficulté, lorsque nous aurons encore élucidé d'un seul mot la construction de l'.

Si l est une droite du système Σ à points fondamentaux A, B, C, et C'^2 la conique correspondante du système Σ' à points fondamentaux A', B', C', on connaît déjà, sans recourir à l, trois points de C'^2, savoir les points fondamentaux de Σ'. En outre, la nature du problème suppose la connaissance d'un quatrième point de C'^2, le point P' correspondant à P de l, auquel on veut construire la tangente. Par conséquent, C' est déterminée et la construction de la tangente en P' à C'^2 est possible, dès qu'on a trouvé encore un point de cette conique. A cet effet, on prend sur l un point quelconque Q et l'on détermine le point Q' qui dans la transformation quadratique correspond à Q; on peut ensuite passer à la construction de la tangente, à l'aide du théorème de Pascal.

Je me bornerai à cette esquisse générale de la construction des courbes unicursales par points et tangentes, parce que, dans le présent travail, elle ne doit servir qu'à expliquer quelques remarquables constructions de courbes déterminées du troisième et du quatrième degré, que M. A. N. Godefroy, architecte à Amsterdam, a eu l'obligeance de me confier. Avant d'exposer cette construction, je dois toutefois développer une transformation non involutive, qui s'y présente.

5. Lorsqu'un triangle variable P Q R (fig. 2) se meut de telle sorte que les côtés p, q, r passent constammant par les points fixes A, B, C, et que les sommets Q et R se déplacent sur les droites fixes e et f, le troisième sommet P décrit une conique passant par B et C, qui contient en outre le point d'intersection D de e et f, le point d'intersection E de e et A B, et le point d'intersection F de f et A C. En effet, les ponctuelles Q et R sur e et f étant perspectives, les faisceaux de rayons q et r sont projectifs, et le lieu géométrique de P est

[1]) L'idée fondamentale de cette construction de la tangente est empruntée à Saltel.

une conique passant par B et C, qu'on reconnaît immédiatement passer aussi par D, E, F, si l'on conduit le côté p du triangle par D, B, C.

Cette construction de la conique par cinq points B, C, D, E, F a été donnée et étendue à la construction de courbes de degré supérieur, dans le premier quart du dix-huitième siècle, par Mac Laurin. Elle est la base d'une remarquable transformation quadratique non involutive, à laquelle M. Godefroy donne le nom de transformation au moyen de trois faisceaux de rayons et d'une droite, et que j'appelle simplement la transformation de Mac Laurin. Cette transformation consiste en ceci, qu'on suppose donnés les trois points A, B, C et la droite f, et qu'à chaque point Q du système Σ on fait correspondre dans le système Σ' le point P qui est situé sur Q C et pour lequel les droites Q A et P B se coupent en un point R de la droite fixe f. Cette correspondance non involutive, que nous allons maintenant étudier de plus près, est effectivement une transformation quadratique, parce qu'à une droite e de points Q, correspond, d'après ce qui précède, une conique de points P.

Dépouillée de la forme dont nous l'avons ci-dessus revêtue, la transformation est indiquée dans la fig. 3. Les données sont les trois points centraux A, B, C et la directrice f. D'un point Q arbitrairement choisi dans le système Σ, on trouve le point correspondant Q' du système Σ' en déterminant le point d'intersection R de A Q et de f, joignant ce point à B, et cherchant le point où cette droite de jonction B R coupe C Q; opérations dans lesquelles il faudra toujours, en ce qui concerne l'emploi des points centraux A, B, C, observer le même ordre de succession. Si l'on représente le point d'intersection de f et de A C par D, celui de f et de B C par E, on voit immédiatement que A, C, E sont les points fondamentaux de Σ, et B, C, D ceux de Σ', de telle sorte qu'aux points A, C, E de Σ correspondent les droites A C D, B D, C B E de Σ' et réciproquement, aux points B, C, D de

Σ', les droites C B E, A E, A C D de Σ. En outre, les deux droites A B et f correspondent point par point à elles-mêmes.

La transformation de Mac Laurin peut rendre de précieux services dans la construction des courbes; d'abord parce que, de chaque point Q arbitrairement choisi de Σ, on construit par une voie bien simple le point correspondant Q' de Σ', et, en second lieu, parce que les droites A B et f correspondent point par point à elles-mêmes. Comme Q' se déduit de Q au moyen de trois droites, la première assertion n'a pas besoin d'être justifiée. Quant à la simplification apportée par la seconde propriété, elle se manifeste immédiatement dans la construction de la conique de points Q' qui correspond à une droite donnée de points Q. Tandis que, dans le cas de la transformation quadratique générale, il n'y a que trois points de cette conique qui soient immédiatement connus, savoir les trois points fondamentaux de Σ', dans le cas de la transformation de Mac Laurin on connaît cinq points de la conique, les trois points fondamentaux A, C, E, et les points où la droite correspondante coupe les droites A B et f. Par suite, pour la construction de la tangente en un point déterminé de la conique, point qui est alors le sixième connu, il n'est plus nécessaire, comme à l'art. 4, de déterminer encore préalablement un point arbitraire de cette conique.

Pour construire maintenant des courbes unicursales du troisième et du quatrième degré à l'aide de la transformation de Mac Laurin, on peut partir de la ligne droite, convertir la droite par une première application de cette transformation en conique, puis la conique par une seconde application de la même transformation avec d'autres points centraux et une autre directrice en une courbe du degré voulu. Mais on peut aussi, — et cela abrège la besogne, — au lieu de la ligne droite, prendre pour point de départ le cercle, pourvu qu'alors on se contente de construire les courbes unicursales qui, au moyen de la transformation de Mac Laurin, peuvent être déduites du cercle. Comme c'est à ce dernier

point de vue que je me place pour faire connaître les résultats de M. Godefroy, j'ai construit dans la fig. 4, pour la courbe qui peut être déduite du cercle K à l'aide des points centraux A, B, C et de la directrice f, le point Q' qui correspond au point Q du cercle et la tangente Q'U à la courbe en ce point Q'. La manière dont Q' se déduit de Q ayant déjà été indiquée, il n'y a plus à expliquer que la construction de la tangente. Ainsi que nous l'avons vu, cette tangente en Q' à la courbe demandée est en même temps la tangente en Q' à la conique qui dans la transformation de Mac Laurin correspond à la tangente q en Q au cercle K, et de cette conique on connaît, outre les points B, C, D et le point construit Q', le point d'intersection G de q et de A B et le point d'intersection H de q et de f. Or, en omettant le point D, l'application du théorème de Pascal à l'hexagone inscrit Q' B G H C Q' fait trouver, si S est l'intersection de Q'B et de H C, T l'intersection de B G et de C Q', et U l'intersection de G H et de S T, pour la tangente demandée en Q' la droite Q'U.

Dans le cas particulier où le point central C est situé sur la directrice f, la construction ci-dessus devient plus simple. Dans ce cas, en effet, la droite C H (fig. 5) coïncide avec f, et par suite l'intersection S des droites C H et Q'B est le point R. Pour déterminer la tangente Q U, on n'a donc qu'à joindre le point d'intersection T de A B et de C Q à R, puis Q' à l'intersection U de T R et de la tangente q du cercle en Q.

Dans le cas particulier en question, où le point central C se trouve sur la directrice f, deux points fondamentaux coïncident, tant dans le système Σ que dans le système Σ'; en Σ, E vient coïncider avec C dans la direction de B C, et en Σ', D vient coïncider avec C dans la direction de A C. Ici s'applique donc ce qui a été développé ci-dessus pour le cas de l'involution quadratique régulière, et au réseau des droites de Σ correspond en Σ' le réseau des coniques passant par B et C, qui en C touchent la droite A C, etc.

Outre ce cas particulier où C se trouve sur la directrice f, il peut encore se présenter celui où les trois points centraux

A, B, C sont situés en ligne droite. Mais on reconnaît immédiatement, par les considérations auxquelles se rapporte la fig. 2 et qui nous ont servi de point de départ, que, dans ce cas, à une droite de Σ correspond une droite en Σ', parce que la droite A B C se détache de la conique qui correspond à la première droite dans le cas ordinaire. Dans ce cas, nous avons donc quitté le domaine de la transformation quadratique et sommes abordés sur celui de l'homographie.

6. Passant maintenant à la considération de quelques-unes des constructions qui m'ont été communiquées par M. Godefroy, je suppose d'abord, dans la fig. 6, qu'on transforme le cercle K à l'aide d'une directrice f située à l'infini et des trois points centraux A, B, C, dont A est situé sur le cercle K, B quelque part sur le diamètre A V passant par A, et C à l'infini, dans la direction perpendiculaire à ce diamètre. La détermination du point Q' qui sur la courbe demandée correspond au point Q du cercle, et la construction de la tangente Q'U de la courbe en ce point Q', — telles qu'elles ont indiquées à l'article précédent pour le cas particulier où le point central C est situé sur la directrice, — ressortant entièrement de la figure, nous n'examinerons maintenant que la nature de la courbe à un point de vue théorique, d'après les propriétés de la transformation appliquée au cercle.

Le lieu géométrique du point Q' est une courbe du troisième degré, qui a en B un point double; il passe par les points cycliques et a pour asymptote la tangente au cercle en A. En effet, tandis qu'à une conique arbitraire en Σ correspond en Σ' une courbe du quatrième degré, possédant en B un point double et deux branches qui touchent la droite A C en C, dans notre cas, où le cercle K passe par A, la droite fondamentale A C de A se détache de cette courbe, et il reste donc une courbe du troisième degré, qui a en B un point double et touche une fois la droite A C à l'infini. Elle passe par les points cycliques, parce que les points de la directrice située à l'infini correspondent à eux-mêmes. Les

points de la droite A B ayant cette même propriété, la courbe devrait passer par A et par le point V de K diamétralement opposé à A; par suite du détachement de la droite A C, la courbe ne passe plus par A, mais bien par V. La construction également montre qu'elle passe par V; car lorsque Q coïncide avec V, il en est de même de Q'.

Le diamètre A M V du cercle est un axe de symétrie du lieu géométrique cherché. De la résulte ensuite que l'asymptote A C est tangente d'inflexion de la courbe au point infiniment éloigné C; car, lorsqu'on veut déterminer le troisième point d'intersection de A C et de la courbe, on reconnaît que ce point doit être situé à l'infini, parce que A n'est pas un point de la courbe et qu'à une distance finie il ne peut pas y avoir deux points d'intersection de A C et de la courbe qui soient situés symétriquement par rapport à A V. D'ailleurs, la symétrie par rapport à A M V exige aussi, que les parties de la courbe qui se réunissent à l'infini en C se trouvent du même côté de l'asymptote A C, ainsi que cela arrive en un point d'inflexion à l'infini [1]).

Puisque le côté B C E du triangle fondamental A C E de Σ coupe le cercle en deux points réels et non coïncidents W_1 et W_2, les tangentes b_1 et b_2 de la courbe au point double B seront réelles et parallèles aux droites A W_1 et A W_2 qui joignent A à ces deux points d'intersection. Cette remarque nous apprend que, lorsque le point B se déplace sur A V, la courbe résultante aura un point double avec des branches réelles, tant que B reste en dedans du cercle, que le point double devient un point isolé lorsque B est situé en dehors du cercle, et qu'il sera un point de rebroussement si B coïncide avec V.

La construction du point U, qui détermine la tangente

---

[1]) Vu que le cercle touche en leur point d'intersection A les côtés coïncidents A C et A E du triangle fondamental A C E de Σ, ce qui revient à dire que dans la note de la page 65 les coefficients S et Q sont nuls, nous avons affaire ici au cas où μ_1 et μ_2 sont nuls tous les deux. De là aussi résulte que A C oscule la courbe C_2 à l'infini.

$Q'U$ à la courbe au point Q', est tout à fait indépendante de la place du point B sur la droite A V. Lorsque le point Q se déplace le long de K, le point U parcourt un limaçon de Pascal, à point de rebroussement. En effet, puisque la droite Q V est perpendiculaire à A Q et par conséquent aussi à TU, et qu'elle divise l'angle T Q U en deux parties égales, elle divise aussi T U en deux parties égales, et l'on a donc $\Delta VUQ \backsim \Delta VTQ$, et par conséquent V U perpendiculaire à Q U. Or, ce limaçon particulier de Pascal est précisément, comme on sait, la podaire d'un cercle pour un des points de la circonférence comme centre.

De toute la famille de courbes qu'on obtient par le déplacement de B le long de A V, celles qui correspondent aux valeurs 2, 1, $\frac{1}{2}$ du quotient $\frac{AB}{AM}$ sont des membres très connus. Pour $\frac{AB}{AM}=2$, c'est-à-dire, lorsque B coïncide avec V, on trouve la cissoïde, pour $\frac{AB}{AM}=1$ la strophoïde, et pour $\frac{AB}{AM}=\frac{1}{2}$ la trisectrice. Et effectivement, il n'est pas difficile de ramener les constructions qui conduisent à la cissoïde et à la strophoïde aux constructions connues de ces deux courbes. D'abord, dans la fig. 7, où B a pris la place de V, le second point d'intersection Q'' de BQ' et du cercle est le point diamétralement opposé à Q, et de là résulte, lorsque la tangente en A est coupée par BQ' en N, la construction connue de la cissoïde, qui repose sur l'égalité de BQ' et de $Q''N$. Et en second lieu, si dans la fig. 8 le point B est situé au centre, la droite BQ', prolongée, coupe Q V à angle droit en son milieu, le triangle $QQ'V$ est isocèle, et par conséquent, si VQ' coupe B C en N, le triangle $Q'NB$ l'est aussi, de sorte qu'on retombe sur la construction connue de la strophoïde, dans laquelle, sur une droite quelconque V N menée par V et coupant B C en N, on porte à partir de N, de chaque côté, une longueur N B, etc.

Un des mérites de la construction de M. Godefroy, qui vient d'être communiquée, c'est qu'elle réunit sous un même point de vue différentes courbes que d'ordinaire on étudie chacune séparément. Il est digne de remarque que ces courbes montrent encore des rapports sous deux autres points de vue. En premier lieu, elles peuvent toutes être considérées comme des courbes se déduisant de sections coniques au moyen de la transformation par rayons vecteurs réciproques, lorsqu'on place le centre de la transformation à l'un des sommets des sections coniques. Car si, à la courbe C^3 du troisième degré, construite dans la fig. 6, on applique une transformation par rayons vecteurs réciproques, avec B pour centre, cette courbe se convertit en une courbe du sixième degré à points triples à B et aux points cycliques; de cette courbe se détache deux fois la droite à l'infini parce que C^3 passe deux fois par B, et une fois chacune des droites qui joignent B à un des points cycliques, parce que C^3 passe une fois par chacun des points cycliques; de sorte qu'il reste une conique passant par B, qui, pour des raisons de symétrie, doit avoir la droite A M V pour axe et par conséquent le point B pour sommet. C'est ainsi que la cissoïde est la „courbe réciproque" d'une parabole, la strophoïde la courbe réciproque d'une hyperbole équilatère, et la trisectrice la courbe réciproque d'une hyperbole dont les asymptotes forment des triangles équilatéraux avec des droites parallèles à l'axe réel, — toujours par rapport au sommet ou à l'un des sommets de ces coniques pris pour centre [1]). Et en général, toute courbe C^3 qui est déduite d'un cercle K (fig. 9) à l'aide d'une transformation de Mac Laurin dont la directrice se trouve à l'infini, le point central A quelque part sur K, B en un lieu quelconque et C quelque part à l'infini, pourra être considérée, de la même manière, B étant pris pour centre, comme la courbe réciproque d'une conique qui passe par B, mais dont B n'est alors plus en général un sommet. La courbe C^3 aura en B un point isolé,

[1]) Voir H. Picquet, „*Traité de géométrie analytique*" t. I, p.575.

un point double ou un point de rebroussement, et la conique sera par conséquent une ellipse, une hyperbole, ou une parabole, suivant que la droite B C est entièrement extérieure au cercle, coupe le cercle ou touche le cercle.

En second lieu, le groupe des courbes construites dans la fig. 6 est composé de courbes qui peuvent être caractérisées comme podaires symétriques de la parabole. La première podaire négative, par rapport au point B, de la courbe de la fig. 6 qui a en B un point double, est, en effet, une courbe de la seconde classe, qui touche une fois la droite à l'infini, et qui est donc une parabole. Car, par un point quelconque P du plan passent deux tangentes à la première podaire négative, parce que le cercle décrit sur B P comme diamètre doit couper la courbe C^3 encore en deux points en dehors de B et des deux points cycliques. Et la première podaire négative doit toucher une fois la droite à l'infini, parce que chaque C^3, qui passe par les points cycliques, a encore un point commun avec la droite à l'infini. La parabole qui se trouve dans ce rapport avec la courbe de la fig. 6 est la parabole qui a A V pour axe, V pour sommet, et qui touche les droites menées par B parallèlement à $A W_1$ et à $A W_2$. Ici encore, en général, toute courbe qui peut être déduite d'un cercle de la manière indiquée dans la fig. 9 aura pour podaire, par rapport au point double B, une parabole, savoir, la parabole à directrice parallèle à A C, qui touche les droites b_1 et b_2 menées de B parallèlement $A W_1$ et à $A W_2$ et la perpendiculaire élevée en V sur A V. De cette parabole on trouve immédiatement le foyer, comme le point qui dans la transformation quadratique hyperbolico-équilatère, dont le triangle formé par les trois tangentes est le triangle fondamental, correspond au point situé à l'infini de la perpendiculaire à A C. Une fois le foyer connu, on trouve, dans les pieds des perpendiculaires abaissées de ce point sur les tangentes, trois points de la tangente au sommet, etc.

Mais à mon opinion le mérite principal de la construction

de M. Godefroy réside, à mon avis, dans sa simplicité. Là où elle peut être employée, on ne trouvera réellement aucun autre moyen aussi simple de déterminer les points et les tangentes de la courbe cherchée. Or, elle se laisse aisément appliquer au groupe des courbes ayant un axe de symétrie, pourvu que les données qui déterminent la courbe soient choisies de manière à ne conduire qu'à une courbe unique. Car, dans ce cas, il est facile d'obtenir le cercle qui doit être transformé. C'est ce qu'un exemple éclaircira. Si, dans la fig. 10, une strophoïde est déterminée par son point double B, par les tangentes BN_1 et BN_2 en ce point double et par un point Q', on procèdera de la manière suivante. Sur la bissectrice de l'angle N_1BN_2, qui comprend le point Q', on prend un point arbitraire A_1, par ce point on mène une parallèle à l'une des deux tangentes du point double, par exemple à BN_1, on prolonge cette parallèle jusqu'à son point d'intersection W avec la perpendiculaire élevée en B sur A_1B, et par W et A_1 on fait passer un cercle ayant son centre M_1 sur A_1B; ensuite on trace BQ', de A_1 on mène une parallèle à cette droite, parallèle qui coupe le cercle en Q_1, de Q_1 on abaisse sur A_1B une perpendiculaire, qui coupe BQ' en Q'_1, et de Q' on mène une parallèle à la droite qui joint Q'_1 à M_1; le point M, où la droite tracée en dernier lieu coupe A_1B, est le centre du cercle demandé. En déterminant le point Q, où la perpendiculaire abaissée de Q' sur A_1B coupe BQ_1, on trouve dans MQ le rayon de ce cercle, dans son point d'intersection A avec A_1B le point central dont on a encore besoin, etc.

Pour la construction de courbes unicursales asymétriques du troisième degré, qui passent par les points cycliques, la transformation de Mac Laurin ne peut pas toujours rendre immédiatement des services; d'abord parce qu'on ne sait pas s'il y a un cercle dont la transformation fournit la courbe demandée, et, en second lieu, parce que ce cercle, s'il existe, ne se laisse pas assigner d'emblée. Cela est,

par exemple, le cas, si de la courbe C^3 on connaît le point double B et quatre points arbitraires Q. Alors on peut faire usage, soit de la transformation par rayons vecteurs réciproques, soit de la première podaire négative. Dans le premier cas, on cherche les quatre points Q′ qui dans la transformation en question, avec le centre B, correspondent aux points Q (ce qui, en prenant le carré de la distance de B à l'un des points Q pour puissance de la transformation, peut être ramené à la recherche de trois points), et l'on construit alors inversement, dans la même transformation, la courbe réciproque de la conique passant par B et par les quatre points Q′. Pour la construction de la tangente en un des points de la courbe, on peut, après avoir déterminé à l'aide du théorème de Pascal la tangente de la conique au point correspondant, faire usage de cette propriété connue, que les tangentes en deux points homologues de deux courbes, qui se correspondent dans la transformation par rayons vecteurs réciproques, sont antiparallèles entre elles par rapport au rayon vecteur commun de ces points homologues. Dans le second cas, on cherche la parabole qui touche les quatre perpendiculaires élevées dans les points Q aux rayons vecteurs B Q, et l'on détermine inversement la podaire de cette parabole par rapport à B. Une considération cinématique conduit alors à la construction de la tangente à cette podaire en un point déterminé. En effet, si la podaire d'une courbe C (fig. 11) par rapport à B est considérée comme le lieu géométrique du sommet Q d'un angle droit P Q R, qui se meut de manière que P Q passe toujours par B et que Q R touche toujours la courbe C, le centre instantané de rotation de cet angle droit est, dans la position donnée, le point S où la normale de C au point de contact Q′ de Q R coupe la perpendiculaire élevée en B sur P Q, et par conséquent la normale en Q au trajet parcouru par Q passe par le milieu M de B Q′. La perpendiculaire Q T élevée en Q sur Q M sera donc la tangente

de la podaire en Q. Ainsi, on n'aura qu'à appliquer cette construction à la parabole [1]).

A la question posée plus haut, si toute courbe unicursale C^3 qui passe par les points cycliques peut être déduite d'un cercle à l'aide d'une transformation de Mac Laurin, on doit répondre affirmativement. Il y a plus: toute courbe C^3 du caractère indiqué est en rapport, de la manière en question, à un nombre infini de cercles, entre lesquels il existe une relation simple. Si, en effet, une pareille courbe est déterminée par le point double B (fig. 9) avec ses tangentes b_1 et b_2, et l'asymptote c avec le point de contact à l'infini C, on peut prendre sur la droite c un point arbitraire A, mener par ce point des parallèles aux tangentes b_1 et b_2 du point double, faire couper ces droites par B C en W_1 et W_2, et décrire un cercle par A_1, W_1 et W_2. Ce cercle produira, au moyen de la transformation de Mac Laurin avec les points centraux A, B, C et la directrice à l'infini, une courbe C^3, qui doit coïncider avec la courbe donnée, vu que ces deux courbes ont dix points communs. Car la nouvelle courbe C^3 a, d'après ce qui précède, B pour point double, b_1 et b_2 pour tangentes du point double, et c pour asymptote, de sorte que, en dehors des deux points cycliques, elle a en B six points et en C deux points communs avec la courbe C^3 donnée. Par conséquent, toute courbe unicursale qui passe par les points cycliques peut être déduite d'une infinité de cercles de même rayon, dont les centres sont situés sur une droite déterminée, parallèle à l'asymptote.

Par ce qui précède, le moyen général de déduire d'un cercle toute courbe C^3 ayant un point double et passant

[1]) M. H. Picquet, après avoir fait connaître ce théorème (*l.c.*, t. I, p. 542), en déduit (*l.c.*, t. I, p. 547) une construction de la tangente à la cissoïde, mais cette construction n'est pas plus simple que celle de M. Godefroy. D'un autre côté, M. Résal, dans son *Traité de Cinématique pure* (p. 85), donne pour la tangente à cette courbe une construction qui serait plus simple; mais la courbe considérée par M. Résal n'est pas la cissoïde.

par les points cycliques, est indiqué. Car si les données de la courbe sont choisies de façon qu'elles déterminent une courbe unique, — et c'est le seul cas dont nous avons à nous occuper, — le point double figure toujours parmi elles, et alors nous pouvons, soit à l'aide de la transformation par rayons vecteurs réciproques par rapport à ce point, soit au moyen de la première podaire négative pour ce point, remonter à la connaissance des tangentes au point double et de l'asymptote, pour passer de celles-ci à un cercle K. Au sujet de cette détermination du cercle à transformer, je fais encore deux remarques, dont la première se rapporte à la construction de l'asymptote et la seconde à la construction du cercle pour une courbe C^3 à point isolé.

Si, pour déterminer l'asymptote de la courbe C^3, nous nous servons de la transformation par rayons vecteurs réciproques, nous aurons à examiner à quoi correspond l'asymptote dans cette transformation. Comme nous savons, la courbe correspondante sera un cercle passant par B et ayant en commun avec la conique réciproque les points qui correspondent aux deux points, situés à l'infini, qui sont communs à C^3 et à l'asymptote et qui se confondent au point de contact; ce cercle aura donc en commun avec la conique réciproque, outre B, les deux points de cette conique qui suivent le point B, et par conséquent il osculera cette conique en B. Dans ce cas, la construction de l'asymptote revient donc à la détermination du cercle de courbure de la conique réciproque en B, et à celle de la droite qui correspond à ce cercle dans la correspondance en question [1]).

Lorsqu'on détermine l'asymptote à l'aide de la parabole

[1]) Une construction superbe du rayon de courbure d'une conique en un point P, lorsque, outre P et la tangente p en P, on connaît encore trois points, Q, R, S de la conique, a été déduite par M. P. Serret à l'aide de considérations algébriques („*Géométrie de direction*", p. 477). Et il n'est pas nécessaire de rappeler ici qu'à ce cas se ramène immédiatement, par le théorème de Pascal, celui où l'on donne, indépendamment de P, quatre autres points de la conique.

La construction ci-dessus a été déduite géométriquement, en 1873, par L. Saltel.

qui est la première podaire négative de la courbe demandée C^3, l'asymptote est la droite parallèle à la directice de la parabole, avec laquelle vient coïncider la tangente au sommet de la parabole, quand la parabole est déplacée parallèlement à elle-même, de manière que son foyer arrive en B. Car cette nouvelle position de la parabole a en commun avec l'ancienne position, au point de l'axe qui est situé à l'infini, trois points successifs ou deux tangentes successives, et par conséquent les podaires des deux positions de la parabole doivent avoir une asymptote commune. Mais la podaire de la nouvelle position de la parabole est sa directrice, etc. [1]).

En second lieu, j'expliquerai en quelques mots comment on peut surmonter la difficulté qui se présente dans la construction du cercle passant par A, W_1, W_2, lorsque les points W_1 et W_2 sont imaginaires. Alors les tangentes imaginaires menées de B à la conique réciproque, ou à la parabole qui est première podaire négative, sont considérées comme les rayons doubles de l'involution des rayons conjugués l'un à l'autre par rapport à cette courbe du second degré; on détermine cette involution par deux couples réels de rayons r_1, r_2 et s_1, s_2, on transporte cette involution parallèlement à elle-même en un point A de l'asymptote c en menant par A des droites r'_1, r'_2 et s'_1, s'_2 parallèles aux couples r_1, r_2 et s_1, s_2 et en considérant ces parallèles comme les couples déterminants de la nouvelle involution; sur la droite menée par B parallèlement à c on considère la ponctuelle en involution, qui est l'intersection de cette droite avec l'involution de rayons par A, et qui est déterminée par les couples de points R_1, R_2 et S_1, S_2, où cette droite coupe les couples de rayons déterminants r'_1, r'_2 et s'_1, s'_2. Maintenant la question se trouve ramenée à la construction du

[1]) En général, la podaire d'une courbe donnée C^n par rapport à un point donné B a autant d'asymptotes que C^n a de branches paraboliques, et chacune de ces asymptotes est la directrice de la parabole qui a B pour foyer et qui oscule C^n au point situé à l'infini de la branche parabolique correspondante.

cercle passant par A et par les points doubles imaginaires de l'involution déterminée par les couples de points R_1, R_2 et S_1, S_2. Et si les cercles décrits sur R_1R_2 et S_1S_2 comme diamètres se coupent en T_1 et en T_2, le cercle demandé sera déterminé par la condition de passer par A, d'avoir son centre sur $T_1\,T_2$ et de posséder, par rapport au milieu T de T_1T_2, une puissance égale au carré de T_1T. La construction de ce cercle n'offre pas de difficulté.

Le groupe des courbes symétriques du troisième degré qui peuvent être déduites du cercle, reçoit encore une extension, lorsqu'on ne permet pas seulement que B (fig. 6) se déplace sur le diamètre de A, mais aussi qu'une perpendiculaire quelconque à ce diamètre soit prise pour directrice; alors les courbes résultantes perdent toutefois la propriété de passer par les points cycliques. Nous allons considérer encore une couple de courbes que cette extension fait entrer dans le groupe.

Si nous admettons, comme dans la fig 12, que B est situé à l'infini et que *f* passe en direction perpendiculaire par le centre M du cercle à transformer, il en résulte une courbe du troisième degré passant par G, H et V, qui au point C de *f*, situé à une distance infinie, possède un point d'inflexion, dont l'asymptote A C est la tangente d'inflexion, et qui au point B, situé à une distance infinie, a un point double à branches imaginaires. Cette courbe est la courbe d'Agnesi. Il ressort assez clairement de la figure comment on détermine le point Q′ correspondant à Q, et comment on construit la tangente Q′U en ce point Q′. Je me borne donc à observer que cette courbe, ainsi que le remarque M. Godefroy, est dans une relation simple avec la cissoïde et la strophoïde déduites de K à l'aide du même point central A. En effet, si dans les trois courbes Q_c, Q_s et Q_a (fig. 13) sont les points qui correspondent à un même point Q de K, l'égalité de A M et de M V comporte la relation $Q\,Q_s = Q_s\,Q_c$, les droites A Q, M Q_s et Q_cV étant parallèles; Q_s est le milieu de Q Q_c. On a, en outre, $Q\,Q_a = Q_s\,T$, de sorte que $Q_aQ_s = T\,Q_c$. En prenant

maintenant, par rapport à A M, l'image $Q_{c'}$ du point Q_c de la cissoïde, on trouve que l'ordonnée Q_aT de la courbe d'Agnesi est la somme des ordonnées $Q_{c'}$T et Q_sT des deux autres courbes, cissoïde et strophoïde.

Une autre courbe connue, le folium de Descartes, est engendrée, lorsqu'on interpose B (fig. 14) entre A et M, au milieu de leur distance, et qu'on place *f* perpendiculairement à A M en un point N, pour lequel on a $NA = \frac{1}{4} AM (1+\sqrt{3})$. Cette courbe a en B un point double à tangentes réelles qui se coupent à angle droit [1]); la tangente en A au cercle est toujours asymptote au point d'inflexion C situé à l'infini, etc.

7. Passant maintenant aux courbes du quatrième degré qui peuvent être déduites du cercle, nous considérons d'abord (fig. 15) le cas où A est situé au centre de K, B quelque part à l'intérieur du cercle, C à l'infini dans la direction perpendiculaire à A B, et la directrice *f* à l'infini. Nous remarquons immédiatement que la courbe correspondante sera une conchoïde. Car, en vertu de sa construction, elle est engendrée aussi quand, sur chaque droite qui passe par B, on porte, de part et d'autre du point d'intersection N de cette droite avec A C, un segment constant (égal au rayon de K). Tout ce que nous allons trouver se rapporte donc à la conchoïde.

Parce que la droite A C, qui représente les deux côtés coïncidents du triangle fondamental A C E de Σ, est coupée par K, la conchoïde a deux branches se touchant en C suivant la droite A C et réelles de part et d'autre de C, ce qui d'ailleurs est indiqué par la forme de la courbe. Ensuite, la courbe a en B un point double, qui a des tangentes réelles tant que B, en se mouvant sur le diamètre $V_1 A V$ perpendiculaire

---

[1]) La condition, que la courbe ait en B deux tangentes se coupant à angle droit, détermine, une fois qu'on a pris $AB = \frac{1}{2} AM$, la distance N A en parties de A M ($= r$). En effet, puisque $\angle NAL = 60^\circ$ et $\angle NBL = 45^\circ$, on trouve, en posant $NA = x$, l'équation $x \, tg \, 60^\circ = (x + \frac{1}{2} r) \, tg \, 45^\circ$ ou $x \sqrt{3} = (x + \frac{1}{2} r)$, d'où il suit $x = \frac{1}{2} r \, (1 + \sqrt{3})$.

à A C, reste à l'intérieur du cercle, mais qui se change en un point de rebroussement lorsque B est situé sur le cercle, et en un point isolé lorsque B se trouve en dehors du cercle. Enfin cette courbe, qui évidemment a de nouveau pour axe de symétrie le diamètre $V_1 A V$ de K, passe par les points cycliques et par les points V_1 et V.

La construction de la tangente à la conchoïde, indiquée dans la figure, est au moins aussi simple que celle qui découle de la théorie de Roberval, et presque aussi simple que celle où l'on fait usage du centre instantané de rotation de la droite passant par B, où ce point d'intersection M de la perpendiculaire en B sur B Q′ et de la perpendiculaire en N sur A C n'a besoin que d'être joint à Q′ pour qu'on obtienne la perpendiculaire en Q′ à la tangente. Il est facile de démontrer que les deux constructions reviennent à parfaitement la même chose, parce que M Q′ est perpendiculaire à Q′ U. D'abord, on a immédiatement l'égalité des angles ∟ M N Q′ et Q′ Q U. Ensuite, des deux proportions M N : B N = Q T : Q U et NQ′ : B N = Q T : Q′ Q on déduit M N : N Q′ = Q′Q : Q U, d'où il résulte que les deux triangles M N Q′ et Q′ Q U sont semblables, que les angles ∟ M Q′N et ∟ Q Q′ U sont égaux, etc.

Après l'exemple d'une courbe C^4 à deux branches, qui se touchent en un point C et qui s'étendent aux deux côtés du point de contact, exemple donné par la conchoïde, la fig. 16 présente un exemple d'une courbe qui possède en C la particularité équivalente d'un point isolé avec direction déterminée de la tangente. Ainsi que le montre la figure, *f* est une tangente à K, B se trouve au centre de K, C sur *f* à l'infini, et A dans la direction perpendiculaire à B C à l'infini; ce qui fournit une courbe C^4 ayant, au point infiniment éloigné C, deux branches qui se touchent suivant la droite à l'infini A C, parce que cette droite A C coupe le cercle en des points imaginaires. Cette courbe possède un point double B à tangentes réelles, parce que la droite fondamentale correspondante C E, c'est-à-dire B C, coupe le cercle, et ce point double est en même temps point d'inflexion

pour chacune des deux branches, parce que cette droite B C coupe le cercle aux points de contact des tangentes menées de A au cercle. Bien que cette courbe ressemble, tant par sa forme générale que par la nature de son point double B, à la lemniscate de Bernouilli, elle est pourtant nécessairement une courbe différente. Car la lemniscate a des points doubles aux points cycliques, ce qui ne peut être le cas avec la courbe de la fig. 16, cette courbe ne passant même pas par les points cycliques. Car la droite à l'infini la coupe déjà en quatre points en C, de sorte que cette droite ne saurait la couper en un autre point, sans que la courbe dégénérât. Or, c'est ce qu'elle ne fait pas, puisque le cercle ne passe pas par un des points A, C, E.

Prend-on enfin, comme dans la fig. 17, pour les points centraux B et C deux sommets consécutifs d'un carré circonscrit à K, pour directrice f la diagonale de ce carré passant par C, et pour point central A le point situé à l'infini des perpendiculaires à B C, alors K se transforme en une courbe C^4, qui, parce que A C touche ce cercle, doit présenter au point C la singularité d'ordre supérieur d'un point de rebroussement de seconde espèce, avec A C pour tangente. Cette courbe possède aussi un point de rebroussement de première espèce en B, parce que la droite fondamentale C E, qui est ici B C, touche également le cercle K; de ce point de rebroussement la seconde diagonale du carré est la tangente. En outre, la courbe passe par les points d'intersection de K et de f, et elle touche le cercle K au point de contact de A B avec ce cercle.

8. Si d'un cercle on peut déduire une longue série de courbes unicursales C^4, inversement il n'est possible de remonter des données déterminantes de la courbe C^4 au cercle, que lorsque cette courbe C^4 passe par les points cycliques, que ses trois points doubles sont réels et qu'un de ces trois points se trouve à l'infini. Quand on sait, en effet, que la courbe a pour points doubles les trois points B, C, D (fig. 18), dont

le dernier est situé à l'infini, et qu'elle passe par les points donnés P'_1, P'_2, P'_3, on n'a qu'à fixer le point central A sur la droite C D pour être à même de déterminer les trois points P_1, P_2, P_3 et le cercle mené par ces trois points se convertira, par la transformation de Mac Laurin indiquée, en la courbe C^4.

Mais cela n'empêche pas, que théoriquement une courbe unicursale quelconque C^4, ne passant pas par les points cyliques et ayant trois points doubles réels, ne puisse être déduite du cercle. Car, B, C, D étant les points doubles, et P'_1, $P'_2 \ldots P'_5$ les cinq points simples qui avec les points doubles déterminent la courbe, on peut d'abord prendre comme directrice une droite arbitraire passant par D, puis encore comme point central A un point arbitraire de C D, pour déterminer ensuite les cinq points P_1, $P_2 \ldots P_5$ qui dans la transformation de Mac Laurin maintenant indiquée correspondent aux cinq point simples donnés de C^4, et mener par les cinq points déterminés la conique correspondant à C^4. Or, comme on peut disposer de deux grandeurs, la direction de la droite f passant par D et le lieu du point A sur C D, on peut assujettir cette conique à deux conditions et trouver par conséquent un certain nombre de cercles [1]) qui

[1]) Ce nombre est huit. En effet, si dans le triangle de référence D C B on représente le côté D C par $x = 0$, C B par $y = 0$ et B D par $z = 0$, qu'on prenne $z = m x$ pour équation de la directrice f passant par D, et qu'on détermine le point A par les équations $z = n y$ et $x = 0$, la courbe $f\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right) = 0$ de Σ' est convertie par la transformation de Mac Laurin en la courbe $f\left(y, x, \frac{m x - n y - z}{m n}\right) = 0$ de Σ. Elle transforme par conséquent la courbe $\left(A, B, C, D, E, F\right)\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right)^2 = 0$ de Σ' en

$$A m^2 n^2 y^2 + B m^2 n^2 x^2 + C (m x - n y - z)^2 + 2 D m n x (m x - n y - z) + \\ + 2 E m n y (m x - n y - z) + 2 F m^2 n^2 x y = 0,$$

et cette conique de Σ est un cercle lorsque les conditions suivantes

$$b^2 m^2 (B n^2 + 2 D n + C) + a^2 n^2 (A m^2 - 2 E m + C) - 2 a b (F m n - D n - E m) = \\ = c^2 n^2 (A m^2 - 2 E m + C) + b^2 C + 2 b c (E m - C) = \\ = a^2 C + c^2 m^2 (B n^2 + 2 D n + C) + 2 a c m (D n + C),$$

se laissent transformer dans la courbe à construire. Mais qu'on n'espère pas arriver de cette manière à la construction de la courbe C^4, car la détermination des cercles en question offre plus de difficulté que toute la construction elle-même [1]).

Lorsque deux des trois points doubles de la courbe C^4 sont imaginaires, non seulement par la transformation de Mac Laurin elle ne peut pas être déduite d'un cercle, mais elle ne peut même être déduite d'une conique. Car dans cette transformation l'échange de A et B ayant pour résultat l'échange des systèmes Σ et Σ', il faut que A, B et par conséquent aussi C, D, E, donc les trois points doubles B, C, D d'une courbe C^4 déduite d'une conique, soient réels. Donc, les courbes unicursales C^4 à deux points doubles imaginaires doivent être traitées par l'une des deux transformations quadratiques involutives. C'est ainsi que toute courbe unicursale C^4, dont les points cycliques sont des points doubles, se transforme, au moyen de la transformation par rayons vecteurs réciproques relativement au troisième point double pris pour centre, en conique. Et lorsque la courbe unicursale a des points

où $a = BD$, $b = DC$ et $c = CB$, sont remplies. Si l'on considère maintenant m et n comme les coordonnées rectangulaires d'un point P, le nombre des cercles est en même temps le nombre des points d'intersection, situés ni à l'infini ni à l'origine, des deux courbes

$$b^2x^2(By^2+2Dy+C)+a^2y^2(Ax^2-2Ex+C)-2ab(Fxy-Ex-Dy)=$$
$$=c^2y^2(Ax^2-2Ex+C)+2bc(Ex-C)+b^2C$$

et

$$b^2x^2(By^2+2Dy+C)+a^2y^2(Ax^2-2Ex+C)-2ab(Fxy-Ex-Dy)=$$
$$=c^2x^2(By^2+2Dy+C)+2acx(Dy+C)+a^2C.$$

Ce nombre est huit, parce que ces courbes ont aux extrémités des axes des points doubles communs, avec des tangentes qui en général ne sont pas communes. Mais ces huit solutions peuvent être imaginaires deux à deux.

[1]) La recherche analogue de courbes unicursales C^3 à trois points doubles réels, qui ne passent pas par les points cycliques, a été à dessein omise dans ce qui précède. Elle peut avoir lieu entièrement de la manière cidessus indiquée. Dans ce cas, on a simplement $A = 0$ (lorsque la courbe C^3 a un point double en B et passe une fois par C et D) et le nombre des solutions reste égal à huit.

doubles aux points cycliques on peut aussi faire usage du théorème d'après lequel une pareille courbe est, par rapport au troisième point double, la première podaire d'une conique. Ce qui démontre ce théorème, c'est que la première podaire négative de la courbe C^4 en question, par rapport au point double réel C de cette courbe, admet toujours deux tangentes passant par un point P quelconque, parce que le cercle décrit sur C P comme diamètre coupe la courbe C^4, hors des deux points cycliques et du point C, encore en deux autres points. Après ce qui précède, la construction d'une courbe C^4 de la nature indiquée, dont on connaît le point double réel et cinq autres points, pourra aisément être effectuée par le lecteur, à l'aide de la première podaire négative, courbe de la seconde classe, qu'on construira, tangente par tangente, au moyen du théorème de Brianchon.

Aux courbes unicursales du quatrième degré appartiennent aussi les courbes C^4 à point triple. Ces courbes ne peuvent pas être déduites immédiatement d'une conique, mais bien en deux temps. Car, inversement, une courbe C^4 à point triple ne peut être convertie en conique que par deux transformations successives de Mac Laurin. La première de celles-ci doit avoir pour point central B le point triple de la courbe et pour points C et D deux autres points de la courbe, ce qui convertit C^4 en une courbe C^3 ayant B pour point double. Et alors la seconde doit avoir le point double de cette courbe C^3 pour point B, C ou D, pour transformer la courbe C^3 en section conique.

Sans doute, toutes les courbes C^4, qu'on déduit des coniques à l'aide d'une transformation de Mac Laurin, possèdent trois points doubles réels, en vertu de leur mode de formation; mais, en ce qui concerne la nature de ces points doubles réels, toute supposition est possible. Cela est évident si l'on remarque que chaque couple de points d'intersection réels, chaque couple de points d'intersection imaginaires ou chaque point de contact de la conique avec un côté du triangle A C E

correspond respectivement à un point double à branches réelles, à un point isolé ou à un point de rebroussement de la courbe C^4. Par surcroît, dans la fig 19, j'ai indiqué par les signes + (point double à branches réelles), (point isolé) et — (point de rebroussement) pour chaque position de la conique par rapport au triangle A C E, la nature des points doubles de la courbe C^4 correspondante.

Je termine par l'examen de quelques exemples remarquables.

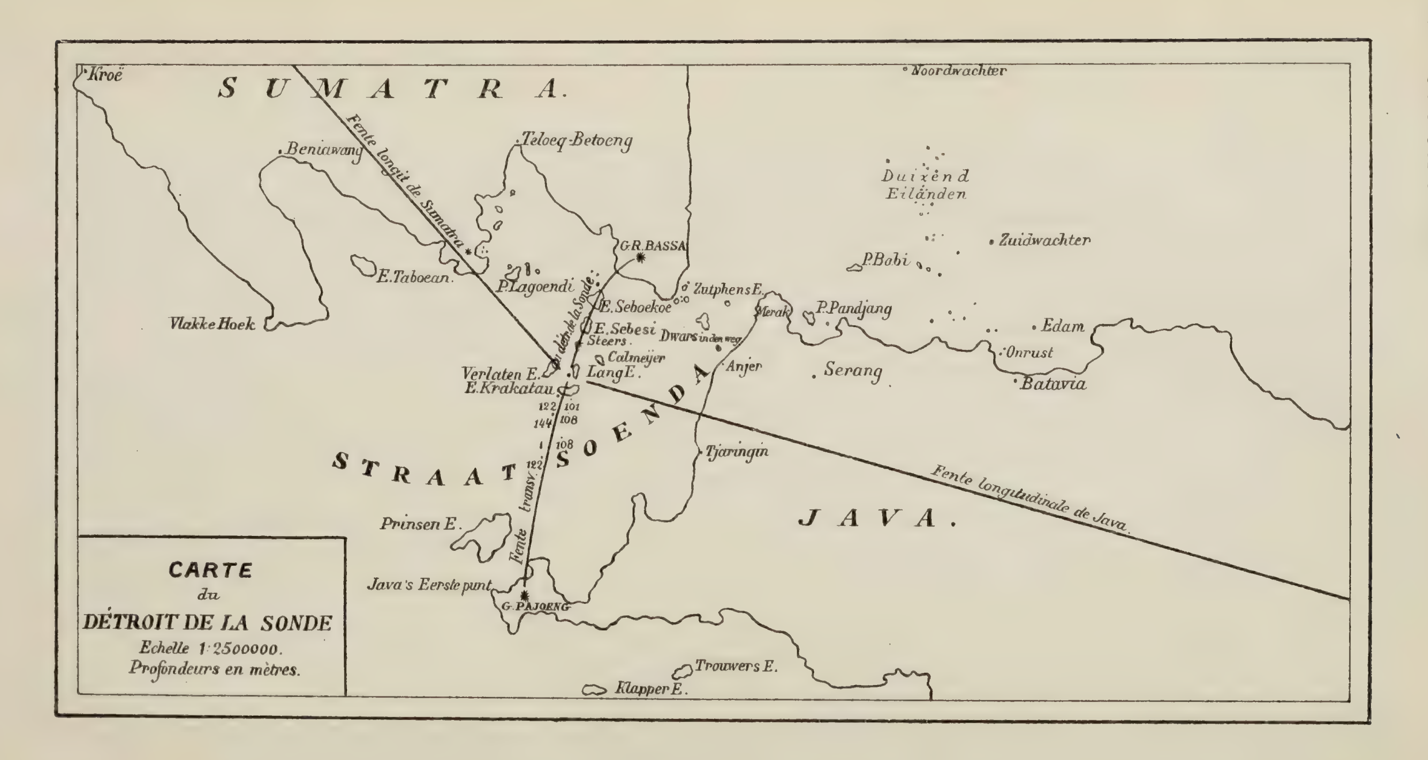
Si l'on prend (Pl. V, fig. 20) pour directrice un des côtés d'un carré inscrit dans K, pour points centraux A et C les points situés à l'infini sur les diamètres qui passent par les extrémités de ce côté, et pour point central B le centre du cercle, on obtient une courbe du troisième degré; car, le cercle K passant par E, la droite B C se détache de la courbe. Cette courbe a un point double au point D situé á l'infini sur la droite f, et ce point double est un point isolé, parce que la droite fondamentale A C de D coupe le cercle en des points imaginaires. De plus, B est centre de la courbe, parce que les deux points Q' et Q'_1 de la courbe, qui correspondent aux points Q et Q_1 situés sur une droite passant par A, ont une position symétrique par rapport à B; B est donc un point d'inflexion de la courbe. Si, à l'aide du point Q_2, on considère la génération des points Q'_2 de la courbe qui sont situés à l'intérieur du cercle, on trouve immédiatement que la tangente au point d'inflexion B fait avec le prolongement de E B un angle dont la tangente est 2. Evidemment ce résultat peut se déduire également de la construction générale de la tangente, dont je laisse l'application au lecteur, en le renvoyant à la fig. 4. Cette construction montre que le cercle K est cercle de courbure de la courbe aux points où il coupe A B.

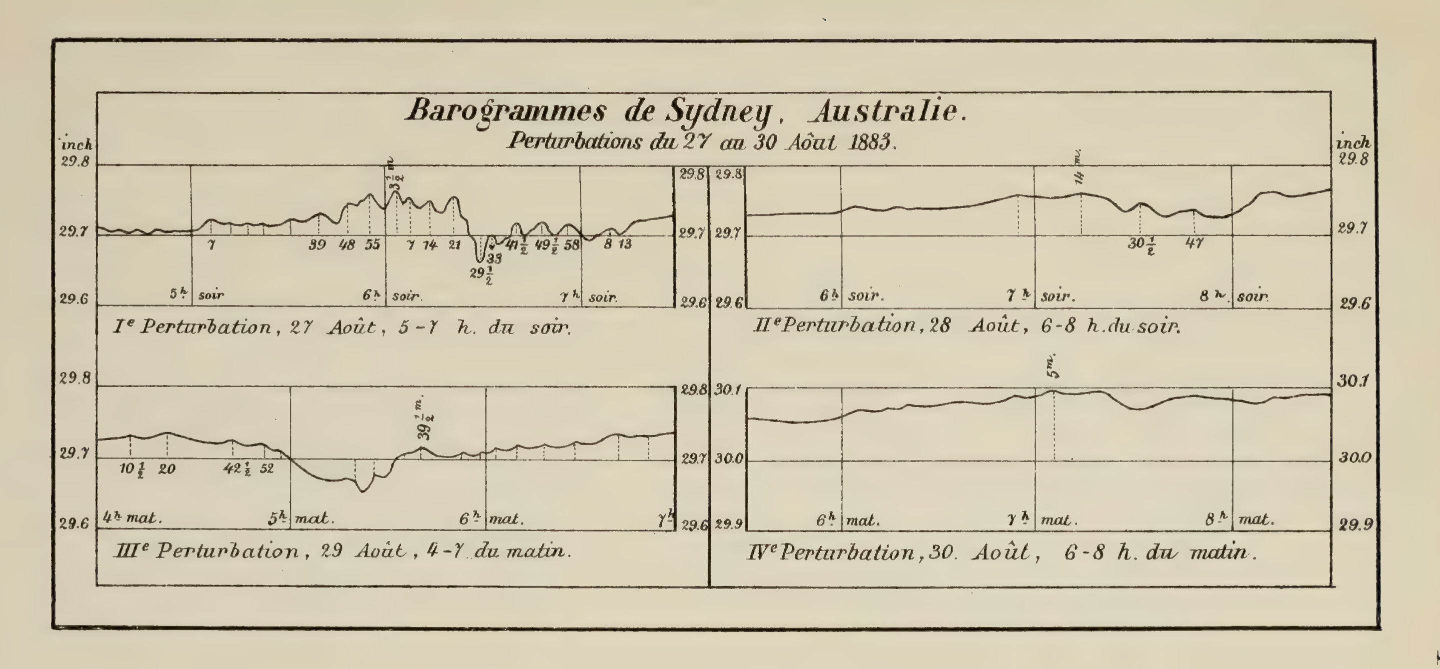
En second lieu, la fig. 21 donne un exemple d'une courbe du troisième degré qui, par le déplacement du point central C, se déduit du cas remarquable de la fig. 17. Cette courbe a en C un point double, dont C A et la tangente en C au cercle sont les tangentes. Je me bornerai à donner encore la

construction de la tangente au second point d'intersection F de la droite *f* et du cercle, construction qui s'applique aussi à la fig. 17. En F menez la tangente à K, et d'un point quelconque G de cette tangente la droite A G, qui coupe la directrice *f* en H, puis déterminez le point L où la droite menée par G parallèlement à la directrice coupe la droite menée par H parallèlement à B F; F L est alors la tangente cherchée.

Enfin, la fig. 22 représente une courbe du quatrième degré, ayant un point double D à tangentes réelles, un point isolé C et un point de rebroussement B. La tangente au point de rebroussement B est la droite A B. Les tangentes en D sont faciles à trouver; ce sont les droites de Σ' qui dans la transformation de Mac Laurin, correspondent aux droites, qui unissent le point E aux points G et H, rapportées à Σ. En outre, les droites B L et B N sont tangentes à la courbe en L et N.

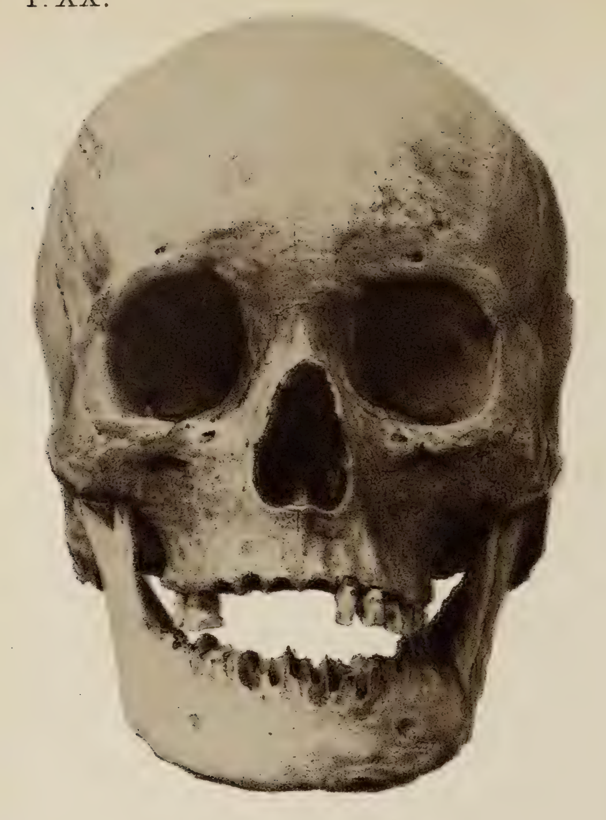



Kroë
S U M A T R A.
Noordwachter
Fente longit. de Sumatra
Teloeq-Betoeng
Beniawang
Duizend Eilanden
Zuidwachter
G.R. BASSA
P. Bobi
E. Taboean.
P. Lagoendi
Détroit de la Sonde
Zutphens E.
E. Seboekoe
Merak
P. Pandjang
Edam
Vlakke Hoek
E. Sebesi
Steers.
Dwars in den weg
Onrust
Calmeijer
Verlaten E.
Lang E.
Anjer
Serang
Batavia
E. Krakatau
122
101
144
108
108
122
S T R A A T S O E N D A
Tjaringin
Fente transv.
Fente longitudinale de Java.
J A V A.
Prinsen E.
Java's Eerste punt
G. PAJOENG
Trouwers E.
Klapper E.
CARTE
du
DÉTROIT DE LA SONDE
Echelle 1:2500000.
Profondeurs en mètres.

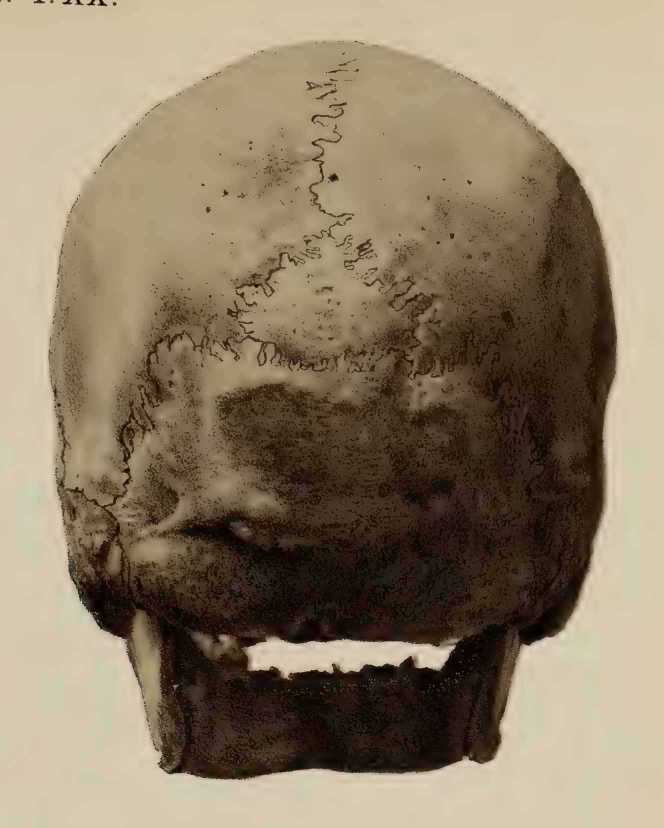

Barogrammes de Sydney, Australie.
Perturbations du 27 au 30 Août 1883.
Iᵉ Perturbation, 27 Août, 5-7 h. du soir.
IIᵉ Perturbation, 28 Août, 6-8 h. du soir.
IIIᵉ Perturbation, 29 Août, 4-7 du matin.
IVᵉ Perturbation, 30. Août, 6-8 h. du matin.







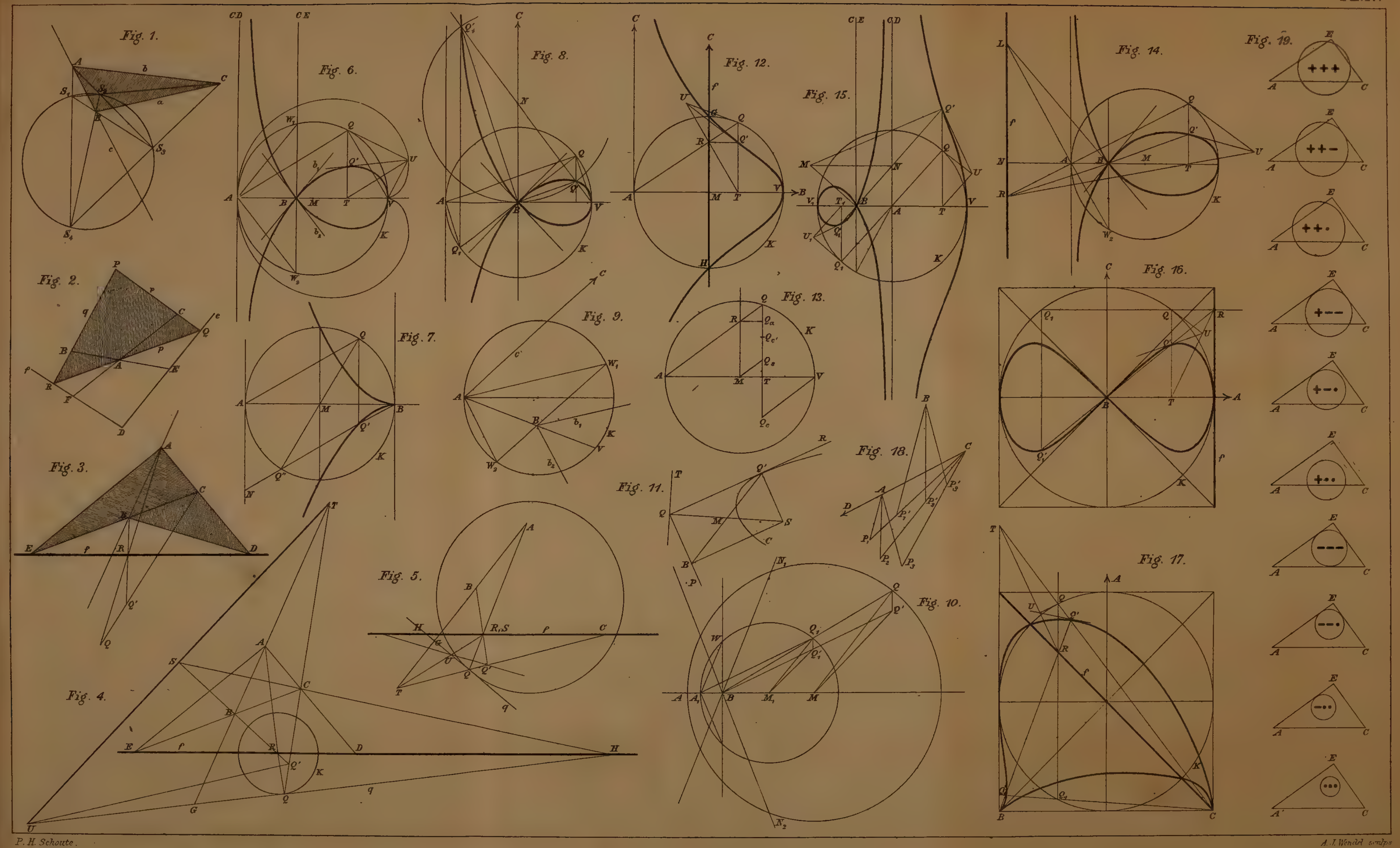
Amand Lith Amst.



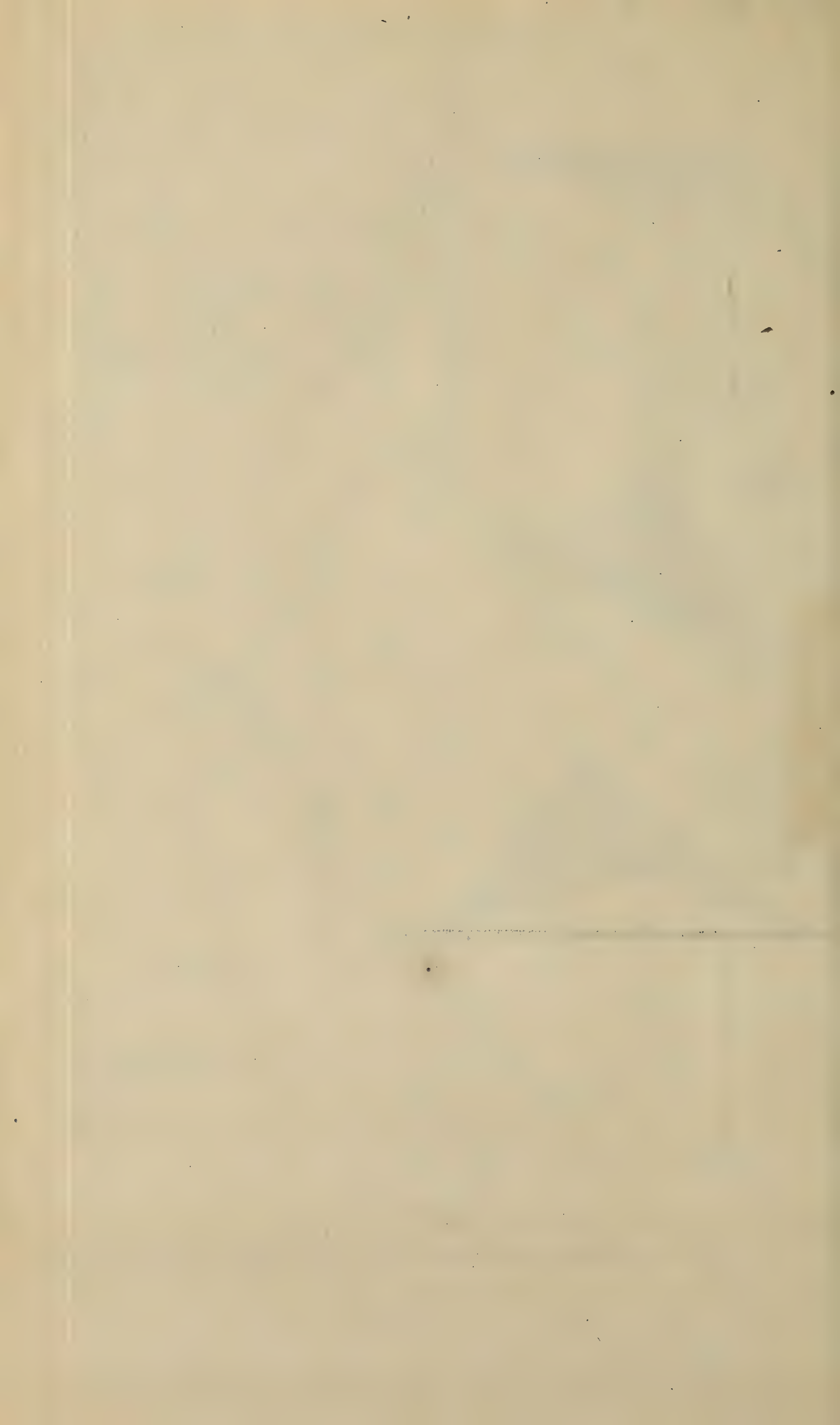


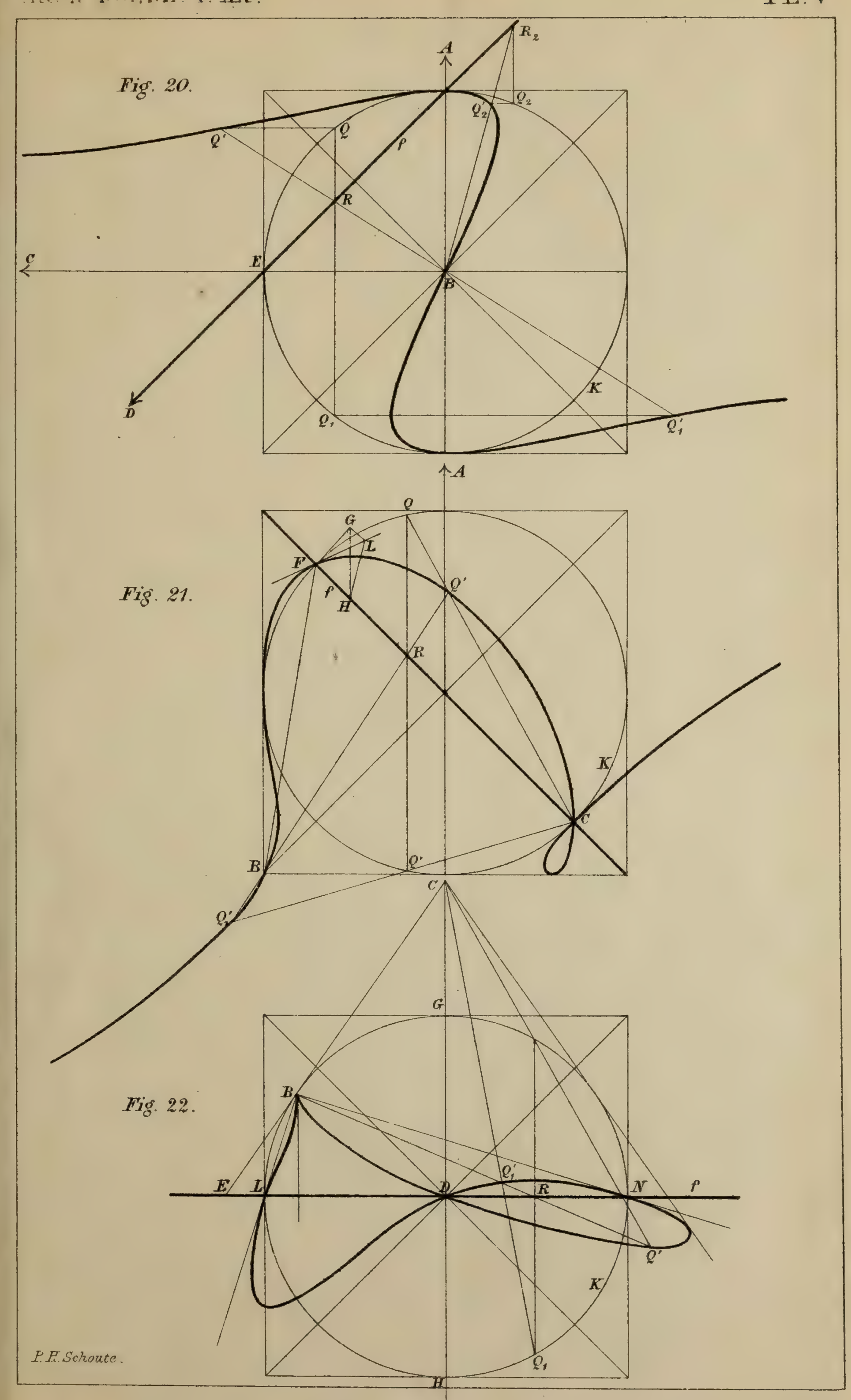
Amand Lith. An.



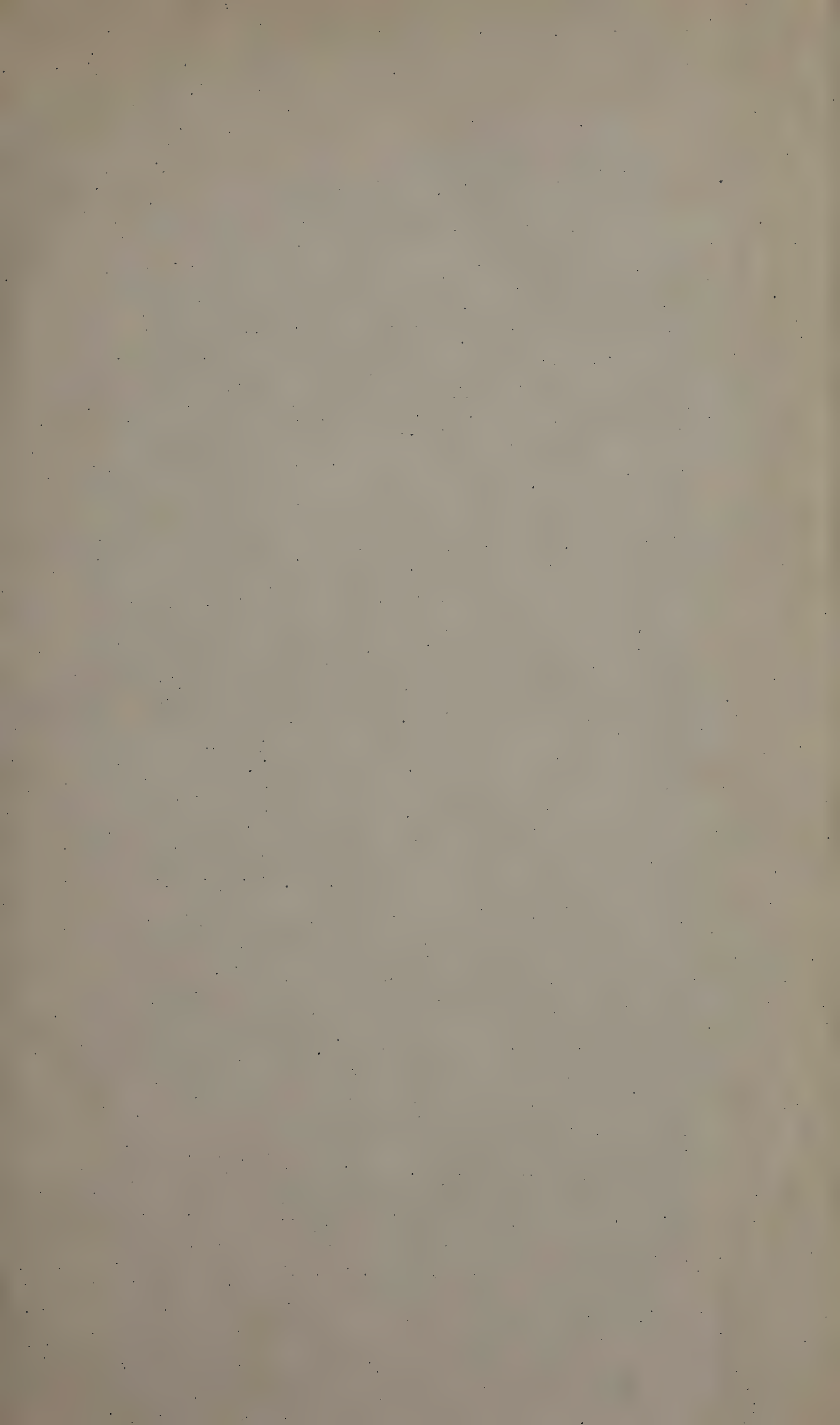


P. H. Schoute.
A. J. Wendel sculps




Fig. 20.
A
R2
Q2
Q'2
Q'
Q
f
R
C
E
B
K
D
Q1
Q'1
A
Fig. 21.
Q
G
L
F
f
H
Q'
R
K
C
B
Q'
Q'
C
Fig. 22.
G
B
E
L
D
Q'1
R
N
f
Q'
K
Q1
H
A
P. H. Schoute.





PREMIÈRE LIVRAISON.

R. D. M. Verbeek, Sur la détermination du temps de la plus forte explosion du Krakatau, le 27 août 1883 .... Pag. 1.
Dr. H. ten Kate, Description d'un crâne d'Indien moqui .... " 14.
G. J. Michaëlis Sur la théorie de la rotation des molécules dans un corps solide .... " 20.
Hugo de Vries, Une expérience de cours sur la diffusion .... " 36.
P. H. Schoute, Sur la construction de courbes unicursales par points et taugentes .... " 49.

CONDITIONS DE L'ABONNEMENT.

Les **Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles** paraissent à des époques indéterminées, en livraisons de 6 à 12 feuilles d'impression, avec un nombre illimité de planches coloriées et noires.

Trente feuilles forment un volume.

Avec la dernière livraison de chaque volume les souscripteurs reçoivent gratis une table des matières, un titre général et une couverture.

Les abonnements engagent à un volume seulement. Les livraisons ne se vendent pas séparément.

Le prix du volume, avec les planches, est fixé à *fl.* 6.—.

On souscrit chez l'éditeur et chez tous les libraires des Pays-Bas et de l'étranger.

Pour faciliter l'acquisition de la première série du recueil, composée des volumes I à X (années 1866—1875), avec tables alphabétiques générales des matières et des noms d'auteurs, cette série est offerte temporairement au prix réduit de:

fl. de Holl. 40 = francs 84 = marks 67.

Les personnes qui voudraient profiter de cette offre sont priées de s'adresser directement au Secrétaire de la Société hollandaise des sciences à Harlem.

HARLEM. — IMPRIMERIE DES HÉRITIERS LOOSJES.

TOME XX. 2me Livraison.

ARCHIVES NÉERLANDAISES

DES

SCIENCES
EXACTES ET NATURELLES

PUBLIÉES PAR

LA SOCIÉTÉ HOLLANDAISE DES SCIENCES À HARLEM,

ET RÉDIGÉES PAR

le Secrétaire de la Société,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. D. Bierens de Haan, C. A. J. A. Oudemans, W. Koster,
C. H. D. Buijs Ballot et C. K. Hoffmann.

HARLEM
LES HÉRITIERS LOOSJES.
1885.

PARIS
GAUTHIER-VILLARS.

LEIPSIG
G. E. SCHULZE.



ARCHIVES NÉERLANDAISES

DES

Sciences exactes et naturelles.

LA GAÎNE DU CYLINDRE CENTRAL

DANS LA

RACINE DES PHANÉROGAMES,

PAR

C. VAN WISSELINGH.

Introduction.

Cette forme de tissu, qu'on désigne aussi sous les noms de gaîne protectrice (*Schutzscheide*), gaîne des faisceaux (*Strangscheide*), endoderme intérieur (*innere Endodermis*), etc., a déjà, à différentes reprises, été l'objet de recherches anatomiques. Néanmoins, il m'a paru qu'en ce qui concerne la structure et le développement de ses cellules tout n'était pas encore complètement élucidé, et j'ai donc cherché à étendre un peu nos connaissances à ce sujet, au moyen d'une étude anatomique et microchimique, pour laquelle je me suis servi surtout de racines de Monocotylédones. Les résultats de cette étude ont déjà été publiés, avec assez de détails, dans les *Verslagen en Mededeelingen der Koninkl. Akad. van Wetensch.*, 3e Série, t. I, p. 141; ici, je me propose d'en donner un exposé plus succinct, après avoir d'abord rappelé les principaux résultats obtenus par mes devanciers.

Dans les racines des *Phanérogames*, la gaîne du cylindre central est généralement considérée comme l'assise cellulaire interne de l'écorce. M. Caspary [1]) énonça déjà cette opinion,

---

[1]) *Die Hydrilleen*, dans Pringsh. *Jahrb.*, I, p. 491.

qui fut confirmée pour différentes racines par M. Nicolai [1]), suivant la voie de l'histoire du développement.

Ce que la gaîne du cylindre central présente probablement de plus intéressant au point de vue anatomique, c'est le phénomène caractéristique que les parois longitudinales radiales et les parois transverses nous montrent sur des sections transversales et radiales et qui est connu sous le nom de tache ou point noir ou sombre de Caspary. M. Caspary [2]) explique ce phénomène par l'ondulation qui s'observe aux parois longitudinales sur des sections tangentielles, ondulation que M. Nicolai [3]) lui avait fait remarquer. M. Caspary [4]) étudia en détail la résistance à l'acide sulfurique concentré, qui est propre aux parois cellulaires de la gaîne du cylindre central, surtout aux parties ondulées de ces parois. Il fit voir [5]) que la gaîne à parois minces, telle qu'on la voit par exemple souvent dans la racine des Dicotylédones, est le même organe qu'on rencontre dans la racine des Monocotylédones, où la gaîne est ordinairement caractérisée par les parois fortement et irrégulièrement épaissies de ses cellules. Dans le jeune âge, en effet, cette dernière forme de gaîne possède, d'après M. Caspary, la même structure anatomique que la première. Entre elles deux, des formes intermédiaires ont été fréquemment trouvées par les observateurs postérieurs. Souvent, par exemple, les cellules de la gaîne du cylindre central ne se sont fortement épaissies que vis-à-vis des faisceaux libériens.

M. von Höhnel [6]) nous a fait connaître la structure et les propriétés chimiques de la paroi cellulaire. Celle-ci est com-

---

[1]) E. Pfitzer, *Ueber die Schutzsch. d. deutsch. Equisetaceen*, dans Pringsh. *Jahrb.*, VI, p. 353.

[2]) *Bemerk. über die Schutzsch.*, etc. dans Pringsh. *Jahrb.*, IV, p. 114.

[3]) Caspary, *Bemerk.* etc., *l. c.*, p. 102.

[4]) *l.c.*, p. 114.

[5]) *Die Hydrilleen*, *l.c.*, p. 443.

[6]) *Uber den Kork und verkorkte Gewebe überhaupt*, dans *Sitzungsber. d. Wiener Akad. d. Wissensch.*, Bd. 76, 1 Abth., 1877, p. 632,

posée, suivant lui, de trois lamelles: la membrane cellulosique (*Celluloseschlauch*), la lamelle subérifiée et la lamelle moyenne. La subérification de la gaîne du cylindre central a été démontrée par M. von Höhnel tant au moyen de la potasse caustique qu'à l'aide du chlorate de potasse et de l'acide nitrique.

En ce qui concerne l'ondulation, je dois spécialement attirer l'attention sur deux points; d'abord, suivant M. Caspary [1]), cette ondulation disparaît chez beaucoup de plantes, à la suite d'une extension longitudinale qui se fait plus tard, et qui est accompagnée de la formation de couches d'épaississement secondaires; en second lieu, d'après M. Schwendener [2]), il n'existerait le plus souvent pas d'ondulation du tout dans l'organe vivant. Ce dernier auteur attribue l'ondulation à ce que la turgescence primitive est diminuée par le fait de la préparation.

Outre les travaux que je viens de citer, il en a encore paru beaucoup d'autres sur la gaîne du cylindre central; mais, comme cet organe y est considéré surtout à des points de vue différents de celui auquel je me place dans le présent Mémoire, il sera inutile de rappeler les résultats de ces travaux.

Structure anatomique.

Les cellules de la gaîne du cylindre central possèdent quelquefois la forme parenchymateuse; dans la plupart des cas, toutefois, elles sont considérablement développées en longueur. Vues sur la section transversale, elles sont tantôt de dimensions égales dans la direction radiale et dans la direction tangentielle, tantôt plus ou moins allongées dans l'une de ces directions. La plupart des cellules se terminent par des parois transverses horizontales, chez d'autres ces parois sont plus ou moins obliques, quelques-unes enfin ont des extrémités en pointe.

---

[1]) *Bemerk.* etc., *l. c.*, p. 114.

[2]) *Die Schutzsch. und ihre Verstärkungen*, p. 5.

Sous le rapport de la nature physique et chimique et de l'épaississement de la paroi cellulaire, la gaîne du cylindre central offre beaucoup de faits intéressants. Je commencerai par décrire la forme la plus simple que ses cellules puissent affecter, forme que j'ai rencontrée chez le *Nardosmia fragrans* RCHB. et qui, à en juger d'après mes recherches, paraît exister dans toutes les racines de *Phanérogames*, à l'état jeune. Dans ce cas, il n'y a de subérifiée qu'une bande des parois latérales et transverses. Cette bande s'étend en direction longitudinale sur les parois latérales et en direction tangentielle sur les parois transverses. Les bandes subérifiées sont opposées l'une à l'autre dans les parois latérales et transverses. Elles sont séparées par la lamelle moyenne, qui, là où elle se trouve entre les parties subérifiées des parois, a subi une lignification. Sans l'emploi des réactifs, il est impossible, à cause de la faible épaisseur des parois en question, d'y reconnaître une structure en couches; les bandes subérifiées et la partie lignifiée de la lamelle moyenne ne se laissent alors pas distinguer l'une de l'autre (voir Pl. VI, fig. 4 et fig. 14 c. vl.). Les parties modifiées de la membrane paraissent être toujours situées à moins de distance de la paroi interne que de la paroi externe; parfois elles se trouvent très près de la paroi interne, par exemple, dans le *Nardosmia fragrans* et, à l'état jeune, dans le *Luzula sylvatica* BICHEN. et l'*Iris Guldenstaedtiana* BBRST. Sur les sections tangentielles, les parois latérales montrent presque toujours une ondulation distincte, ou du moins quelques légères sinuosités. Les parois transverses, au contraire, ne sont en général pas ondulées, sauf les obliques, qui possèdent ordinairement quelques faibles ondulations. Sur les sections radiales, l'ondulation se trahit par de nombreuses petites raies transversales plus ou moins accentuées, que les faces latérales portent là où se trouvent les bandes subérifiées. Sur la section transversale, les parois latérales montrent la tache dite de Caspary (fig. 4 et 14 c.vl.), et de même les parois transverses sur les sections radiales. Comme cause de ce phénomène on

regarde, ainsi qu'il été dit plus haut, l'ondulation. Je crois devoir admettre, toutefois, qu'il ne dépend pas moins de la modification de la membrane cellulaire, puisque, dans les sections radiales, il s'observe aussi sur les parois transverses non ondulées. Chez celles-ci, la partie modifiée de la membrane cellulaire se présente comme une petite ligne jaunâtre bien tranchée, qui se distingue nettement des parties contiguës de la membrane. Chez les parois latérales, le phénomène qu'une section transversale nous montre, pourvu qu'elle ne possède pas une trop faible épaisseur, est rendu, par l'ondulation, plus complexe et plus saillant. Nous remarquons, entre autres, qu'en visant à différentes profondeurs, la tache de Caspary se déplace dans la direction tangentielle (fig. 14 c.vl.), et par une observation attentive nous reconnaissons que cela est ordinairement le cas pour la paroi latérale entière; là où se trouve la tache de Caspary, l'ondulation est le plus prononcée et par conséquent le déplacement le plus fort, tandis que les bords ne se déplacent pas.

Dans beaucoup de cas, nous rencontrons dans la gaîne du cylindre central des cellules qui possèdent une membrane subérifiée entourant complètement la cavité (*Aristolochia Clematitis* L., *Tradescantia subaspera* KER.). D'une pareille membrane sont aussi toujours pourvues les cellules dans lesquelles s'est développée une paroi secondaire (*Tradescantia virginica* L., *Menyanthes trifoliata* L., *Funkia ovata* SPR. fig. 15 c. m., *Convallaria majalis* L., *Hemerocallis Kwanso* SIEB., *Iris Guldenstaedtiana* fig. 8 c. m., *Luzula sylvatica* fig. 21 c. m., *Radix Sarsaparillae de Honduras* et *de Veracruz*). Pour pénétrer dans la connaissance de ses particularités anatomiques, j'ai fait usage d'iode et d'acide sulfurique modérément concentré; par l'action de ces réactifs, la membrane subérifiée est colorée en brun, tandis que les parois de cellulose gonflent et prennent une couleur bleue. Sur une section transversale nous pouvons alors constater, dans la paroi externe et dans la paroi interne, que la membrane subérifiée est formée par la partie la plus

intérieure de la paroi primaire. Souvent elle y montre, après le traitement, des plis ou des sinuosités, et en même temps la lamelle moyenne est devenue visible (*Funkia ovata*, *Tradescantia subaspera* et *virginica*, *Aristolochia Clematitis*, *Menyanthes trifoliata*; voir fig. 4, 6 et 18); parfois on peut observer entre elle et la lamelle moyenne de la cellulose colorée en bleu (très distinctement surtout chez *Funkia ovata*). Dans d'autres cas, la membrane ne se plisse pas, mais reste intimement unie à la lamelle moyenne (*Iris Guldenstaedtiana* fig. 9, *Luzula sylvatica* fig. 22, *Convallaria majalis*, *Radix Sarsaparillae de Honduras* et *de Veracruz*).

Au moyen de l'iode et de l'acide sulfurique on ne peut pas mettre en évidence la structure en couches des parois primaires latérales et transverses. Mais on y réussit en faisant usage du chlorate de potasse et de l'acide nitrique. Lorsqu'on chauffe avec ces réactifs une section transversale de la gaîne du cylindre central, la membrane subérifiée prend une couleur jaune. Elle devient libre d'abord dans les parois externe et interne, puis dans les parois latérales, et ordinairement elle se plisse. Dans les parois nommées en dernier lieu, la lamelle moyenne aussi devient en général visible (*Funkia ovata*, fig. 23 m.); elle se présente alors toujours comme une membrane ordinaire de cellulose, parce que, dans le cas où elle était lignifiée, le réactif lui a enlevé sa lignine; on en rend l'observation très facile en éloignant maintenant par la potasse caustique la membrane subérifiée. Parfois elle se dissout dans le mélange de chlorate de potasse et d'acide nitrique, de sorte qu'on ne peut pas l'observer (*Luzula sylvatica*). Prolonge-t-on quelque temps le traitement à chaud par l'acide nitrique et le chlorate de potasse, les parties subérifiées de la paroi se gonflent subitement et s'agglomèrent en grumeaux d'acide cérinique (fig. 24 c.b.). Dans cette réaction, appelée par M. von Höhnel [1]) réaction cérinique, ainsi que dans ses réactions par la potasse caustique [2]) et par l'acide chromique,

---

[1]) *l.c.*, p. 522.

[2]) Chez *Iris*, j'ai obtenu par la potasse caustique des résultats meilleurs

nous possédons d'excellents moyens pour déceler les parties subérifiées de la gaîne du cylindre central.

Dans beaucoup de cas, parmi lesquels il y en a aussi où il s'est développé une paroi secondaire, les parois latérales et transverses montrent, après avoir été traitées par l'iode et l'acide sulfurique concêntré, deux petites raies très rapprochées l'une de l'autre, qui présentent quelque irrégularité dans leur cours, et souvent ressemblent plus ou moins à deux rangées de points juxtaposés (fig. 12 s.). Tantôt ces deux raies sont situées près de la paroi primaire interne (*Radix Sarsaparillae de Honduras* et *de Veracruz*, *Iris Guldenstaedtiana*), tantot plus au milieu de la paroi primaire latérale, mais toujours elles se trouvent à une distance moindre de la paroi interne que de la paroi externe (*Funkia ovata*, *Convallaria majalis*, *Menyanthes trifoliata*, *Tradescantia virginica*). Il n'est pas rare que, même sans l'emploi de réactifs, on puisse déjà distinguer deux petits points sur les parois primaires (fig. 15 p u.). Parfois les raies sont nettement visibles après l'action de l'iode et de l'acide sulfurique, bien que, avant ce traitement, les susdits points ne pussent être aperçus (*Iris Guldenstaedtiana* fig. 12 s.). Il arrive aussi quelquefois que ni les unes ni les autres ne se laissent discerner (*Luzula sylvatica*). Ce que sont les raies et les points en question, l'histoire du développement nous l'apprendra.

Lorsque l'épaississement primaire des parois externe et interne est pourvu de ponctuations (*Funkia ovata* fig. 15 et 16 p u., *Hemerocallis Kwanso*, *Tradescantia virginica*, *Menyanthes trifoliata*), la membrane subérifiée se continue sur les places plus minces.

La lamelle moyenne éprouve souvent une lignification. Elle y paraît surtout sujette dans les parois latérales.

que ceux obtenus précédemment Une section transversale ayant été préalablement traitée par l'acide sulfurique un peu étendu, traitement à la suite duquel la membrane subérifiée se trouve plus ou moins débarrassée de la paroi secondaire, la réaction par la potasse caustique me réussit. Elle est surtout très nette chez les jeunes états de développement, lorsque la membrane subérifiée, après le traitement par l'acide sulfurique, s'est plissée et est devenue visible séparément.

Dans le cas où les cellules de la gaîne du cylindre central possèdent une membrane subérifiée, comme il a été décrit ci-dessus, la paroi latérale primaire est sur toute sa largeur, sauf aux bords, ondulée à un degré égal, ce que nous pouvons inférer de la manière dont cette paroi, vue à différentes profondeurs sur une section transversale, se déplace en direction tangentielle (fig. 15). Le phénomène caractéristique, qui chez le *Nardosmia fragrans* nous est offert seulement par une petite partie de la paroi latérale, vue sur une section transversale, se manifeste maintenant sur toute l'étendue de cette paroi, pourvu, bien entendu, que des couches d'épaississement secondaires ne se soient pas appliquées contre elle. Lorsqu'une pareille application a lieu (*Funkia ovata, Hemerocallis Kwanso*, *Menyanthes trifoliata*, *Tradescantia virginica*, *Iris Guldenstaedtiana*), le phénomène disparaît totalement, ou presque totalement. Seul le déplacement produit par une observation à différentes profondeurs reste visible malgré la paroi secondaire (fig. 15). Sur les sections radiales, l'ondulation se trahit par de nombreuses petites raies transversales, plus ou moins fortement accusées, qui s'étendent à peu près sur toute la paroi latérale. En cas de développement d'une paroi secondaire, on observe ordinairement sur la paroi latérale des raies transversales alternativement claires et sombres qui ne sont pas nettement accusées (fig. 11).

Parfois il arrive que les parois latérales et transverses ne sont subérifiées que sur une étroite bande, mais que leur lamelle moyenne est lignifiée en entier (quelques parois latérales et transverses chez *Funkia ovata*). L'image que de pareilles parois nous donnent à contempler sur des sections transversales, soit que l'ondulation existe, soit qu'elle manque, ne diffère pas notablement de celle que nous ont offerte les parois où la subérification s'étend à toute la largeur de la paroi. La lignification de la lamelle moyenne influe donc aussi sur la manière dont le phénomène se manifeste.

Parmi les cas où une paroi secondaire s'est développée, il

y en a où les parois latérales primaires ne sont pas ondulées, ou ne sont qu'un peu sinueuses. La paroi secondaire, dont le développement est ordinairement inégal, montre tout au plus, sur les sections tangentielles, une légère flexuosité, même lorsque la paroi primaire est fortement ondulée.

Les cellules qui se trouvent vis-à-vis des faisceaux libériens se distinguent souvent, sous plus d'un rapport, de celles qui font face aux vaisseaux ligneux primaires, entre autres par la possession d'une membrane subérifiée et en outre fréquemment par celle d'une paroi secondaire, ainsi que par un développement notablement plus fort dans le sens de la longueur (*Funkia ovata* et *Convallaria majalis*).

J'ai déjà rappelé que M. Schwendener [1]) regarde l'ondulation comme due à une diminution de la turgescence, produite par l'opération même de la section. Ce sont surtout ses observations sur la racine d'un *Iris* et sur la tige de l'*Elodea canadensis* qui l'ont conduit à ce résultat. Chez la seconde de ces plantes, il trouva, sur des sections tangentielles, qu'une cellule de la gaînc du cylindre central, qui avait été coupée en deux et arrachée des cellules corticales, présentait l'ondulation, tandis que cela n'était pas le cas pour des cellules intactes et encore unies à l'écorce. Ayant répété ces observations, j'ai également constaté l'absence d'ondulation chez les cellules restées à l'état d'intégrité et d'union avec l'écorce, quoique pourtant une légère flexuosité s'y fît ordinairement déjà remarquer. Chez les cellules coupées en deux, les ondulations étaient au contraire distinctement visibles, bien qu'elles ne fussent pas particulièrement fortes. En ce qui concerne l'*Elodea canadensis*, mes résultats concordent donc en grande partie avec ceux de M. Schwendener. Mais, pour la racine d'une espèce d'*Iris*, il en fut tout autrement. Sur des sections tangentielles d'une racine dépouillée de l'écorce, M. Schwendener n'observa pas l'ondulation; il la trouva, par contre, lorsque les rapports entre les cellules de la gaîne et l'écorce avaient été respectés. Quant à moi, chez

[1]) *l.c.*, p. 43 et suiv.

l'*Iris Guldenstaedtiana*, j'ai vu la paroi latérale primaire tantôt fortement ondulée, tantôt non ondulée ou tout au plus légèrement flexueuse. En vain j'ai cherché à m'assurer que cette différence dût être attribuée au mode de préparation. Chez quelques racines ou parties de racines je trouvai les parois latérales primaires de toutes les cellules de la gaîne distinctement ondulées, tandis que la paroi secondaire offrait de légères flexuosités. Quelle qu'eût été la réussite de la section, que la gaîne du cylindre central fût restée ou non en rapport avec l'écorce, que les cellules eussent été coupées en deux ou fussent encore intactes, toujours l'ondulation se présentait de la même façon. Dans les sections radiales également, elle était toujours reconnaissable sur la paroi latérale à des raies transversales alternativement foncées et claires. Chez d'autres racines, au contraire, je n'observai jamais d'ondulation, de quelque manière que les sections eussent été faites. Dans ce cas, les raies transversales foncées et claires manquaient aussi sur les sections radiales. De ces observations il fallait conclure que, chez l'*Iris Guldenstaedtiana*, la préparation n'exerçait pas d'influence appréciable sur l'ondulation. Le résultat fut le même pour le *Funkia ovata*.

Tout en concédant à M. Schwendener que dans certains cas la manipulation joue un rôle dans le phénomène, je ne puis donc admettre, comme règle, que l'ondulation soit toujours occasionnée par l'acte même de la section. Je crois plutôt que, là où nous voyons au microscope une ondulation distincte, elle existe déjà dans l'organe vivant. Je suis fortifié dans cette opinion par les recherches de M. Ed. Strasburger [1]) sur l'accroissement de volume qui a lieu lors de la cuticularisation (subérification). Tant par l'étude des propriétés optiques des couches cuticularisées que par la voie de l'histoire du développement, M. Strasburger est arrivé à ce résultat, que la cuticularisation s'accompagne d'une augmentation de volume.

---

[1]) *Ueber den Bau und das Wachsthum der Zellhäute*, p. 146, 199, 210 et suiv.

D'après lui, cette augmentation est la cause des dessins variés et souvent très caractéristiques que la cuticule présente chez beaucoup de plantes. Ces dessins seraient produits par les plis qui se forment dans les couches cuticularisées, en conséquence de leur accroissement de volume. Les résultats de M. Strasburger ont évidemment aussi de l'importance pour la gaîne du cylindre central. Si nous devons admettre que, dans cette gaîne également, la cuticularisation (subérification) détermine un accroissement de volume, l'ondulation des minces parois latérales primaires et des parois transverses obliques s'explique d'une manière très simple. Il est vrai que l'ondulation manque généralement dans les parois transverses horizontales, dans les parois externe et interne, et, en certains cas, même dans les parois latérales; mais, selon toute probabilité, cela doit être attribué à différentes circonstances accessoires.

Chez neuf plantes, dont la gaîne du cylindre central montrait une ondulation prononcée, j'ai compté combien d'ondes il y avait en moyenne par millimètre; le résultat fut que leur nombre variait de 100 à 500.

Histoire du développement.

J'ai étudié le développement de la gaîne du cylindre central chez trois Monocotylédones, l'*Iris Guldenstaedtiana*, le *Funkia ovata* et le *Luzula sylvatica.* Voici les résultats auxquels ces observations m'ont conduit.

Avant que les premiers vaisseaux ligneux commencent à se différencier, la partie interne du périblème (fig. 1 et fig. 17) est occupée par des cellules disposées en rangées radiales. Celles-ci doivent naissance à des divisions tangentielles (fig.1 t.d.) dans l'assise interne des cellules du périblème. Chez le *Funkia* et l'*Iris*, les parois formées lors de ces divisions ne sont pas placées vis-à-vis l'une de l'autre, mais de telle sorte que les cellules de deux rangées contiguës alternent entre elles. Chez le *Luzula*, au contraire, ces parois se correspondent, d'où il

résulte que les cellules situées plus à l'intérieur du périblème sont aussi situées en rangées concentriques. La limite entre le périblème et le plérome est toujours nettement reconnaissable à ce que les parois radiales de l'assise cellulaire interne du périblème et celles de l'assise externe du plérome ne se trouvent jamais vis-à-vis les unes des autres. La première de ces assises de cellules donne naissance à la gaîne du cylindre central, tandis que de la seconde se différencie le péricambium. Le long des côtés externe et interne de la gaîne du cylindre central se forment des interstices, à un moment où ceux-ci existent déjà en abondance dans le reste du périblème. Chez *Funkia* et *Iris* on ne rencontre jamais d'interstices à quelques-uns des angles des cellules de la gaîne, tandis qu'à d'autres angles ils sont plus tard remplis d'une matière quelconque.

Chez *Funkia* et *Iris* les parois externe et interne de la gaîne du cylindre central se distinguent de bonne heure d'autres parois cellulaires par un plus fort accroissement en épaisseur (fig. 2, 13 et 14); cela est surtout le cas pour la paroi externe. Après le traitement par l'iode et l'acide sulfurique médiocrement concentré, on observe le long de la lamelle moyenne, qui ne prend pas de coloration sensible, une lisière bleue, que nous devons regarder comme la couche d'épaississement primaire (fig. 3 p.v.). Son bord interne éprouve bientôt une modification, qui se décèle par une résistance plus grande à l'action de l'acide sulfurique. Chez *Luzula*, à l'état jeune, on voit également, après le susdit traitement, une lisière bleue le long de la lamelle moyenne des parois externe et interne, quoique cette lisière soit plus étroite que chez les deux plantes nommées en premier lieu. Les parois latérales des cellules de la gaîne du cylindre central sont, à l'état jeune, toujours caractérisées par leur très faible épaisseur et, chez *Iris*, en outre par un allongement considérable dans la direction radiale. Je n'ai pu distinguer chez elles, dans l'état de jeunesse, ni lamelle moyenne, ni épaississement primaire.

Dans l'état de jeunesse, une bande étroite des parois laté-

rales et transverses subit une modification, qui s'accompagne de l'apparition de la tache de Caspary. D'abord celle-ci se présente comme un petit point jaunâtre (fig. 13 c.vl.), bientôt comme une petite raie jaunâtre nettement limitée (fig. 4 et fig. 14 c.vl.), qui, en visant à différentes profondeurs, souvent paraît se déplacer. Plus haut (p. 98 et 99) j'ai déjà parlé de la cause de ce phénomène. Chez le *Funkia*, la tache de Caspary est toujours plus rapprochée de la paroi interne que de la paroi externe, et chez l'*Iris* et le *Luzula* elle se trouve très près de la paroi interne.

Les gaînes des cylindres centraux des trois plantes qui viennent d'être nommées sont du genre de celles où il se développe une membrane subérifiée, entourant de toute part la cavité de la cellule. Tandis que chez le *Luzula* ce processus s'accomplit dans toutes les cellules simultanément, chez le *Funkia* et l'*Iris* il commence dans quelques cellules situées vis-à-vis des faisceaux libériens, d'où il s'étend peu à peu sur toute la gaîne du cylindre central. Chez l'*Iris*, toutes les cellules de la gaîne acquièrent une membrane subérifiée, mais chez le *Funkia* il arrive souvent que cette membrane ne se développe pas dans une ou deux cellules vis-à-vis des vaisseaux ligneux primaires. Traitée, à l'état jeune, par l'iode et l'acide sulfurique un peu dilué, la membrane subérifiée se colore en brun; dans les parois externe et interne elle se sépare de la lamelle moyenne et forme ordinairement de nombreux replis (fig. 4, 6 et 18). A l'état adulte, elle reste, chez l'*Iris* et le *Luzula*, adhérente à la lamelle moyenne. Chez le *Funkia*, tant à l'état jeune qu'à l'état adulte, on observe après le traitement en question, dans les parois externe et interne, entre la membrane subérifiée et la lamelle moyenne, de la cellulose colorée en bleu; d'où je crois pouvoir conclure que la membrane subérifiée doit être regardée, dans ces parois, comme la partie la plus interne de la couche d'épaississement primaire. Pour la paroi externe de l'*Iris* le cas me paraît être le même, et cela d'après les observations suivantes. Dans l'état jeune de cette paroi, après

le traitement susdit, j'ai également vu, entre la membrane subérifiée et la lamelle moyenne, une matière colorée en bleu. Sur des états de développement plus avancés, après ébullition préalable avec la potasse caustique, pour éloigner la membrane subérifiée, j'ai réussi, toujours à l'aide de l'iode et de l'acide sulfurique un peu étendu, à constater, entre la lamelle moyenne et la membrane subérifiée, l'existence d'une couche. Celle-ci, à la suite du traitement par les réactifs en question, était gonflée et colorée en bleu, tandis qu'au côté interne elle présentait un bord jaune. Chez le *Luzula* je n'ai pu découvrir aucune substance particuliere entre la lamelle moyenne et la membrane subérifiée, ni dans la paroi externe, ni dans la paroi interne; il est probable qu'ici l'épaississement primaire tout entier a subi une subérification.

Chez le *Funkia*, l'épaississement primaire des parois externe et interne est pourvu de larges canalicules; là où ils se trouvent, la membrane subérifiée s'infléchit vers la lamelle moyenne et se prolonge sur les places plus minces de la paroi (fig. 15).

Sur les minces parois primaires latérales et tranverses, qui sont composées de deux membranes subérifiées et d'une lamelle moyenne (fig. 23), nous pouvons, chez le *Funkia* et l'*Iris*, aussi bien avant qu'après la formation de la paroi secondaire, indiquer la place où se trouvait antérieurement la tache de Caspary. A l'aide de l'iode et de l'acide sulfurique il n'est pas difficile de la trouver; chez le *Funkia* cela réussit même sans l'emploi de réactifs; elle se reconnaît aux raies (fig. 12, s.) et aux points (fig. 15 et 16 p u.) ci-dessus décrits (p. 101).

La lignification de la lamelle moyenne, qui chez le *Funkia* et le *Luzula* reste principalement bornée aux parois latérales et transverses, commence de bonne heure. Chez le *Funkia*, dans les parois latérales et transverses et dans les minces cloisons qui ferment les canalicules, la lamelle moyenne a déjà subi une lignification avant que ne soit formée la membrane subérifiée, et lorsque les cellules ne se pourvoient pas d'une pareille membrane, la lamelle moyenne éprouve encore, aux endroits précités, la modification en question.

Le dernier phénomène qui appartienne à l'histoire du développement de la gaîne du cylindre central est la formation de la paroi secondaire. Celle-ci, chez le *Funkia* et l'*Iris*, apparaît d'abord dans quelques cellules situées vis-à-vis des petits faisceaux libériens, puis dans les cellules voisines, mais seulement dans celles qui ont acquis une membrane subérifiée. Aussi, chez le *Funkia*, vis-à-vis des vaisseaux ligneux primaires, dans celles des cellules qui ne se tapissent pas d'une pareille membrane, la paroi secondaire ne se développe-t-elle pas. Chez l'*Iris*, elle se forme dans toutes les cellules; vis-à-vis des faisceaux libériens, le processus commence déjà alors qu'ailleurs la membrane subérifiée n'est pas encore développée. Chez le *Luzula*, la formation de la paroi secondaire commence simultanément dans toutes les cellules, de même que la formation de la membrane subérifiée, processus qui précède celui mentionné en premier lieu.

Chez l'*Iris* et le *Luzula* j'ai suivi dans ses détails le développement des parois secondaires inégalement épaissies, parce que, dans l'étude de l'accroissement en épaisseur, les parois cellulaires de ce genre ne paraissent pas encore avoir attiré beaucoup l'attention. Chez l'*Iris*, je suis arrivé, par l'emploi de l'iode et de l'acide sulfurique médiocrement concentré, à cette conclusion, que la paroi secondaire naît et s'épaissit par apposition. Sa première couche, l'extérieure, s'applique sur la membrane subérifiée; les couches suivantes s'appliquent successivement l'une sur l'autre. La partie interne de chaque couche subit, avant que celle-ci ne soit recouverte par la suivante, une modification: elle se différencie en pellicule limitante. Lorsque des cellules de la gaîne du cylindre central, dans lesquelles l'épaississement secondaire a déjà fait quelques progrès, sont traitées par le réactif de Schultze, les couches d'épaississement formées se colorent en bleu; cela est surtout le cas de la couche interne ou la plus jeune, qui en même temps paraît souvent se gonfler un peu. Par l'action modérée de l'iode et de l'acide sulfurique suffisamment dilué, on peut faire

gonfler la couche la plus jeune (fig. 7 j. l.) sans déterminer de gonflement notable dans les couches plus anciennes. Cette couche apparaît alors, si elle ne possède pas encore de pellicule limitante, comme un liséré bleu plus ou moins large, suivant l'épaisseur qu'elle a atteinte; elle se distingue nettement des autres couches, qui le plus souvent sont colorées en vert ou en vert-bleuâtre. La couche périphérique du protoplasma, avec ses microsomes (fig. 6 m k r s.), est d'ordinaire, de même qu'avant le gonflement, intimement unie à la paroi cellulaire. Dans certains cas, la couche gonflée montre des lignes claires et foncées (fig. 7), qui par rapport à la cellule sont dirigées radialement. Parfois la couche la plus jeune possède une pellicule limitante, qui résiste plus longtemps à l'action de l'acide sulfurique; sa faculté de gonflement est alors moindre. Lorsque l'acide sulfurique agit un peu plus fortement, les couches plus anciennes se gonflent à leur tour; cela est surtout le cas des parties extérieures (fig. 6 c.), qui après le gonflement montrent nettement la réaction de la cellulose; les pellicules limitantes (fig. 6 g.), qui résistent mieux à l'acide sulfurique, n'ont pas éprouvé de gonflement notable et ne se sont que peu colorées. La modification que subissent les parties internes des couches est une lignification; on peut s'en convaincre au moyen de l'acide chlorhydrique et de la phloroglucine.

A l'état adulte (fig. 8), les cellules de la gaîne du cylindre central possèdent, sur les parois interne, latérales et transverses, un épaississement secondaire considérable, qui présente une structure stratoïde. Sur les parois latérales et transverses, cet épaississement diminue à mesure qu'il approche de la paroi externe, où il est très peu développé. Rarement on peut l'y reconnaître sans l'emploi des réactifs, ou même par l'iode et l'acide sulfurique; aussi, dans les figures, n'est-il ordinairement pas indiqué. Mais lorsque des préparations, où la paroi secondaire présente un certain développement, sont chauffées quelque temps avec une solution concentrée de potasse caustique, ce qui détruit la membrane subérifiée, l'épaississement de la paroi

externe devient manifeste. D'ailleurs, en traitant par l'iode et l'acide sulfurique peu concentré des états encore jeunes de la gaîne du cylindre central, on peut souvent reconnaître que la première couche, l'extérieure (fig. 6 e.l.) entoure la cavité aussi au côté externe, ce qui peut-être est parfois également le cas pour une ou deux des couches suivantes. Les autres couches s'étendent sur les parois interne, latérales et transverses; au côté interne elles sont le plus épaisses, ce dont on peut également se convaincre le mieux sur l'état jeune, à l'aide de l'iode et de l'acide sulfurique un peu dilué. A l'état adulte, les couches secondaires sont d'abord colorées en bleu par ce réactif, sauf à la paroi interne, où elles prennent une couleur plutôt jaune. Ensuite (voir fig. 9) elles se gonflent, d'où résulte la rupture de la membrane subérifiée, ce qui leur permet de s'épanouir. On peut alors se convaincre que le nombre des couches est beaucoup plus grand qu'il ne le semble avant l'addition des réactifs; souvent on en compte jusqu'à vingt. Les pellicules limitantes (fig. 9 g.) sont fortement colorées en jaune au milieu, par suite de la lignification, tandis qu'aux extrémités elles ont ordinairement pris une teinte jaunâtre. Souvent on peut observer qu'elles sont unies entre elles par leurs extrémités, mais il n'est pas rare que cette union se rompe lors du gonflement. Leur cours présente des sinuosités irrégulières. La matière interposée entre elles (fig. 9 c.) est colorée en bleu ou en violet; c'est cette matière surtout qui occasionne le gonflement. Dans les couches je n'ai pas observé de structure lamelleuse. Par l'acide chlorhydrique et la phloroglucine l'épaississement secondaire est coloré en rouge, le plus fortement au côté interne, où les pellicules limitantes sont le plus lignifiées. Avec le réactif de Schultze, l'épaississement secondaire donne distinctement la réaction de la cellulose le long des parois radiales, tandis qu'au côté interne il ne se colore pas notablement. L'épaississement secondaire semble ordinairement manquer de canalicules; néanmoins, je crois qu'il en est pourvu, car quelques-unes de mes préparations, où il

n'était pas encore très développé, montraient une foule de canalicules très fins dans la paroi interne et dans les parois latérales. Je pense aussi que les raies sombres et claires, que les couches à l'état jeune présentent après le traitement par l'iode et l'acide sulfurique (voir fig. 7), doivent être regardées comme un effet de la présence de canalicules fins.

Chez le *Luzula*, à l'état adulte, la paroi secondaire (fig. 21 s.w.) ne possède, aux parois externe, latérales et transverses, qu'une faible épaisseur, tandis qu'elle atteint une épaisseur considérable à la paroi interne, où elle montre une structure stratoïde. Sur toutes les parois l'épaississement secondaire est pourvu de canalicules (fig. 21 p o.) Sous l'action de l'iode et de l'acide surfurique un peu étendu la paroi secondaire se gonfle (fig. 22). Aux parois externe et latérales on ne peut observer, sur une section transversale, qu'une seule couche secondaire, limitée par une pellicule au côté intérieur. Cette couche se laisse poursuivre sur la paroi primaire interne, où elle est recouverte de plusieurs autres, parfois au nombre de six, qui toutes sont munies d'une pellicule limitante au côté intérieur. Tandis que les pellicules limitantes (fig. 22 g.), par suite d'une lignification, prennent une couleur verte sous l'action de l'iode et de l'acide sulfurique, les autres parties des couches secondaires, auxquelles le gonflement est principalement dû, sont colorées en bleu. L'ensemble des pellicules limitantes entoure les canalicules; là où elles confinent à la cavité, elles sont plus fortement développées; à la pellicule de la couche externe, couche qui recouvre de tous côtés la membrane subérifiée, sont fixées celles des autres couches.

Chez le *Luzula* aussi, je suis arrivé à la conclusion que la paroi secondaire naît et s'épaissit par apposition. Sa première couche, à l'état jeune, après le traitement par l'iode et l'acide sulfurique un peu dilué (fig.19), est colorée en bleu et gonflée, de sorte que, sur une section transversale, elle paraît comme un liséré bleu le long de la membrane subérifiée. Son bord interne se développe en pellicule limitante, qui offre plus de

résistance à l'action de l'acide sulfurique. Après la différenciation de cette pellicule, une seconde couche s'applique sur la paroi interne, et cette seconde couche, lorsqu'elle s'est également pourvue d'une pellicule limitante, est à son tour recouverte d'une nouvelle couche; pendant que ce processus se répète encore quelques fois, les couches déjà formées subissent une modification ultérieure. Durant l'accroissement en épaisseur de la paroi secondaire, on réussit, en faisant agir avec précaution l'iode et l'acide sulfurique, à faire gonfler la couche la plus jeune (fig. 20 j. l.), sans provoquer de gonflement sensible dans les couches plus anciennes; après le traitement en question, elle présente une couleur bleue; çà et là on peut distinguer au côté intérieur une pellicule limitante, tandis que des raies foncées, dirigées radialement par rapport à la cellule, trahissent la présence de canalicules (fig. 20 p o.). Quand l'acide sulfurique agit plus énergiquement, on voit se gonfler aussi les couches plus âgées, dont les pellicules limitantes sont déjà plus fortement développées.

Chez le *Funkia* et l'*Iris*, les parois latérales primaires montrent parfois une ondulation distincte; dans la première de ces plantes, j'ai compté 285 ondes par millimètre, dans la seconde, 190. Chez l'une et chez l'autre il arrive toutefois aussi que les parois latérales primaires ne soient pas ondulées ou soient seulement un peu flexueuses, ce qui, chez le *Luzula*, paraît être le cas constant. Les résultats des mesures de longueur prises sur des cellules ondulées et non ondulées, adultes et non adultes, ne plaident pas en faveur de l'opinion de M. Caspary, suivant laquelle, lorsqu'une paroi secondaire se développe, l'ondulation serait effacée par une extension en longueur. Comme preuve, je citerai les données numériques suivantes:

Chez le *Funkia*, les cellules qui se tapissent d'une paroi secondaire acquièrent une longueur moyenne de $0^{mm},220$, tandis que celles où une pareille paroi ne se développe pas possèdent seulement une longueur moyenne de $0^{mm},128$. J'ai tenu compte de cette différence considérable dans la

comparaison ci-dessous de cellules ondulées et non ondulées.

Longueur moyenne des cellules adultes à paroi secondaire:

24	à ondulation distincte	0^{mm},2135
33	sans „ „	0,225 ,

des cellules adultes sans paroi secondaire:

22	à ondulation distincte	0^{mm},120
22	sans „ „	0,136.

Chez l'*Iris*, j'ai obtenu pour la longueur moyenne des cellules adultes, en cas d'ondulation distincte, 0^{mm},345, contre 0^{mm},3375 dans le cas où il existait tout au plus une légère flexuosité. Avant l'apparition des couches d'épaississement secondaires, la longueur moyenne des cellules de la gaîne du cylindre central peut s'élever chez le *Funkia* à 0^{mm},180 et chez l'*Iris* à 0^{mm},273; chez le *Luzula*, plante qui ne m'a jamais offert d'ondulation distincte, j'ai trouvé pour cette même longueur moyenne 0^{mm},146, contre 0^{mm},154 à l'état adulte. A mon avis, la longueur des cellules de la gaîne du cylindre central, avant et après la formation de la paroi secondaire, diffère trop peu pour que cette différence puisse expliquer la disparition d'une ondulation distincte, et, d'un autre côté, il y a aussi très peu de différence dans la longueur des cellules adultes à parois ondulées et non ondulées.

EDAM, Mai 1885.

Explication des Figures.

Toutes les figures sont dessinées à un grossissement linéaire de 1390 fois.

La signification des lettres le plus fréquemment employées est la suivante: c.vl. tache de Caspary, c.m. membrane subérifiée (cuticularisée), s.w. paroi secondaire, m. lamelle moyenne, p.v. épaississement primaire, g. pellicule limitante, c. donnant la réaction de la cellulose, p.o. canalicule, i. espace intercellulaire La signification des autres lettres est donnée pour chaque figure séparément.

La tache de Caspary et la membrane subérifiée sont toujours indiquées par deux lignes plus fortes.

Dans les 22 premières figures, la lamelle moyenne n'est pas indiquée pour les parois latérales et transverses, parce qu'elle n'y était pas observable, tandis que pour les parois externe et interne on a, dans beaucoup de cas, seulement pu marquer sa place.

Iris Guldenstaedtiana Bbrst.

Fig. 1. Section transversale, per. périblème, p. assise externe du plérome, t d. division cellulaire tangentielle, r.d. division cellulaire radiale.

Fig. 2. Section transversale, avant l'apparition de la tache de Caspary.

Fig. 3. = fig. 2, mais après le traitement par l'iode et l'acide sulfurique légèrement dilué.

Fig. 4. Section transversale, tache de Caspary et membrane subérifiée, après le traitement par l'iode et l'acide sulfurique légèrement dilué.

Fig. 5. Section transversale, formation de la paroi secondaire.

Fig. 6. = fig. 5, mais après le traitement par l'iode et l'acide sulfurique légèrement dilué; j.l. couche la plus jeune, e.l. première couche, m k r s. microsomes.

Fig. 7. Section transversale, formation de la paroi secondaire, après le traitement par l'iode et l'acide sulfurique légèrement dilué; j.l. couche la plus jeune, o.l. couches plus anciennes.

Fig. 8. Section transversale, adulte.

Fig. 9. = fig. 8, mais après le traitement par l'iode et l'acide sulfurique légèrement dilué.

Fig. 10. Section tangentielle, adulte.

Fig. 11. Section radiale, adulte.

Fig. 12. Section radiale, adulte, après le traitement par l'iode et l'acide sulfurique; s. les deux petites raies qui indiquent la place où précédemment se trouvait la tache de Caspary.

Funkia ovata Spr.

Fig. 13. Section transversale, première apparition de la tache de Caspary.

Fig. 14. Section transversale, tache de Caspary.

Fig. 15. Section transversale, adulte; pu. points qui indiquent la place où précédemment se trouvait la tache de Caspary; s.i. contenu contracté.

Fig. 16. = fig. 15, mais après le traitement par l'iode et l'acide sulfurique légèrement dilué.

Luzula sylvatica Bichen.

Fig 17. Section transversale, per. périblème, p. assise externe du plérome.

Fig. 18. Section transversale, membrane subérifiée, après le traitement par l'iode et l'acide sulfurique légèrement dilué.

Fig. 19. Section transversale. e l. première couche secondaire, après le traitement par l'iode et l'acide sulfurique légèrement dilué.

Fig. 20. Section transversale, formation de la paroi secondaire, après le traitement par l'iode et l'acide sulfurique légèrement dilué, j.l. couche la plus jeune, o.l. couches plus anciennes, e.l. première couche.

Fig. 21. Section transversale, adulte.

Fig. 22. = fig. 21, mais après le traitement par l'iode et l'acide sulfurique légèrement dilué.

Fig. 23. *Funkia ovata*, section transversale d'une cellule adulte, traitée par le chlorate de potasse et l'acide nitrique.

Fig. 24. *Luzula sylvatica*, section transversale d'une cellule adulte, traitée par le chlorate de potasse et l'acide nitrique; c.b. grumeaux d'acide cérinique.

L'EMPLOI DE LA PILE AUXILIAIRE DANS LA TÉLÉPHONIE,

PAR

J. W. GILTAY.

Lorsqu'on relie un microphone et une pile galvanique au fil primaire d'une bobine d'induction, et les extrémités du fil secondaire aux armatures d'un condensateur, toute variation de résistance du microphone détermine une charge du condensateur, par suite de la différence de potentiel produite dans le circuit secondaire.

Si le microphone est mis en vibration par un son, une charge périodiquement variable du condensateur en sera la conséquence; de là résulteront des variations correspondantes dans l'attraction que les deux armatures exercent l'une sur l'autre, de sorte que le condensateur entrera en vibration et donnera des sons. Le ton reproduit par le condensateur étant toutefois d'une octave plus élevé que celui qui met en vibration le microphone, le condensateur ne sera pas capable d'émettre des sons articulés [1]). Mais si dans le circuit secondaire on introduit encore une pile, qui charge le condensateur à une différence de potentiel constante, tous les sons produits devant le microphone seront rendus à la même hauteur de ton par le condensateur, et celui-ci constituera un excellent récepteur téléphonique. M. Dunand [2]) et M. Herz [3]) sont les premiers

---

[1]) Voir mon Mémoire: *La polarisation des récepteurs téléphoniques*, dans *Arch. néerl. d. sc. ex. et nat.*, t. XIX, p. 272.

[2]) *Compt. Rend.*, 3 janvier 1881.

[3]) Dumoncel, *Le Téléphone*, 4e éd., p. 192.

qui aient fait des expériences avec des condensateurs employés comme récepteurs téléphoniques; M. Herz a même téléphoné avec ses appareils sur une ligne de 1100 kilomètres. Leurs condensateurs consistaient en feuillets alternatifs d'étain et de papier.

M. Dolbear [1]) s'est également appliqué à introduire le condensateur comme récepteur dans la téléphonie. Son appareil est d'une construction tout autre que ceux de M. Dunand et de M. Herz. Il se compose seulement de 2 petites plaques métalliques d'environ 5 cm. de diamètre, qui sont fixées dans une boîte d'ébonite et isolées l'une de l'autre par un très mince anneau d'ébonite.

Mis à même, par la bienveillance de MM. les professeurs Bosscha et Snyders, de faire usage, dans la cabinet de physique de l'Ecole polytechnique, d'une pile formée de 100 petits éléments de Daniell, j'ai profité de cette occasion favorable pour exécuter quelques expériences sur le récepteur de Dolbear.

Chaque élément de la pile consistait en 2 tubes cylindriques de 140 mm. de hauteur et de 22 mm. de diamètre intérieur. L'un de ces tubes était rempli de sulfate de cuivre et contenait un fil de cuivre, l'autre était rempli de sulfate de zinc, dans lequel plongeait un fil de zinc amalgamé, soudé au fil de cuivre de l'élément suivant. La communication entre les deux solutions se faisait par un petit tube en U, dont le diamètre intérieur mesurait $3\frac{1}{2}$ mm., et la longueur de chaque branche 10 cm. Comme cette colonne d'eau doit être parcourue par le courant, ces éléments possèdent une résistance énorme. Ayant relié un pareil élément à un galvanomètre à miroir de 408 Ohms de résistance, je trouvai que celui-ci accusait un courant d'environ $\frac{1}{130000}$ Ampère; la résistance de l'élément était donc à peu près de 130000 Ohms.

Le microphone que j'employai dans mes expériences sur le

[1]) *Scient. American*, 18 juin 1881.

condensateur de Dolbear, était du système Ader: il fut relié à 3 éléments Bunsen et au gros fil d'une petite bobine d'induction. Celle-ci était longue de $7\frac{1}{2}$ cm. et avait un diamètre extérieur de 3 cm. Le fil primaire formait 4 couches et avait une épaisseur de $0^{mm},5$; le fil secondaire, faisant 19000 tours, était épais de $0^{mm},07$ et avait une résistance d'environ 7000 Ohms. Dans le circuit secondaire fut introduit le condensateur, avec 20 des éléments de Daniell ci-dessus décrits. Si alors on parlait ou chantait devant le microphone, tout s'entendait très distinctement dans le condensateur, mais le son était assez faible. Le raisonnement suivant pourrait faire croire que l'intensité du son émis par le condensateur croîtra avec le potentiel de la pile auxiliaire:

Lorsqu'un son simple, à période T, est produit devant le microphone, la grandeur de la charge du condensateur, à chaque instant, peut être trouvée au moyen de l'expression $a + b \sin 2\pi \frac{t}{T}$, où a représente la charge constante donnée au condensateur par la pile. L'attraction des armatures est proportionnelle au carré de la charge, et on a donc pour la force

$$K = C\left(a + b \sin 2\pi \frac{t}{T}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

Comme l'écart, en cas de petits mouvements, est à chaque instant proportionnel à la force à cet instant, l'amplitude se laissera également déterminer par l'expression 1):

$$A = C_1\left(a + b \sin 2\pi \frac{t}{T}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

La valeur de A croissant avec a, il suivrait de là qu'une charge constante plus forte donnera lieu à un mouvement plus étendu du condensateur, et par conséquent à un son plus intense.

Pourtant, le son devint plus faible lorsque, au lieu de 20 éléments de Daniell, j'en introduisis 100 dans la ligne, c'est-à-dire, nonobstant une valeur de a cinq fois plus forte.

L'explication de ce fait ne peut être cherchée que dans la très grande résistance de la pile auxiliaire. Un condensateur dont les armatures sont reliées aux extrémités d'un fil dans lequel existe, par l'une ou l'autre cause, une différence de potentiel, sera toujours chargé à cette même différence de potentiel, quelle que soit la résistance du circuit. Mais, avec la résistance du circuit, augmente aussi le temps nécessaire au condensateur pour se charger à ce potentiel. Soit E le potentiel de la pile auxiliaire, et V le potentiel maximum qui se développe dans le fil secondaire de notre bobine d'induction lorsqu'un son de force constante est produit devant le microphone. Par suite de la grande résistance de la pile auxiliaire, il se passera quelque temps avant que le potentiel du condensateur se soit accru de E jusqu'à $E + V$. Et, avant que le condensateur ait acquis la charge qui correspond au potentiel $E + V$, la différence de potentiel dans le fil secondaire sera de nouveau diminuée. Soit V_1 le potentiel minimum du fil secondaire, il se passera également quelque temps avant que le condensateur soit déchargé jusqu'au potentiel $E + V_1$, et, avant que la charge ait diminué jusqu'à ce point, le potentiel du fil secondaire aura de nouveau augmenté et empêchera donc la décharge ultérieure. On voit par là que, en cas d'une grande résistance dans la ligne, les variations de potentiel du condensateur sont plus petites que les variations du potentiel dans le circuit secondaire de l'inducteur. La charge varie donc, quand on augmente la résistance de la ligne, entre des limites plus étroites que précédemment, et le condensateur donnera un son plus faible.

Il est évident, de cette manière, que A dans l'expression 2) peut devenir plus petit, bien que a devienne plus grand, parce que, quand le nombre des éléments augmente, le coefficient b diminue, à cause de l'accroissement de la résistance de la pile.

L'avantage de l'emploi d'une pile auxiliaire à haut potentiel est donc plus que balancé par le désavantage de la forte

résistance que la pile introduit dans la ligne. On pourrait, il est vrai, obvier à cet inconvénient en faisant usage d'éléments à résistance plus faible, par exemple, d'éléments ordinaires de Leclanché, mais l'appareil devient alors très dispendieux et, naturellement, tout à fait impropre pour la pratique.

J'ai essayé de construire un condensateur donnant, employé comme récepteur téléphonique, un son dont l'intensité fût indépendante de la résistance de la pile. Avec un pareil instrument j'espérais obtenir un son plus fort que cela n'est possible par la méthode de Dolbear, et j'aurais alors eu, en outre, l'avantage de pouvoir employer comme batterie auxiliaire la pile de Zamboni, qui, à la différence des piles de Daniell ou des piles à eau, n'exige ni entretien ni surveillance. Quoique les expériences dont je vais rendre compte prouvent que mes considérations étaient parfaitement exactes, je ne suis pas arrivé à un résultat d'une utilité pratique, mon instrument, comme celui de M. Dolbear, le cédant de beaucoup au téléphone de Bell, quant à la simplicité et à la commodité de l'emploi.

Mon premier appareil était construit de la manière suivante. Sur une plaque d'ébonite, non représentée dans la figure 1 ci-contre, fut posé un morceau rectangulaire d'étain en feuille *a b*, de 8 cm sur 12. En travers et au-dessus de *a b* fut placé un morceau tout pareil *c d*, puis, sur celui-ci, les morceaux *e f* et *g h*, comme l'indique la figure. Tous les feuillets d'étain étaient séparés entre eux par du papier paraffiné, et je continuai la superposition dans le même ordre, jusqu'à ce qu'il y eût, empilés l'un sur l'autre, 100 feuillets d'étain et un nombre égal de feuillets de papier. Les extrémités 1, 2, 3 et 4 des feuillets de même rang furent reliées entre elles et à une vis de serrage.

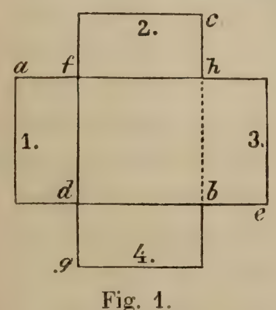


Fig. 1.

La fig. 2 montre comment cet appareil, que j'appelle à cause

de sa forme condensateur en croix, était uni au circuit. Les feuillets du rang 1 et 4 étaient reliés à la pile auxiliaire, ceux

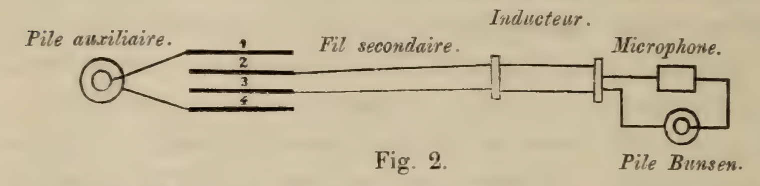


Fig. 2.

du rang 2 et 3 au circuit téléphonique. Ce condensateur ayant une capacité beaucoup plus grande que celui de Dolbear, les courants téléphoniques, qui servaient à charger les plaques 2 et 3, n'avaient pas besoin d'être à un potentiel aussi élevé, et je pris donc une autre bobine d'induction, à fil secondaire de résistance moindre. Le fil primaire de cette bobine formait 4 couches et était épais de $0^{mm},45$, le fil secondaire, épais de $0^{mm},16$, faisait 4350 tours; la résistance était de 261 Ohms.

Pour essayer ce condensateur en croix, j'employai comme pile auxiliaire 20 éléments Leclanché, qui furent reliés aux feuillets 1 et 4. Les feuillets 2 et 3 furent rattachés aux extrémités du fil secondaire de l'inducteur mentionné en dernier lieu; dans le circuit primaire se trouvaient de nouveau le microphone d'Ader et 3 éléments Bunsen. Les choses ainsi disposées, tout ce qui était parlé devant le microphone s'entendait parfaitement dans le condensateur, même lorsque celui-ci était tenu à une distance de 5 cm. de l'oreille. Dans ce condensateur les courants téléphoniques ne passent point par la pile auxiliaire, comme c'était le cas pour celui de Dolbear, et par conséquent la résistance de cette pile ne peut pas exercer d'influence sur l'intensité du son. Néanmoins, je n'obtins pas le moindre résultat en remplaçant la pile Leclanché par la pile de 100 éléments Daniell; le son que donnait le condensateur était complètement inarticulé, ce qui prouvait que la charge communiquée pas la pile aux feuillets 1 et 4 était à peu près $= 0$. La cause n'en peut naturellement résider que dans le mauvais isolement réalisé par les feuilles de papier; par suite de l'énorme résistance de la pile de Daniell, celle-ci

ne pouvait fournir assez d'électricité pour réparer la perte résultant de la fuite du condensateur.

Pour prouver l'exactitude de mon principe, il ne me restait donc d'autre moyen que de construire un condensateur à air. En supposant les armatures de celui-ci isolées d'une manière satisfaisante, il devait être possible de remplacer la batterie auxiliaire par une pile de Zamboni, ou même par une bouteille de Leyde chargée. Je fis usage, à cet effet, d'une simplification que j'avais apportée au condensateur en croix, et qui consistait dans la suppression d'une des quatre armatures, l'une des trois restantes recevant à la fois la charge constante et la

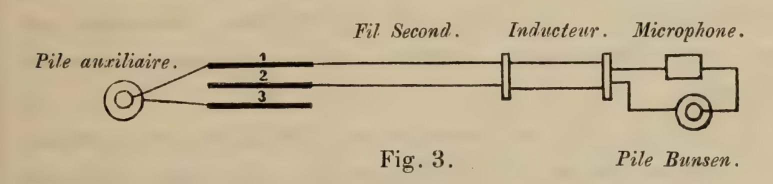


Fig. 3.

charge téléphonique. La fig. 3 montre schématiquement comment ce „condensateur en triangle" fut mis en rapport avec le circuit: les feuilles 1 et 3 étaient reliées à la pile auxiliaire, 1 et 2 à la ligne téléphonique. Avec une pile auxiliaire de 20 éléments Leclanché, cet appareil fonctionnait aussi bien que le condensateur en croix de la fig. 2.

Un condensateur à air, composé, d'après le principe de ce condensateur en triangle, de 3 plaques, est représenté dans la fig. 4. Sur une plaque d'ébonite sont fixés 3 montants. Celui du milieu, A, porte une lame vibrante en cuivre rouge, de 0^{mm},05 d'épaisseur et de 9 cm. de diamètre, serrée entre 2 anneaux métalliques. B et C sont deux disques métalliques circulaires, que des vis de rappel peuvent amener très près de la lame vibrante. Pour rendre la figure plus claire, j'ai laissé un assez grand intervalle entre les plaques A, B et C; en réalité, elles sont rapprochées autant qu'elles peuvent l'être sans se toucher. Les plaques B et C sont perforées, et dans ces perforations sont vissées des tubulures en cuivre, aux-

quelles on adapte des tuyaux de caoutchouc, terminés par des cupules en bois. Les vibrations de l'air, excitées par le

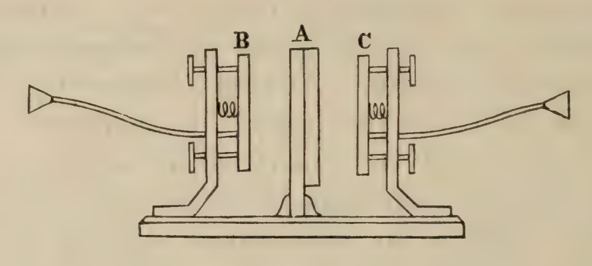


Fig. 4.

mouvement de la membrane de cuivre A, peuvent donc, par l'intermédiaire du tuyau de caoutchouc, atteindre le tympan de l'observateur, lorsque celui-ci applique l'oreille aux cupules.

La fig. 5 fait voir schématiquement comment ce condensateur à air se relie au circuit téléphonique. La plaque vibrante

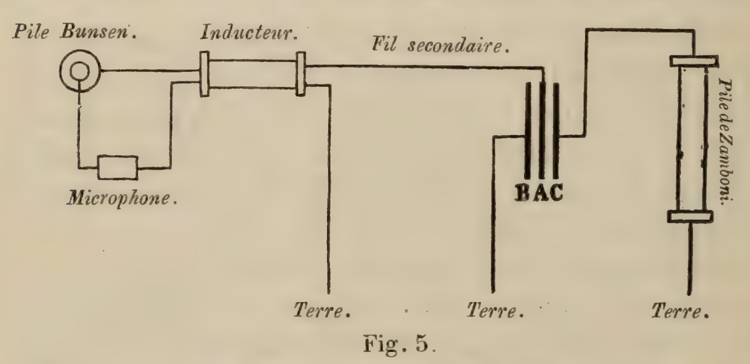


Fig. 5.

A est unie à l'une des extrémités du fil secondaire de l'inducteur, fil dont l'autre extrémité est rattachée à la Terre. La plaque C communique avec l'un des pôles d'une pile de Zamboni; l'autre pôle de cette pile, ainsi que la plaque B du condensateur, est dérivé vers le sol. L'inducteur employé dans cette expérience était le même dont je m'étais déjà servi pour le condensateur de Dolbear, il avait donc une résistance secondaire de 7000 Ohms. La pile de Zamboni était composée de 2200 éléments de papier d'or et d'argent. La méthode ordinaire de con-

struction de cette pile consiste à coller les feuilles de papier d'or et d'argent les unes sur les autres au moyen de colle de farine, et à découper ensuite les disques à l'emporte-pièce. Comme il peut toutefois facilement arriver, quand on opère de cette manière, qu'une communication s'établisse sur le bord entre l'or et l'argent du même élément, et que par là cet élément soit fermé en lui-même et ne coopère plus avec les autres, j'ai suivi un autre mode de construction, beaucoup plus laborieux, à la vérité, mais qui donne la certitude que le potentiel de la pile sera proportionnel au nombre des éléments. Les disques d'or et d'argent, d'un diamètre de 24 mm., furent découpés chacun séparément et collés, les faces métalliques en dehors, sur un très mince disque de papier, d'un diamètre de 29 mm. Il restait alors entre les garnitures d'or et d'argent de chaque élément un bord de papier non-conducteur large de 2½ mm., et tout contact entre les deux faces métalliques du même élément était donc évité. Le tube de verre, dans lequel se trouvaient les éléments, était paraffiné en dedans et en dehors.

Lorsque, l'appareil ainsi disposé, on sifflait ou chantait devant le microphone Ader, tout s'entendait très bien par les tubes de caoutchouc; de même, le son d'une petite boîte à musique était très bien transmis. Quelqu'un parlait-il distinctement et à haute voix devant le microphone, on pouvait, en écoutant avec quelque attention, comprendre mot pour mot. La preuve qu'une communication téléphonique est encore possible de cette manière à travers une résistance énorme, c'est que le son, bien que plus faible, était encore parfaitement perceptible quand je supprimais les trois fils de Terre. La pile de Zamboni et le condensateur étaient placés sur la table dans une chambre chauffée à 22° C depuis plusieurs heures; la communication avec la Terre se faisait donc par la table et le plancher de cette pièce bien sèche.

Il va sans dire qu'on n'obtiendrait pas le moindre son du récepteur Dolbear, si l'on introduisait la pile de Zamboni, comme pile auxiliaire, *dans la ligne*.

Avec une bouteille de Leyde, au lieu de la pile auxiliaire, je n'ai pas encore fait d'expériences, parce que mon appareil ne s'y prêtait pas. Il faudrait, dans ce cas, éviter tous les bords et angles aigus, et les distances entre A, B et C (fig. 4) devraient aussi être plus grandes, car sans cela la bouteille pourrait aisément se décharger, avec production d'étincelle.

L'appareil esquissé dans la fig. 4 se distingue de tous les autres téléphones sous un rapport, sur lequel j'attirerai un instant l'attention. Dans mon article déjà cité, j'ai montré que les téléphones magnétiques, aussi bien que les condensateurs lorsqu'ils sont employés en guise de récepteurs téléphoniques, outre le ton produit devant le microphone, donnent encore, comme ton supérieur, la première octave. L'appareil de la fig. 4 fait exception à cet égard, ainsi qu'il résulte du développement suivant.

L'attraction de deux plaques A et C, chargées aux potentiels V_2 et V_1, est:

$$F_1 = \frac{S}{8\pi t^2}\left(V_2 - V_1\right)^2,$$

où S désigne la surface et t la distance des plaques.

De même, l'attraction de deux plaques A et B chargées aux potentiels V_2 et V_3 est

$$F_{11} = \frac{S}{8\pi t^2}\left(V_3 - V_2\right)^2.$$

Si A est placée à égale distance entre B et C, l'attraction résultante est:

$$F = F_{11} - F_1 = \frac{S}{4\pi t^2}\left(V_2 - \frac{V_1 + V_3}{2}\right)\left(V_1 - V_3\right). \quad 1)$$

Or, dans notre cas (fig. 5), le potentiel de B est $= 0$, puisque cette plaque est dérivée vers la Terre; donc $V_3 = 0$.

Le potentiel de C est égal à celui de la pile de Zamboni, que nous nommerons E, donc $V_1 = E$.

Le potentiel de A varie à chaque instant, cette plaque étant chargée par les courants téléphoniques. Lorsqu'on produit devant le téléphone un ton simple à période T, le potentiel de A est:

$$V_2 = \text{Const. } \sin 2\pi \frac{t}{T} .$$

En substituant ces valeurs de V_1, V_2 et V_3 dans 1), nous obtenons:

$$F = \frac{S E}{4 \pi t^2} \left(C \sin 2 \pi \frac{t}{T} - \tfrac{1}{2} E \right) .$$

Comme cette expression nous donne en même temps la forme de mouvement de la plaque vibrante, nous voyons que celle-ci ne reproduit qu'un ton simple à période T, donc le même ton qui a été produit devant le microphone. Il en ressort aussi que l'amplitude est proportionnelle au potentiel de la pile auxiliaire.

Les préparatifs de ces recherches étaient à peu près terminés (l'appareil de la fig. 4 était construit, mais n'avait pas encore été essayé), lorsque j'eus connaissance d'un Mémoire de M. le professeur F. Fuchs, de Bonn, intitulé: „*Ein neues Telephon*" [1]).

Ce Mémoire m'a montré que M. Fuchs avait construit, sous une forme un peu différente, le même appareil représenté dans la fig. 4, et que, suivant une voie toute différente de la mienne, il était arrivé au même résultat. Tandis que, comme on l'a vu, j'ai pris pour point de départ l'appareil de

[1]) *Sitzungsber. d. Niederrh. Ges. f. Natur- und Heilkunde*, 21 juillet et 4 août 1884. Une description plus détaillée a paru postérieurement dans le *Zeitschr. f. Instrum. kunde*, décembre 1884.

M. Dolbear, M. Fuchs, qui ne connaissait pas les expériences de M. Dunand ni l'emploi que M. Dolbear a fait de la pile auxiliaire, est parti de l'électromètre de Fechner. J'ai emprunté à la description de M. Fuchs l'emploi des tubes de caoutchouc dans mon appareil fig. 4, emploi qui rend l'expérience beaucoup plus facile à exécuter et qui permet d'entendre aussi des sons plus faibles; en outre, M. Fuchs a eu la bonté de me communiquer par écrit quelques détails concernant ses expériences.

Pour la forme que M. Fuchs a donnée à son instrument, je dois renvoyer à son Mémoire. A cela près qu'il relie la pile auxiliaire un peu autrement que je ne le fais, nos appareils sont, en principe, entièrement semblables.

DELFT, 6 janvier 1885.

SUR L'APPLICATION

AUX

PHÉNOMÈNES THERMO-ÉLECTRIQUES,

DE LA

SECONDE LOI DE LA THÉORIE MÉCANIQUE DE LA CHALEUR

PAR

H. A. LORENTZ.

---

§ 1. Si l'on admet que dans un circuit de deux métaux, dont les points de contact sont maintenus à des températures différentes, des forces électromotrices n'agissent qu'en ces points, et que, en dehors du développement de chaleur proportionnel au carré de l'intensité du courant, il n'y a de chaleur dégagée ou absorbée que celle qui a été découverte par Peltier, les lois de la thermodynamique conduisent à des résultats très simples à l'égard de la force électromotrice dans le circuit et de la quantité de cette chaleur développée ou absorbée. Dans les hypothèses qu'on vient d'indiquer, on doit se représenter l'énergie du courant thermoélectrique comme due à une partie de la chaleur qui est communiquée au contact ayant la température la plus élevée, tandis que l'autre partie de cette chaleur apparaît au contact froid; réciproquement, lorsqu'en déplaçant un aimant près du circuit on excite un courant d'induction, qui est opposé au courant thermo-électrique et le surpasse en intensité, une certaine quantité d'énergie mécanique est transformée en chaleur, et de plus il y a transport de chaleur du contact

froid au contact chaud. On reconnaît immédiatement, que ces deux actions opposées sont en accord avec la seconde loi de la thermo-dynamique, le principe de Carnot, au moins quant au sens dans lequel les phénomènes se produisent. Pour que, numériquement aussi, il y ait accord avec cette loi, il faut, comme MM. W. Thomson et Clausius l'ont montré presque simultanément, que la force électromotrice dans le circuit soit proportionnelle à la différence de température entre les points de contact, et que la quantité de chaleur développée ou absorbée à l'un de ces points, par unité de courant et par unité de temps, soit proportionnelle à la température absolue.

§ 2. Les recherches expérimentales ont prouvé que ces deux proportionnalités ne se réalisent, en tout cas, qu'entre d'étroites limites de température. La force électromotrice du courant thermo-électrique n'est généralement pas proportionnelle à la différence de température; elle l'est si peu, que l'on connaît même un grand nombre de cas dans lesquels, lorsque les deux températures sont élevées simultanément, de telle sorte que leur différence reste la même, le courant thermo-électrique, au lieu de demeurer constant, change de signe; ou dans lesquels, — ce qui revient au même, — lorsqu'une des températures reçoit un accroissement continu, l'autre ne variant pas, la force électromotrice augmente jusqu'à un maximum, pour diminuer ensuite. En ce qui concerne le phénomène découvert par Peltier, M. Budde [1]) a fait voir que pour le fer et le cuivre il disparaît vers 280° C, et qu'au-dessus de cette température il se produit dans un sens opposé à celui qu'il affecte aux températures plus basses. Récemment M. Le Roux [2]) a déclaré avoir observé le même fait.

§ 3. Les hypothèses mentionnées au début du paragraphe 1 ne peuvent donc être exactes; au moins elles ne le peuvent être toutes les deux. M. Thomson [3]) a démontré que, pour que les phéno-

[1]) Pogg. *Ann.* T. 153, p. 343.

[2]) *Comptes rendus*, T. 99.

[3]) *Proc. Royal Soc. of* Edimb., 15 déc. 1851; *Phil. Mag.* (4)T.3, p.529 *Trans. Royal Soc. of* Edimb., T. 21, part. I, p. 123.

mènes observés dans un circuit cuivre-fer se concilient avec les lois thermodynamiques, il faut qu'un développement de chaleur positif ou négatif, proportionnel à l'intensité du courant, se produise non seulement aux points de contact, mais aussi, au moins dans l'un des deux métaux, partout où un courant passe d'un point de température plus haute à un point de température plus basse, ou vice-versa. Ce dernier développement de chaleur, pris par unité de temps, peut être représenté, pour une partie de conducteur dont les extrémités ont les températures T et $T + d\,T$, par $\sigma \gamma\, d\,T$, γ étant l'intensité du courant, comptée positive lorsque le courant va de l'extrémité chaude à l'extrémité froide. La quantité σ est une fonction de la température, fonction qui elle-même peut être positive ou négative. Désignant ensuite par Π la quantité de chaleur qui, au point de contact de deux métaux pour lesquels σ a les valeurs σ_a et σ_b, est absorbée par unité de temps lorsqu'un courant $= 1$ va du premier métal au second, M. Thomson a obtenu, en appliquant le principe de Carnot:

$$\sigma_a - \sigma_b = \frac{\Pi}{T} - \frac{d\,\Pi}{d\,T}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

tandis que la force électromotrice dans un circuit des deux métaux, lorsque les points de contact ont les températures T_1 et T_2, peut être représentée par:

$$F = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\Pi}{T}\, d\,T \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

F est positif lorsque le courant va du métal A au métal B en passant par le contact dont la température est T_2.

Ainsi que cela sera toujours le cas dans la suite, la température T est comptée depuis le zéro absolu, et les quantités de chaleur sont exprimées en unités de travail.

Ces formules indiquent que, si F n'est pas proportionnel

à $T_2 - T_1$, Π ne saurait être proportionnel à T, ni $\sigma_a = \sigma_b$, de sorte que le développement de chaleur, désigné par σ, doit avoir lieu au moins dans l'un des deux métaux.

§ 4. M. Thomson [1]) lui-même a confirmé expérimentalement cette prévision de la théorie. Il a montré que dans le fer il se dégage de la chaleur lorsque le courant positif passe de parties plus froides à des parties plus chaudes du métal, tandis que dans le cuivre l'inverse a lieu, ce que M. Thomson exprime en ces termes: „vitreous electricity carries heat with it in an unequally heated conductor of copper, and resinous electricity carries heat with it in an unequally heated conductor of iron."

Le phénomène rappelle ce qui a lieu quand un courant de liquide traverse un tube dont la paroi est maintenue, en des points différents, à des températures inégales. La paroi cédera alors de la chaleur au liquide ou lui en enlèvera, suivant que le courant va dans une direction ou dans l'autre, et la valeur de cette absorption ou de ce développement de chaleur dépendra évidemment de la chaleur spécifique du liquide. Aussi M. Thomson [2]) dit-il: „Without hypothesis, but by an obvious analogy, we may call the elements σ_1, σ_2, etc. the *specific heats of electricity in the different metals*, since they express the quantities of heat absorbed or evolved by the unit of current electricity in passing from cold to hot, or from hot to cold, between localities differing by a degree of temperature in each metal respectively."

§ 5. La théorie que M. Clausius avait développée, en partant des hypothèses simples du paragraphe 1, a été étendue, par M. Budde [3]), au cas où F n'est pas proportionnel à la différence de température. Les résultats mathématiques de M. Budde sont les mêmes que ceux de M. Thomson; lui aussi conclut à l'existence des absorptions et développements de chaleur découverts par le savant anglais.

---

[1]) *Phil. Trans.*, T. 146, p. 649.

[2]) *Trans. Royal Soc.* Edimb., T. 21, p. I, p. 133.

[3]) *l.c.*

Chez M. Clausius et M. Budde prédomine toutefois l'idée qu'un changement de température détermine une modification de la structure des métaux, de sorte que, partout où des parties inégalement chaudes d'un même métal sont en contact l'une avec l'autre, il se produit quelque chose d'analogue à ce qui a lieu dans le cas de deux métaux différents, savoir une différence de potentiel et, par conséquent, lorsqu'on fait passer un courant, un développement de chaleur, positif ou négatif, qui serait tout à fait de même nature que celui découvert par Peltier.

§ 6. L'application que les physiciens cités ont faite de la seconde loi de la thermodynamique repose sur l'hypothèse qu'en considérant les phénomènes calorifiques produits par un courant électrique on peut faire abstraction de la transmission de chaleur par conductibilité qui s'opère de l'un des points de contact à l'autre.

La loi dont il est question nous apprend, en effet, que l'équation

$$\Sigma \frac{Q}{T} = 0$$

ne se vérifie que pour des cycles de transformations complètement réversibles; or, la conductibilité de la chaleur est, de sa nature, un phénomène non réversible. En outre, les quantités de chaleur, que nous avons considérées dans ce qui précède, sont beaucoup plus petites que celle qui est transmise par conductibilité, et nous ne pouvons modifier ce rapport à volonté, car la conductibilité calorifique des metaux et leur conductibilité électrique sont à peu près proportionnelles. „Still", dit M. Thomson, „the reversible part of the agency, in the thermo-electric circumstances we have supposed, is in itself so *perfect*, that it appears in the highest degree probable it may be found to fulfil independently the same conditions as the general law would impose on it if it took place unaccompanied by any other thermal or thermodynamic process".

§ 7. Dans ce qui suit, la seconde loi de la théorie méca-

nique de la chaleur sera appliquée aux phénomènes thermo-électriques d'une manière qui diffère de celle suivie par MM. Thomson et Clausius. A cet effet, j'institue une expérience idéale, de telle sorte qu'une quantité d'électricité passe en sens opposé à travers deux points de contact, mais qu'elle soit transportée d'un point de contact à l'autre non par conductibilité, mais par *convection* au moyen d'un conducteur auxiliaire. On verra qu'il est possible de parvenir ainsi à un cycle complètement réversible, auquel on peut appliquer sans réserve le principe de Carnot. Il est intéressant alors de savoir quel phénomène doit prendre la place de celui découvert par M. Thomson qui se trouve exclu parce qu'aucun passage d'électricité n'a lieu entre des parties inégalement chauffées d'un même métal. En effet, dans ce cas encore, il doit exister quelque phénomène autre que le développement de chaleur observé par Peltier, tant que cette chaleur, par unité du courant, n'est pas proportionnelle à la température absolue. Sans cela il y aurait contradiction avec ce principe, que la chaleur ne saurait d'elle-même passer d'un corps à température plus basse à un autre de température plus élevée.

La conclusion à laquelle j'arrive peut s'énoncer de cette manière, que la quantité de chaleur nécessaire pour donner à un conducteur une certaine élévation de température (dans des conditions à déterminer ultérieurement) lorsque le conducteur est électrisé, est plus grande ou plus petite que lorsqu'il ne possède pas de charge. La différence est positive ou négative selon le signe de la charge, sa valeur absolue est proportionnelle à cette charge.

§ 8. Dans cette étude, pour abréger, nous appellerons „contact" un système de deux pièces de métaux différents, qui sont en contact permanent. Nous supposerons deux contacts de ce genre, composés des mêmes métaux. Ces derniers seront désignés par les lettres A et B, et tout ce qui se rapporte à l'un des métaux à l'exclusion de l'autre sera indiqué par l'un des indices a et b. De même, les indices 1 et 2 indiqueront

si une quantité se rapporte au premier contact ou au second. Les parties constitutives des contacts seront donc représentées par A_1, B_1, A_2, B_2. Chaque contact est en communication avec un grand réservoir de chaleur à température constante; ces réservoirs sont désignés par R_1 et R_2, leurs températures par T_1 et T_2. En déduisant nos formules nous supposerons, ce qu'on peut faire sans nuire à leur généralité, la différence de température infiniment petite; nous remplacerons alors T_1 par T, T_2 par $T + d\,T$.

Le potentiel sera représenté en général par φ, et pour A_1, B_1, A_2, B_2 respectivement par φ_{a_1}, φ_{b_1}, φ_{a_2}, φ_{b_2}. Ces potentiels peuvent avoir des valeurs très différentes, puisque nous pouvons donner aux contacts, pris dans leur ensemble, des charges positives ou négatives; seulement, il doit exister entre φ_{a_1} et φ_{b_1} une différence déterminée, et de même entre φ_{a_2} et φ_{b_2}.

Lorsqu'à une température quelconque T les deux métaux A et B se touchent, il existe une différence de potentiel

$$\varphi_a - \varphi_b = \psi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Cette quantité dépend de T, et en conséquence sera représentée quelquefois par $\psi\,(T)$.

On a donc évidemment

$$\varphi_{a_1} - \varphi_{b_1} = \psi\,(T_1) \text{ et } \varphi_{a_2} - \varphi_{b_2} = \psi\,(T_2),$$

et si T_1 et T_2 diffèrent infiniment peu, la différence

$$(\varphi_{a_2} - \varphi_{b_2}) - (\varphi_{a_1} - \varphi_{b_1})$$

sera infiniment petite du même ordre. Il se peut très bien que les différences $\varphi_{a_2} - \varphi_{a_1}$ et $\varphi_{b_2} - \varphi_{b_1}$ aient alors des valeurs finies; toutefois, nous nous représenterons ces différences aussi comme infiniment petites, du même ordre que dT. Lorsque les températures seront T et $T + dT$, les potentiels aux deux contacts se trouveront donc indiqués par

$$\varphi_a,\ \varphi_b,\ \varphi_a + d\,\varphi_a \text{ et } \varphi_b + d\varphi_b.$$

Une des deux quantités $d\,\varphi_a$ et $d\,\varphi_b$ peut encore être choisie

arbitrairement, mais l'autre est déterminée par l'équation

$$d\,\varphi_a - d\,\varphi_b = \frac{d\,\psi}{d\,T}\,d\,T \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Pour faciliter les raisonnements nous supposerons que les quatre potentiels aient des valeurs positives.

§ 9. Pour faire passer maintenant une quantité e d'électricité à travers l'un des contacts de B_1 à A_1 et à travers l'autre de A_2 à B_2, nous nous servirons de deux conducteurs, que nous nommerons *transmetteurs*, qui sont mis en communication alternative avec A_1, A_2, B_1, B_2, et dont l'un prend à A_1 la charge e, la cédant à A_2, tandis que l'autre reçoit de B_2 une charge égale et la transmet à B_1. Les conditions, dans lesquelles cette transmission s'opère, doivent toutefois être choisies convenablement.

D'abord, pour ne pas introduire de nouvelles forces électromotrices agissant aux points de contact qu'exige l'emploi des transmetteurs, le transmetteur qui fonctionne entre A_1 et A_2 sera composé du métal A, l'autre du métal B. En conséquence, nous désignerons les transmetteurs par G_a et G_b.

Ensuite, pour que l'expérience soit réversible il faut que toutes les fois que deux corps sont mis en contact ils aient la même température et le même potentiel. Pour satisfaire à cette dernière condition, en ce qui concerne A_1, A_2 et G_a, nous supposons ce transmetteur toujours chargé d'électricité positive, dont seulement la quantité varie, suivant qu'il vient de céder ou de recevoir la quantité e. Le transmetteur a donc toujours un potentiel positif, et pour pouvoir changer celui-ci et le rendre, ainsi qu'il est nécessaire, tantôt $= \varphi_{a_1}$, tantôt $= \varphi_{a_2}$, nous admettrons que G_a possède une forme variable et, par conséquent, une capacité variable.

Le transmetteur pourra donc consister, soit en un conducteur unique pouvant être comprimé ou allongé, soit en deux parties glissant l'une sur l'autre de manière à constituer dans toute position un seul corps conducteur, soit enfin — et c'est là ce que nous supposerons — en deux ou plusieurs conduc-

teurs complétement séparés l'un de l'autre et dont la position relative peut être changée. Mais le transmetteur ne doit *pas* être un *condensateur*, et aucune des deux parties ne doit donc être reliée au sol, car cette communication introduirait des forces électromotrices qui compliqueraient les phénomènes. Les deux parties doivent, au contraire, avoir toujours le même potentiel, ce que nous pouvons obtenir en les laissant constamment reliées par un fil infiniment mince du métal A. Dans le cas où les deux parties seraient égales et dans toutes les positions qu'elles occupent symétriques par rapport à un plan, ce fil n'est même pas nécessaire, pourvu qu'à l'origine elles aient reçu des charges égales et que tous les changements du transmetteur aient lieu, tant qu'il se trouve à une très grande distance d'autres corps électrisés, notamment de G_b et des contacts. Nous admettrons que cette dernière condition soit toujours réalisée, et nous supposerons que la communication de G_a avec A_1 ou A_2 soit établie à une grande distance par des fils très minces, du métal A, bien entendu. Lorsque G_a est composé de deux parties non reliées entre elles, elles doivent toutes les deux être mises de cette manière en communication avec A_1 ou A_2. A G_b s'applique, *mutatis mutandis*, tout ce qui vient d'être dit de G_a.

La capacité variable de G_a et de G_b permet encore d'effectuer le passage d'électricité à travers les contacts de manière que rien ne soit changé à l'état de ceux-ci. A cet effet, après avoir rendu par le réglage des capacités les potentiels de G_a et de G_b égaux à φ_{a_1} et à φ_{b_1}, nous mettons les transmetteurs *simultanément* en communication avec A_1 et B_1; puis nous augmentons la capacité de G_a et diminuons en même temps celle de G_b, dans une mesure telle que e soit précisément l'accroissement et la diminution de charge nécessaires pour conserver les mêmes potentiels. Ceux-ci resteront alors φ_{a_1} et φ_{b_1} et comme la chaleur développée ou absorbée est cédée au réservoir R_1 ou lui est enlevée rien ne sera changé à l'état des contacts. Nous procéderons de la même manière

quand il s'agit ensuite de faire passer la quantité e par le second contact, dans la direction de A_2 à B_2.

§ 10. Pour obtenir enfin que G_a ou G_b ne soient mis en contact avec A_1 et A_2, B_1 et B_2 que lorsque les températures sont devenues T_1 et T_2, il faut que les transmetteurs puissent être chauffés ou refroidis. A cet effet, chacun d'eux sera pourvu d'une certaine quantité d'une matière compressible, que pour fixer les idées nous supposerons être un gaz parfait, contenu dans le conducteur lui-même ou dans un vaisseau extérieur, de telle sorte que le conducteur doive se mettre en équilibre de température avec le gaz. Ces masses gazeuses peuvent être comprimées ou dilatées *adiabatiquement*, et l'on aura ainsi la faculté d'élever ou d'abaisser à volonté la température du conducteur, en exécutant un certain travail mécanique, positif ou négatif. Les changements de volume du gaz devront s'effectuer assez lentement pour qu'on soit certain que le conducteur et le gaz ont à chaque instant des températures égales. Mais le temps que nous mettons à accomplir les différentes opérations n'est assujetti à aucune limite.

La circonstance que les transmetteurs ne sont mis en communication avec les contacts que lorsqu'ils en ont acquis les températures, offre encore cet avantage qu'il n'y a pas à s'occuper des forces électromotrices qui pourraient exister entre des parties inégalement chaudes d'un même métal. De même, si l'on suppose que la structure des métaux change avec la température, cela ne peut exercer aucune influence sur nos raisonnements, du moins si la structure redevient la même chaque fois que la température revient au même point. Car alors les transmetteurs auront toujours la même structure que les métaux avec lesquels on les met en contact.

§ 11. Résumons maintenant la marche des opérations. Nous commençons par un état des transmetteurs où ils ont les potentiels φ_{a_1} et φ_{b_1}, la température T_1. Nous les mettons en communication avec le premier contact et par suite avec le réservoir de chaleur R_1; pour cette dernière communication

les fils minces dont il a été question au paragraphe 9 suffisent. A température constante nous faisons passer, en changeant les capacités de G_a et de G_b, la quantité d'électricité e du second transmetteur au premier. Les transmetteurs ayant ensuite été séparés du contact, nous faisons subir aux volumes des deux masses gazeuses et aux capacités, sans fournir ni enlever de chaleur, des changements tels que les températures deviennent T_2 et les potentiels φ_{a_2} et φ_{b_2}. On établit alors la communication des transmetteurs avec le second contact et avec le réservoir de chaleur R_2. Quand, après le passage de la quantité d'électricité e, cette communication est supprimée, les transmetteurs ont de nouveau les mêmes charges qu'à l'origine; un changement adiabatique des volumes gazeux et des capacités sert à leur rendre aussi les températures et les potentiels primitifs. Si alors il restait encore quelque différence entre l'état final et l'état initial, notamment en ce qui concerne le volume des masses gazeuses, nous ne pourrions la faire disparaître par un changement adiabatique, puisqu'il ne nous est plus permis de produire un changement de température. Dans ce cas, nous mettrons les transmetteurs en communication avec R_1 et rétablirons, par un dernier changement isothermique, l'état initial. Le cycle ainsi accompli est, on le reconnaît sans peine, complètement réversible.

§ 12. Pour développer mathématiquement les conséquences du principe de Carnot, il convient de considérer d'abord les changements qu'un transmetteur peut subir. Puisqu'il existe — l'effet signalé par M. Thomson suffit pour nous en convaincre — une relation très étroite entre l'électricité et la chaleur, relation dont nous sommes loin de pénétrer la nature, nous devons procéder avec prudence. Je tâcherai donc de faire le moins possible de suppositions tacites, mais mentionnerai expressément toute hypothèse introduite, quelque vraisemblable qu'elle paraisse.

Première hypothèse. Lorsqu'un conducteur isolé possède une charge électrique, la valeur de celle-ci (évaluée d'après l'action

électrostatique à très grande distance) ne change pas par un échauffement ou un refroidissement du conducteur.

Deuxième hypothèse. Lorsqu'un conducteur a en tous ses points la même température, une charge électrique s'y distribue suivant les lois ordinaires de l'électrostatique, de sorte que par un changement de température cette distribution n'éprouve pas d'autre modification que celle qui est déterminée par les changements de dimensions ou de forme. Les forces qui agissent entre les différentes parties d'un conducteur, se laissent déterminer par les règles ordinaires de l'électrostatique.

Par le potentiel en un point nous entendrons la quantité $\Sigma \frac{e}{r}$, calculée pour toute l'électricité du système considéré. La capacité d'un conducteur est le rapport de sa charge et de son potentiel.

§ 13. L'état d'un transmetteur peut être déterminé par les quantités suivantes: 1°. la température T, 2°. le volume v de la masse gazeuse, 3°. la charge électrique E, 4°. les quantités qui servent à définir sa forme géométrique.

En ce qui concerne ces dernières quantités, on remarquera qu'en général un changement peut avoir lieu non-seulement dans la position relative des conducteurs dont le transmetteur est censé composé (§ 9), mais aussi dans la forme et les dimensions de chacun d'eux. Des changements de température peuvent produire une dilatation ou contraction, les répulsions électriques une déformation. Néanmoins, nous pourrons nous borner au cas où la forme géométrique de chaque conducteur ne subit aucun changement.

Nous devons en effet, pour obtenir des changements réversibles, introduire des forces extérieures capables de maintenir le système dans un état déterminé, c'est-à-dire non seulement une pression exercée sur la masse gazeuze, mais encore des forces agissant sur les conducteurs. Ces dernières, lorsqu'il s'agit de conducteurs à forme invariable, peuvent consister pour chacun d'eux en une force et un couple ; mais, si la forme est variable,

elles doivent avoir une grandeur déterminée pour chaque élément de la surface de chaque conducteur. Ces forces une fois introduites, et constamment réglées d'après l'état du système, nous pouvons dans l'application des lois de la thermodynamique supposer des changements de forme quelconques, et nous pourrons aussi considérer le cas particulier où par un réglage convenable des forces extérieures la forme géométrique de chaque conducteur est maintenue constante.

Dans cette hypothèse, on pourra, pour trouver le travail des forces extérieures, composer toutes celles qui sollicitent un même conducteur en une force unique et un couple, puis évaluer le travail de ces résultantes. Cette force et ce couple sont nécessaires pour faire équilibre aux répulsions électriques que le conducteur éprouve de la part des autres conducteurs; ils exécutent un travail positif ou négatif à chaque rapprochement ou éloignement des parties du conducteur, donc à chaque changement de capacité.

Avec T, v, E les quantités qui déterminent la position relative des conducteurs seront maintenant les seules variables indépendantes qu'il y a lieu d'introduire. Pour l'une de ces dernières quantités nous pourrons toujours prendre la capacité C du système, les autres étant choisies arbitrairement. Celles-ci une fois choisies, nous pouvons nous borner à des changements du transmetteur tels qu'elles y restent constantes et que C seule varie.

Enfin on peut encore, si l'on veut, dans le système des variables indépendantes, remplacer E et C par E et φ, de sorte que ce système devienne T, v, E, φ.

§ 14. Un changement infiniment petit du transmetteur, après que celui-ci a été séparé de tout autre conducteur, et par conséquent après que la charge E a été rendue constante, peut maintenant être déterminé par

$$d\,T,\ d\,v,\ d\,C,\ (\text{ou } d\,\varphi).$$

En général, pour que ce changement s'accomplisse une

quantité dQ de chaleur devra être fournie, et en même temps les forces extérieures exécuteront un travail. Le travail des forces qui sont nécessaires pour faire équilibre à la répulsion électrique des parties du conducteur, a, suivant ce qui a été dit au paragraphe précédent et suivant la deuxième hypothèse, la valeur que l'électrostatique assigne pour un système de conducteurs chacun de forme invariable, c'est-à-dire qu'il est égal à l'accroissement de l'énergie électrostatique ordinaire:

$$d\left(\tfrac{1}{2} E\varphi\right),$$

expression à laquelle on peut aussi substituer

$$\tfrac{1}{2} E\, d\varphi = -\tfrac{1}{2} \frac{E^2}{C^2} dC.$$

§ 15 *Troisième hypothèse.* La présence des conducteurs électrisés n'a pas d'influence sur la pression p de la masse gazeuse; cette pression dépend à la manière ordinaire de v et de T.

Cette hypothèse devient surtout admissible si l'on se représente les masses gazeuses logées *à l'intérieur* des conducteurs, ce qui n'empêche pas, même quand la forme du conducteur est invariable, une compression ou dilatation adiabatique, puisque le gaz peut être limité du côté intérieur par une surface mobile, sur laquelle s'exerce la pression p. Les choses ainsi disposées, la troisième hypothèse ne serait inexacte que dans le cas où les propriétés d'un gaz changeraient par le fait seul qu'il est transporté dans un espace à potentiel plus élevé, même quand aucune force électrique n'agit sur lui.

Il va sans dire que si l'on veut opérer avec des masses gazeuses intérieures, chacune des parties dont le transmetteur est composé doit contenir une pareille masse; lorsque les deux conducteurs sont toujours (§ 9) symétriques par rapport à un plan, et contiennent des masses gazeuses égales, celles-ci doivent toujours être comprimées ou se dilater de la même

quantité. La pression étant alors constamment la même dans les deux masses, nous pouvons considérer les deux corps gazeux comme constituant une masse gazeuse unique. Du reste, une masse gazeuse à l'intérieur d'un seul conducteur est suffisante, si ce conducteur est en équilibre de température avec les autres au moyen des fils dont il a été question au § 9.

Quand le changement d'état considéré au § 14 s'effectue, le travail de la pression extérieure est donné par

$$-p\,d\,v,$$

de sorte que le travail total des forces extérieures devient

$$\tfrac{1}{2}\,E\,d\,\varphi - p\,d\,v.$$

§ 16. Pour l'énergie du transmetteur nous pouvons toujours écrire

$$U = \tfrac{1}{2}\,E\,\varphi + U',$$

où U' représente l'énergie qui existe, n'importe sous quelle forme, en dehors de l'énergie électrostatique ordinaire; provisoirement, on supposera qu'elle dépend de toutes les variables indépendantes. Pour le changement d'état introduit au § 14, l'équation qui exprime la conservation de l'énergie devient donc:

$$d\,Q + \tfrac{1}{2}\,E\,d\,\varphi - p\,d\,v = d\,U,$$

ou

$$d\,Q - p\,d\,v = \frac{\partial\,U'}{\partial\,T}\,d\,T + \frac{\partial\,U'}{\partial\,\varphi}\,d\,\varphi + \frac{\partial\,U'}{\partial\,v}\,d\,v.$$

De la condition, que $\dfrac{d\,Q}{T}$ doit être une différentielle complète, il résulte encore

$$\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{p + \dfrac{\partial\,U'}{\partial\,v}}{T}\right) = \frac{\partial}{\partial\,v}\left(\frac{\dfrac{\partial\,U'}{\partial\,T}}{T}\right) \text{ et } \frac{\partial}{\partial\,T}\left(\frac{\dfrac{\partial\,U'}{\partial\varphi}}{T}\right) = \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\dfrac{\partial\,U'}{\partial\,T}}{T}\right),$$

donc, puisque d'après la troisième hypothèse p est proportionnel à T, en développant:

$$\frac{\partial U'}{\partial v} = 0 \text{ et } \frac{\partial U'}{\partial \varphi} = 0 \,. \qquad (5)$$

Le premier de ces résultats était à prévoir; le second nous apprend que lorsque les parties des transmetteurs changent de position les unes par rapport aux autres, tandis que la charge et la température restent constantes, il n'y a que l'énergie électrostatique ordinaire qui subisse un changement, ou encore, que le changement de capacité en question, lorsqu'il s'effectue adiabatiquement et sans que v change, ne fait pas varier la température. En effet, si le volume reste constant, et que $d\,Q = 0$, on a:

$$\frac{\partial U'}{\partial T} d\,T + \frac{\partial U'}{\partial \varphi} d\,\varphi = 0,$$

donc, en vertu de (5), $d\,T = 0$.

L'équation fondamentale devient maintenant

$$d\,Q = p\,d\,v + \frac{\partial U'}{\partial T} d\,T, \qquad (6)$$

de sorte que, lorsque l'état subit un changement adiabatique, on a

$$d\,v = -\frac{1}{p}\frac{\partial U'}{\partial T} d\,T, \qquad (7)$$

d'où nous pouvons déduire *jusqu'à quel point*, dans les opérations spécifiées au paragraphe 11, il faut comprimer la masse gazeuse, ou la faire dilater, pour obtenir les variations de température nécessaires.

§ 17. Voyons maintenant ce qui arrive lorsque nous faisons passer, de la manière indiquée au paragraphe 11, la quantité infiniment petite d'électricité e, à travers un contact ayant la température T, de G_a à G_b, et considérons la quantité de chaleur w qui peut alors être développée et *cédée* au réservoir R.

Comme rien ne change (§ 9) à l'état du contact, on obtient cette quantité en ajoutant au travail des forces extérieures la diminution que peut éprouver l'énergie de G_a et de G_b. Or, les capacités des transmetteurs ont dû subir les changements

$$d\,C_a = -\frac{e}{\varphi_a}, \qquad d\,C_b = +\frac{e}{\varphi_b}, \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

ce qui exige pour chacun d'eux un travail qu'on peut calculer au moyen de l'expression $-\frac{1}{2}\frac{E^2}{C^2}d\,C = -\frac{1}{2}\varphi^2\ d\,C.$

En effet le travail nécessaire pour un changement infiniment petit de la capacité de G_a ou de G_b, donc pour un déplacement relatif *infiniment petit* des parties des transmetteurs, ne dépend que des forces électrostatiques que ces parties exercent les unes sur les autres *au commencement de ce changement*, et non de la quantité infiniment petite d'électricité que les transmetteurs pourraient gagner ou perdre *pendant qu'il s'achève.* En considérant dans leur ensemble les deux transmetteurs on trouvera donc pour le travail des forces qui agissent sur les conducteurs

$$-\tfrac{1}{2}\varphi_a^2\,d\,C_a - \tfrac{1}{2}\varphi_b^2\,d\,C_b = \tfrac{1}{2}e(\varphi_a - \varphi_b).$$

La pression exercée sur les masses gazeuses n'exécute aucun travail, puisque le volume des gaz est maintenu constant pendant la transmission de la charge e. Quant à l'énergie des transmetteurs on remarquera d'abord que l'énergie électrostatique de G_a a augmenté de $d\,(\frac{1}{2}E_a\,\varphi_a) = -\frac{1}{2}e\,\varphi_a$, puisque φ_a reste constant, et que celle de G_b s'est accrue de $+\frac{1}{2}e\,\varphi_b$. L'autre partie de l'énergie, U, a augmenté pour G_a de

$$-e\left(\frac{\partial U}{\partial E}\right)_a$$

et pour G_b de:

$$+e\left(\frac{\partial U}{\partial E}\right)_b.$$

Dans le calcul de ces dérivées, ce n'est pas, à proprement

parler, C, mais plutôt φ qui reste constant; mais, à raison de (5), cette distinction n'a aucune importance.

La combinaison de ces résultats donne:

$$w = e\left[\varphi_a - \varphi_b + \left(\frac{\partial U'}{\partial E}\right)_a - \left(\frac{\partial U'}{\partial E}\right)_b\right] \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

Naturellement, lorsque la quantité d'électricité e passera *de* G_b *à* G_a, une quantité égale de chaleur sera *enlevée* au réservoir.

§ 18. En appliquant ce qui précède au cycle total décrit dans le paragraphe 11, nous ne devons pas perdre de vue que la différence des températures $d\,T$ et la quantité d'électricité à transmettre, e, sont l'une et l'autre infiniment petites. Les différences $d\,\varphi_a$ et $d\,\varphi_b$ sont du même ordre que $d\,T$ (§ 8). Or, dans l'équation que nous obtiendrons finalement, il pourrait entrer, si nous la développions complètement, des quantités d'ordres différents par rapport à e, dT, $d\varphi_a$, $d\varphi_b$. Celles du premier ordre, toutefois, disparaîtront, et quant à celles d'ordre supérieur, il est évident que les termes en $e\,d\,T$, $e\,d\,\varphi_a$, $e\,d\,\varphi_b$, avec omission de tous les autres, devront satisfaire à l'équation. Dans le cours de nos calculs, nous pourrons donc négliger tous les termes contenant e^2, $(d\,T)^2$, $(d\,\varphi_a)^2$, $(d\,\varphi_b)^2$, $dT\,d\varphi_a$, $dT\,d\varphi_b$.

L'état initial des transmetteurs est déterminé par les quantités:

$$T,\ v_a,\ v_b,\ \varphi_a,\ \varphi_b,\ E_a,\ E_b,$$

et les changements qui vont avoir lieu sont les suivants.

I. Communication des transmetteurs avec le premier contact et passage d'une quantité d'électricité e de G_b à G_a.

Au réservoir R_1 est enlevée la chaleur:

$$w = e\left[\varphi_a - \varphi_b + \left(\frac{\partial U'}{\partial E}\right)_a - \left(\frac{\partial U'}{\partial E}\right)_b\right]_{(T,\ \varphi_a,\ \varphi_b,\ E_a,\ E_b)}$$

Nous avons ajouté, entre parenthèses, les valeurs des variables indépendantes pour lesquelles il faut prendre la valeur de la fonction. Nouvel état:

$$T,\ v_a,\ v_b,\ \varphi_a,\ \varphi_b,\ E_a + e,\ E_b - e.$$

II. Changement adiabatique, pour faire croître T, φ_a, φ_b jusqu'à $T + dT$, $\varphi_a + d\varphi_a$, $\varphi_b + d\varphi_b$.

Le nouvel état est déterminé par:

$T + dT$, $v_a + dv_a$, $v_b + dv_b$, $\varphi_a + d\varphi_a$, $\varphi_b + d\varphi_b$, $E_a + e$, $E_b - e$, où, en vertu de (7), on a:

$$d v_a = - d T \left(\frac{1}{p_a} \frac{\partial U_a}{\partial T} \right)_{(T,\, v_a,\, \varphi_a,\, E_a + e)},$$

$$d v_b = - d T \left(\frac{1}{p_b} \frac{\partial U'_b}{\partial T} \right)_{(T,\, v_b,\, \varphi_b,\, E_b - e)}.$$

III. Après que les transmetteurs ont été mis en communication avec le second contact et avec R_2, la charge e passe de G_a à G_b. Au réservoir R_2 est cédée la chaleur:

$$w' = e(\varphi_a + d\varphi_a - \varphi_b - d\varphi_b) + \\ + e\left[\left(\frac{\partial U'}{\partial E}\right)_a - \left(\frac{\partial U'}{\partial E}\right)_b\right]_{(T+dT,\varphi_a+d\varphi_a,\varphi_b+d\varphi_b,E_a+e,E_b-e)}.$$

expression qui, d'après la remarque faite au commencement de ce paragraphe, et vu que U' est indépendant de φ, peut être remplacée par:

$$w' = e(\varphi_a + d\varphi_a - \varphi_b - d\varphi_b) + \\ + e\left[\left(\frac{\partial U'}{\partial E}\right)_a - \left(\frac{\partial U'}{\partial E}\right)_b\right]_{(T+dT,\, \varphi_a,\, \varphi_b,\, E_a,\, E_b)} \quad . \ . \ (10)$$

Nouvel état:

$T + dT$, $v_a + dv_a$, $v_b + dv_b$, $\varphi_a + d\varphi_a$, $\varphi_b + d\varphi_b$, E_a, E_b.

IV. Passage adiabatique à l'état:

T, $v_a + dv_a + d'v_a$, $v_b + dv_b + d'v_b$, φ_a, φ_b, E_a, E_b,

où l'on a:

$$d' v_a = + dT \left(\frac{1}{p_a} \frac{\partial U_a}{\partial T} \right)_{(T + dT,\, v_a + dv_a,\, \varphi_a + d\varphi_a,\, E_a)},$$

ou bien, dv_a étant de l'ordre dT,

$$d' v_a = + dT \left(\frac{1}{p_a} \frac{\partial U_a}{\partial T} \right)_{(T,\, v_a,\, \varphi_a,\, E_a)}.$$

De même:

$$d' v_b = + d T \left(\frac{1}{p_b} \frac{\partial U_b}{\partial T} \right)_{(T, v_b, \varphi_b, E_b)} .$$

Les volumes des masses gazeuses sont donc finalement:

$$v_a + d v_a + d' v_a = v_a - e d T \left(\frac{1}{p_a} \frac{\partial^2 U'_a}{\partial E_a \partial T} \right)_{(T, v_a, \varphi_a, E_a)}$$

et

$$v_b + d v_b + d' v_b = v_b + e d T \left(\frac{1}{p_b} \frac{\partial^2 U'_b}{\partial E_b \partial T} \right)_{(T, v_b, \varphi_b, E_b)} .$$

La question de savoir si le cycle est maintenant accompli revient à cette autre, si la dérivée

$$\frac{\partial^2 U'}{\partial E \partial T}$$

est, ou non, $= 0$. Si elle ne l'est pas, $\frac{\partial U'}{\partial T}$ dépend de E; en d'autres termes, l'augmentation que l'énergie des transmetteurs éprouve par une certaine élévation de la température comprend une partie qui dépend de la charge. Dans ce cas, si nous voulons produire un échauffement par une compression adiabatique du gaz, le changement de volume nécessaire dépendra également de la charge. D'où il résulte, les charges ayant été inégales pendant la seconde et la quatrième opération, qu'on n'a *pas* $d' v_a = - d v_a$ et $d' v_b = - d v_b$.

Quelle que soit du reste la valeur de $\frac{\partial^2 U'}{\partial E \partial T}$, l'état primitif se trouvera rétabli, si:

V. Après avoir mis les transmetteurs en communication avec le réservoir R_1, nous augmentons les volumes de:

$$e d T \left(\frac{1}{p_a} \frac{\partial^2 U'_a}{\partial E_a \partial T} \right)_{(T, v_a, \varphi_a, E_a)}$$

et de:

$$-e\,d\,T\left(\frac{1}{p_b}\frac{\partial^2 U'_b}{\partial E_b \partial T}\right)_{(T,\, v_b,\, \varphi_b,\, E_b)}.$$

Au réservoir R_1 est enlevée par là une quantité de chaleur:

$$w'' = e\,d\,T\left(\frac{\partial^2 U'_a}{\partial E_a\ \partial T} - \frac{\partial^2 U'_b}{\partial E_b\ \partial T}\right)_{(T,\, v_a,\, v_b,\, \varphi_a,\, \varphi_b,\, E_a,\, E_b)},$$

qui est dépensée à vaincre la pression extérieure.

§ 19. En fin de compte, il a été pris à R_1 la quantité de chaleur:

$$w + w''$$

et cédé à R_2 la quantité

$$w'.$$

De ces quantités, deux, savoir w et w'', ont été développées ou absorbées pendant le passage de l'électricité par les contacts; si on avait $w'' = 0$, elles devraient, d'après la seconde loi de la théorie de la chaleur, être dans le rapport des températures absolues. Lorsque cette proportionnalité n'existe pas, la chaleur w'' dont nous venons d'indiquer l'origine ne saurait être nulle.

Dans ce cas, on doit avoir:

$$\frac{(w + w'')}{T} = \frac{w' - (w + w'')}{d\,T} \quad \ldots\ldots\ldots\ (11)$$

En substituant dans l'équation (10):

$$\left[\left(\frac{\partial U'}{\partial E}\right)_a - \left(\frac{\partial U'}{\partial E}\right)_b\right]_{(T + d\,T,\, \varphi_a,\, \varphi_b,\, E_a,\, E_b)} =$$
$$= \left(\frac{\partial U'}{\partial E}\right)_a - \left(\frac{\partial U'}{\partial E}\right)_b + d\,T\left(\frac{\partial^2 U'_a}{\partial E_a \partial T} - \frac{\partial^2 U'_b}{\partial E_b \partial T}\right)_{(T,\, \varphi_a,\, \varphi_b,\, E_a,\, E_b)},$$

on reconnaît que

$$w' - (w + w'') = e\,(d\,\varphi_a - d\,\varphi_b) = e\,d\,\psi.$$

En outre, dans le numérateur du premier membre de (11), on peut négliger w'', quantité qui est de l'ordre dT; on obtient alors, après division par e:

$$\frac{\psi + \left(\frac{\partial U'}{\partial E}\right)_a - \left(\frac{\partial U'}{\partial E}\right)_b}{T} = \frac{d\psi}{dT},$$

ou

$$\left(\frac{\partial U'}{\partial E}\right)_a - \left(\frac{\partial U'}{\partial E}\right)_b = T\frac{d\psi}{dT} - \psi \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (A)$$

Cette équation montre que si dans les transmetteurs $\frac{\partial U'}{\partial T}$ était indépendant de E, et par conséquent $\frac{\partial U'}{\partial E}$ indépendant de T, ψ devrait être une fonction linéaire de la température. Si la différence de potentiel au contact est une autre fonction de T, $\left(\frac{\partial U'}{\partial E}\right)_a - \left(\frac{\partial U'}{\partial E}\right)_b$ varie avec la température; il en est alors de même de l'une au moins des quantités $\left(\frac{\partial U'}{\partial E}\right)_a$ et $\left(\frac{\partial U'}{\partial E}\right)_b$, et probablement de toutes les deux.

Si pour chaque couple de métaux ψ dépend exclusivement de la température, et tel semble être le cas, $\left(\frac{\partial U'}{\partial E}\right)_a - \left(\frac{\partial U'}{\partial E}\right)_b$ est également pour deux métaux une même fonction de la température dans tous les cas, quelles que soient la forme, la capacité, etc. des transmetteurs, Cette fonction est du reste indépendante de la charge des transmetteurs; si au paragraphe 8 nous avons admis que tous les corps considérés ont une charge positive, nous pouvons tout aussi bien supposer qu'il existe une charge négative, et nous obtiendrons alors le même résultat, à la condition de traiter dans tout le calcul E comme une variable, qui peut être positive ou négative, et d'entendre par dE, dans les dérivées telles qu'en contient l'équation (A), l'accroissement *algébrique*.

Pour que $\left(\frac{\partial U'}{\partial E}\right)_a - \left(\frac{\partial U'}{\partial E}\right)_b$, dans chaque couple de métaux, dépende seulement de la température, il faut que, pour tous les transmetteurs composés d'un même métal,

$$\frac{\partial U'}{\partial E} = F(T) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(B)}$$

soit une même fonction de la température, fonction entièrement indépendante de la forme, des dimensions ou de l'état particulier de ce transmetteur. Pour deux métaux A et B on a alors:

$$F_a(T) - F_b(T) = T\frac{d\,\psi}{d\,T} - \psi.$$

§ 20. On peut mettre sous une forme nouvelle le résultat obtenu en se rappelant que U' (§ 16) pouvait dépendre de T, E, φ et des quantités qui définissent la forme géométrique du transmetteur. Si nous nous bornons au cas où cette dernière est invariable, U' peut être envisagé comme une fonction de T, E et φ, et même de T et E seulement, puisqu'il a été démontré, au paragraphe 16, que $\frac{\partial U'}{\partial \varphi} = 0$. Mais alors on déduit de (B):

$$U' = E\,.\,F(T) + U_0', \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(C)}$$

où U_0' est l'énergie dans le cas où le conducteur ne possède pas de charge.

De (C) il résulte ensuite que, pour élever la température du transmetteur de T à $T + d\,T$, en maintenant invariables, par des forces appropriées, la forme géométrique ainsi que le volume gazeux, on doit fournir la quantité de chaleur:

$$d\,Q = E\,F'(T)\,d\,T + \frac{d\,U_0'}{d\,T}\,d\,T.$$

Nous introduirons maintenant une.

Quatrième hypothèse, savoir que la chaleur spécifique du gaz dont le transmetteur est pourvu, est indépendante de la charge électrique des conducteurs. Alors la chaleur nécessaire pour l'échauffement du gaz se trouvera comprise dans le dernier terme

de l'expression que nous venons de déduire pour $d\,Q$. Par conséquent, en supprimant la masse gazeuse, nous obtenons pour le transmetteur seul la formule:

$$d\,Q = E\,F'(T)\,d\,T + A\,d\,T, \quad \ldots\ldots\ldots (12)$$

où A est une constante ou une fonction de la température, indépendante de E.

Ce résultat s'applique aussi à un conducteur unique, bien que jusqu'ici nous ayons supposé le transmetteur formé d'au moins deux parties séparées. S'il reste quelque doute à cet égard, qu'on se figure le transmetteur composé de deux conducteurs égaux, placés de manière qu'ils soient toujours symétriques par rapport à un plan fixe. Une fois qu'ils ont reçu tous les deux la même quantité d'électricité, il n'est plus besoin de fil conjonctif entre eux (§ 9). Comme il faudra aussi pour chacun de ces deux corps la même quantité de chaleur, on aura pour chaque conducteur

$$d\,Q = \tfrac{1}{2}\,E\,F'(T)\,d\,T + \tfrac{1}{2}\,A\,d\,T, \quad \ldots\ldots (13)$$

si la formule (12) s'applique au transmetteur entier. Ce résultat devant être exact quelle que soit la distance des deux conducteurs, il doit encore persister lorsqu'ils sont assez éloignés l'un de l'autre pour ne plus exercer d'influence réciproque, donc aussi lorsque l'un des conducteurs est entièrement supprimé. Pour le conducteur unique qui reste, nous pouvons alors reprendre au lieu de (13) la formule (12), en représentant maintenant par E la charge de ce conducteur unique et par A sa capacité calorifique à l'état non électrisé.

Si l'on considère, en outre, que dans la formule (12) E peut être positive ou négative — de même que $F'(T)$ — et que pour une élévation finie de la température la chaleur nécessaire devient

$$Q = E\,[F(T_2) - F(T_1)] + \int_{T_1}^{T_2} A\,d\,T,$$

on obtient le résultat déjà énoncé au paragraphe 7, avec cette addition que pendant l'échauffement la forme géométrique du

conducteur ou du système des conducteurs doit être maintenue constante par des forces extérieures appropriées, et que, lorsque l'état non électrique est comparé à l'état électrique, cette forme doit être la même dans les deux cas.

§ 21. Quand l'électricité est considérée comme un *état* (de tension ou de mouvement) du conducteur lui-même ou du milieu ambiant, on se rendra compte de notre résultat en supposant que l'existence de cet état influe sur l'équilibre de température entre ce conducteur et des corps étrangers et, par suite, modifie la capacité calorifique du conducteur. Dans l'hypothèse, au contraire, de deux *matières* électriques on pourra admettre que celles-ci possèdent une certaine masse, qu'elles prennent part au mouvement calorifique dans le conducteur, et que par suite elles sont animées d'une force vive appréciable, qu'on supposera différente pour des quantités égales de la matière positive et de la matière négative. Suivant qu'un conducteur possède un excès de l'une des électricités, ou un excès de l'autre, il faudra alors plus ou moins d'énergie pour lui donner une certaine élévation de température. Et si pour deux métaux $F'(T)$ a des signes contraires, cela prouvera que dans l'un c'est l'électricité positive, dans l'autre l'électricité négative qui possède la force vive la plus grande.

Un point mérite encore d'être signalé. Les charges électriques dont il a été question dans notre étude se trouvent à la surface des conducteurs et, si nos formules sont exactes, l'électricité prendra part au même degré au mouvement calorifique, de quelque manière qu'elle soit distribuée sur la surface, qu'elle y soit accumulée avec une grande densité sur une pointe, ou qu'elle se trouve en une partie à courbure faible. Ce résultat, toutefois, dépend entièrement de la seconde hypothèse; il pourrait ne pas être vrai si contrairement à cette hypothèse, la manière dont l'électricité est distribuée sur une surface pouvait subir quelque modification par l'échauffement.

En appelant *chaleur spécifique de l'électricité* (*positive*) la quantité de chaleur nécessaire, à cause de la présence d'une charge

électrique $= 1$, pour élever d'un degré la température, on a pour cette chaleur spécifique:

$$\sigma = F'(T) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

§ 22. Dans les raisonnements auxquels a donné lieu l'équation (A) nous avons pris pour point de départ cette circonstance que ψ ne serait pas une fonction linéaire de la température. Des forces électromotrices pouvant toutefois agir dans l'intérieur d'un même métal, la force électromotrice des circuits thermo-électriques ne peut rien nous apprendre directement, sans l'intervention d'une théorie, au sujet de la valeur de ψ à différentes températures. Pour cette raison, nous allons plutôt considérer la quantité $\left(\frac{\partial U'}{\partial E}\right)_a - \left(\frac{\partial U'}{\partial E}\right)_b$ en corrélation avec le développement de chaleur découvert par Peltier.

Revenons à l'équation (9). La quantité de chaleur déterminée par cette équation a été cédée, il est vrai, au réservoir R, mais il reste encore à savoir si elle a apparu tout entière au point de contact de A et de B, ou bien en partie dans les transmetteurs G_a et G_b. La première supposition me paraît extrêmement probable. Après les considérations précédentes, nous avons en effet tout lieu d'admettre que l'énergie $E\,F(T)$, dans l'équation (C), est, aussi bien que l'énergie électrostatique ordinaire, liée *à l'électricité.* Or, de même que cette dernière énergie est la même tant que l'électricité reste dans un espace au même potentiel, pareillement la première ne change pas tant que l'électricité reste *dans le même métal.* Les deux parties de l'énergie ne sont donc gagnées ou perdues qu'au point de contact même, et c'est *là* que doit être absorbée ou dégagée une quantité équivalente de chaleur.

La chose deviendrait très simple si des différences de potentiel ne naissaient que des attractions inégales des métaux sur les deux électricités, et si, par suite, l'énergie $E\,F(T)$ dans l'équation (C) pouvait être regardée comme l'énergie potentielle que la quantité d'électricité E possède vis-à-vis des molécules

métalliques. On aurait alors, comme M. Helmholtz l'a fait voir,

$$\varphi_a - \varphi_b = \left(\frac{\partial\, U'}{\partial\, E}\right)_b - \left(\frac{\partial\, U'}{\partial\, E}\right)_a,$$

de sorte que d'après la formule (9) le phénomène de Peltier n'existerait pas, ainsi que l'a démontré aussi M. Clausius [1]). En réalité, bien entendu, la chose ne sera pas aussi simple, et $E\,F(T)$ dans l'équation (C) ne sera pas, ou ne sera pas uniquement, énergie potentielle.

§ 23. Si nous regardons la formule (9) comme l'expression du phénomène de Peltier, la quantité que M. Thomson désigne par Π (§ 3) acquerra la valeur suivante:

$$\Pi = -\,\psi - \left(\frac{\partial\, U'}{\partial\, E}\right)_a + \left(\frac{\partial\, U'}{\partial\, E}\right)_b \quad \ldots\ldots \text{(D)}$$

En combinant cette équation avec (A), on obtient

$$\left(\frac{\partial^2\, U'}{\partial\, T\, \partial\, E}\right)_a - \left(\frac{\partial^2\, U'}{\partial\, T\, \partial\, E}\right)_b = -\,T\frac{d}{dT}\left(\frac{\Pi}{T}\right),$$

ou, en ayant égard à (C) et à (14),

$$\sigma_a - \sigma_b = \frac{\Pi}{T} - \frac{d\,\Pi}{d\,T}, \quad \ldots\ldots\ldots \text{(E)}$$

ce qui est entièrement d'accord avec le résultat que M. Thomson a trouvé par une voie si différente.

Nous pouvons aussi de (A) et (D) éliminer $\left(\frac{\partial U'}{\partial E}\right)_a - \left(\frac{\partial U'}{\partial E}\right)_b$, ce qui donne

$$\frac{d\,\psi}{d\,T} = -\frac{\Pi}{T}\ .$$

En supposant que dans un circuit de deux métaux des forces électromotrices agissent seulement aux points de contact, on déduira de cette équation, pour la force électromotrice

---

[1]) *Mechanische Wärmetheorie*, II, p. 174.

dans un tel arrangement

$$\psi(T_1) - \psi(T_2) = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\Pi}{T} d\,T,$$

ce qui est de nouveau le résultat obtenu par M. Thomson (§ 3).

§ 24. La théorie développée ici conduirait donc, pour un circuit de deux métaux, précisément au même résultat mathématique que les théories de MM. Thomson, Clausius et Budde, s'il était permis d'admettre qu'*aucune différence de potentiel* n'apparaît au contact de parties inégalement chaudes d'un même métal. A cet égard, les considérations que nous avons présentées ne peuvent rien nous apprendre avec certitude, puisque nous avons eu soin de ne pas introduire un pareil contact. Je ferai seulement une observation qui me paraît plaider contre l'existence des différences de potentiel en question, dans l'hypothèse toujours que la structure ne soit fonction de la température que de la manière indiquée au paragraphe 10.

En effet, si au contact d'une partie chaude et d'une partie froide d'un même métal il se produisait une force électromotrice, ainsi que cela est le cas au contact de deux métaux différents, on pourrait s'attendre à ce qu'un travail fût toujours nécessaire pour faire passer une quantité d'électricité d'une masse de métal chaud à une masse froide lorsque celles-ci sont au même potentiel, tout comme, lorsqu'une pièce de zinc et une pièce de cuivre possèdent le même potentiel, un travail positif doit être dépensé pour faire passer de l'électricité positive du zinc au cuivre.

Or, quand par voie réversible, à l'aide du transmetteur employé dans notre raisonnement, nous voulons faire passer de l'électricité d'un métal froid à un métal chaud, cela ne nous coûte aucun travail.

Soient, pour le démontrer, P_1 et P_2 deux conducteurs à températures T et $T + d\,T$, avec les réservoirs de chaleur R_1 et R_2. Supposons leur capacité très grande, de sorte que les potentiels restent constants; attribuons à ces potentiels la même

valeur φ. Qu'on se figure de plus un transmetteur G muni d'une masse gazeuse, comme il a été expliqué plus haut. Pour faire passer alors une quantité infiniment petite e d'électricité de P_1 à P_2, on prendra d'abord le transmetteur à l'état déterminé par

$$T,\ v,\ \varphi,\ E,$$

on le mettra en communication avec P_1 et on agrandira sa capacité de façon que la charge e passe sur G. Cet agrandissement doit être:

$$d\,C = \frac{e}{\varphi}$$

et exige un travail

$$-\tfrac{1}{2}\,\varphi^2\,d\,C = -\tfrac{1}{2}\,e\,\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Après que le transmetteur a été séparé de P_1, on devra élever la température de $d\,T$, par une compression adiabatique de la masse gazeuse. Il faut pour cela un certain changement de volume $d\,v$. On mettra ensuite G en communication avec P_2 et, par une diminution de la capacité de G, on forcera la quantité d'électricité e à se porter de G sur P_2. Ceci exige un travail:

$$\tfrac{1}{2}\,e\,\varphi,$$

qui compense exactement le travail représenté par (15). Enfin, on aura encore deux changements de volume à effectuer pour remettre le transmetteur dans l'état primitif, savoir, un premier, adiabatique, pour ramener la température à T, un second après avoir mis le transmetteur en communication avec P_1 et R_1. Ces changements de volume étant désignés par $d'v$ et $d''v$, on a

$$d\,v + d'v + d''v = 0.$$

Dans le calcul du travail de la pression p, pendant ces changements de volume, on observera que $d\,v$, $d'v$ et $d''v$ sont du même ordre que $d\,T$ ($d''v$ est même de l'ordre $e\,d\,T$). On pourra donc, les termes de l'ordre $(d\,T)^2$ étant négligeables, omettre dans p les quantités de l'ordre $d\,T$ et $d\,v$. Mais cela

veut dire qu'il est permis de regarder la pression comme constante, puisqu'elle ne saurait varier que par les changements de température et de volume (troisième hypothèse). Le travail est donc $p\,(d\,v + d'v + d''v)$, par conséquent $= 0$, ce qui achève de démontrer l'assertion que nous avions émise.

§ 25. Il est à remarquer d'ailleurs que, même *sans* admettre des différences de potentiel entre des parties inégalement chaudes d'un même métal, on peut expliquer les expériences de M. Thomson sur la convection de la chaleur par l'électricité. Supposons, en effet, que les différences en question n'existent *pas*, et considérons dans le circuit un élément dont les extrémités aient les températures $T + d\,T$ et T; lorsqu'une quantité d'électricité $= 1$ traverse cet élément, de la première extrémité à la seconde, l'énergie de l'électricité qui sort surpassera celle de l'électricité qui entre dans l'élément de la quantité :

$$w = F(T + d\,T) - F(T),$$

— voir l'équation (C) —, ou, en vertu de (14), de:

$$w = \sigma\,d\,T \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Une quantité équivalente de chaleur sera alors développée dans l'élément, tout comme le veut la théorie de M. Thomson. Nous avons fait abstraction des différences de potentiel nécessaires pour entretenir le courant et dont la considération conduirait au développement de chaleur proportionnel au carré de l'intensité du courant. S'il existait des différences de potentiel entre les parties chaudes et froides d'un fil métallique, un terme dépendant de ces différences devrait être ajouté à (16).

§ 26. Comparons maintenant les différentes théories.

Lorsque la seconde loi de la Thermodynamique est appliquée comme nous l'avons fait dans ce mémoire, on obtient entre la chaleur spécifique de l'électricité et le phénomène de Peltier la relation

$$\sigma_a - \sigma_b = \frac{\Pi}{T} - \frac{d\,\Pi}{d\,T} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

et pour la différence de potentiel ψ au contact la formule

$$\frac{d\,\psi}{d\,T} = -\frac{\Pi}{T} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\beta)$$

Si l'on admet, de plus, qu'aucune force électromotrice n'agit entre les parties chaudes et froides d'un même métal, la force électromotrice dans un circuit est déterminée par

$$F = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\Pi}{T} d\,T \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\gamma)$$

(voir, pour le signe de F, § 3), tandis que dans un élément dont les extrémités ont les températures T et $T + d\,T$ le développement de chaleur proportionnel à la première puissance de l'intensité du courant a pour valeur, par unité du courant,

$$w = \sigma\,d\,T \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\delta)$$

Dès que la relation (γ) est confirmée expérimentalement, ou dès que cela est le cas pour (δ), c'est-à-dire, dès qu'il est démontré que les valeurs de σ, déduites pour deux métaux des développements de chaleur, satisfont à (α), il est aussi *démontré* qu'il n'existe aucune force électromotrice entre les parties d'un même métal, chaudes et froides.

Applique-t-on, ainsi que l'a fait M. Thomson, la seconde loi thermodynamique au *circuit thermo-électrique*, sans encore rien supposer quant au *siège* des forces électromotrices dont la somme F est composée, on obtient, en définissant σ par (δ), directement la formule (α), tandis que la loi de la conservation de l'énergie donne ensuite (γ). Nous pouvons en conclure que la non-existence de forces électromotrices dans un même métal est aussi démontrée s'il est permis d'appliquer le théorème de Carnot au circuit thermo-électrique et si l'application que j'en ai faite est également justifiée. Car l'un des raisonnements

conduit alors à des relations qui, d'après l'autre, ne peuvent exister que dans l'absence des forces électromotrices en question. Tout ceci est du reste subordonné à la proposition (§ 22) que, dans ma théorie, la totalité de la chaleur représentée par (9) apparaît au *lieu de contact.*

§ 27. Dans les théories de M. Clausius et de M. Budde on admet, au contraire, qu'entre des parties inégalement chaudes d'un même métal agissent des forces électromotrices. M. Clausius suppose, en effet, que tout développement de chaleur proportionnel à la première puissance de l'intensité du courant, en un point quelconque du circuit, est la preuve de l'existence *en ce même point* d'une force électromotrice, à laquelle il est proportionnel. Suivant cette opinion, partagée par Maxwell [1]), ce n'est pas la quantité totale de chaleur, représentée par notre formule (9), qui sera développée au contact, mais seulement la première partie, de sorte qu'on aurait

$$\Pi = \varphi_b - \varphi_a = -\psi \qquad (17)$$

(voir pour les signes les paragraphes 3 et 17).

D'un autre côté, le développement de chaleur dans un élément dont les extrémités ont les températures T et $T + d\,T$, développement considéré au paragraphe 25, ne pourra alors avoir lieu que si le long de cet élément, de l'extrémité froide à l'extrémité chaude, il existe une force électromotrice

$$\sigma\, d\, T.$$

Dans cette manière de voir, la *force électromotrice totale d'un circuit* devient naturellement la même que dans l'autre théorie; on trouve en effet pour cette force totale (voir § 3)

$$F = \psi(T_1) - \psi(T_2) + \int_{T_1}^{T_2} (\sigma_a - \sigma_b)\, d\, T,$$

ou, suivant l'équation (α) qu'on déduit aussi dans la théorie de M. Clausius,

$$F = \Pi_2 - \Pi_1 + \int_{T_1}^{T_2} \left(\frac{\Pi}{T} - \frac{d\,\Pi}{d\,T}\right) d\,T = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\Pi}{T}\, d\,T$$

[1]) *Electricity and Magnetism*, 2e éd., I, § 249.

L'hypothèse de M. Clausius et de Maxwell dépend toutefois de cette autre supposition que par le transport de l'électricité d'un point à un autre, il ne peut être perdu ni gagné aucune autre énergie que l'énergie électrostatique ordinaire; si l'électricité existant dans le métal possède encore une autre énergie, qui serait différente aux points de départ et d'arrivée, la quantité de chaleur développée ou absorbée ne sera pas proportionnelle à la différence de potentiel. En réalité, d'ailleurs, c'est là ce qu'admet aussi M. Clausius (voir § 22); en dehors de l'énergie électrostatique, il suppose une certaine énergie potentielle, résultant des forces que les deux électricités éprouvent de la part des molécules métalliques, et en conséquence, suivant lui, $\varphi_b - \varphi_a$ dans la formule (17) n'est pas la différence de potentiel *totale*. Toutefois, comme cette énergie potentielle serait indépendante de la température, les différences de potentiel qui y correspondent, et qui sont omises dans la formule (17), sont égales aux deux points de contact d'un circuit et peuvent donc être négligées dans la considération de la force électromotrice totale de ce dernier.

Or, le caractère propre de la théorie que j'ai développée est précisément d'exiger, en dehors de l'énergie électrostatique ordinaire, une autre énergie qui dépendrait de la température, et d'établir en conséquence, entre la vraie différence de potentiel au point de contact et celle qui est proportionnelle à l'effet de Peltier, une différence non indépendante de la température et ne pouvant donc pas être négligée dans le calcul de F.

§ 28. Nous admettrons maintenant que les relations (α), (γ) et (δ) du paragraphe 26 se trouvent vérifiées: alors, si les hypothèses que j'ai introduites et les considérations théoriques que j'ai présentées sont exactes, la théorie de M. Clausius devra être abandonnée. Laissons de côté cependant ces considérations et examinons si de quelque autre manière une décision entre les deux opinions concernant le siège des forces électromotrices, celle de M. Clausius et la mienne, pourrait être obtenue. Les expériences pourraient nous don-

ner cette décision si les différences de potentiel produites étaient susceptibles de mesures directes, soit qu'on parvînt à prouver l'existence ou la non-existence de pareilles différences entre une partie chaude et une partie froide du même métal, soit qu'on pût étudier avec une exactitude suffisante, quant à sa dépendance de la température, la différence de potentiel ψ au contact. Tandis que la théorie de M. Clausius exige

$$\frac{d\psi}{dT} = -\frac{d\Pi}{dT},$$

la mienne conduit à la relation

$$\frac{d\psi}{dT} = -\frac{\Pi}{T},$$

de sorte que, par exemple, à la température à laquelle Π change de signe, l'une des théories seulement exigerait la disparition de $\frac{d\psi}{Td}$. La faiblesse des forces électromotrices des éléments thermo-électriques ne laisse guère espérer, toutefois, que de semblables mesures puissent être exécutées.

Il est à peine besoin de dire que la question ne saurait être tranchée par des expériences sur la force électromotrice et les développements de chaleur dans un circuit fermé. Mais, la distribution de l'électricité libre et les valeurs du potentiel étant différentes dans les deux théories, on pourrait croire qu'en divisant convenablement les courants entre plusieurs branches, ou en combinant plus de deux métaux, on rencontrerait des cas où la marche du courant ne serait plus la même d'après les deux théories. Ceci encore est impossible, ainsi que je vais le montrer.

Imaginons plusieurs métaux différents, en partie limités par des surfaces libres, en partie se touchant suivant certaines surfaces. Supposons qu'en chaque point (x, y, z) de chaque métal la température soit maintenue à une hauteur déterminée. On peut alors, dans l'une comme dans l'autre théorie, se

poser la question, quelle sera la distribution stationnaire du courant et quelle sera partout la quantité de chaleur développée ou absorbée par unité de temps.

Dans cet examen, soient u, v, w les composantes du courant, φ le potentiel, $\varkappa$ la résistance du métal. Désignons, en outre, par S chaque surface qui limite un métal, par n une normale à cette surface, par α, β, γ les angles que cette normale fait avec les axes des coordonnées. Lorsque S est la surface de séparation de deux métaux, nous distinguerons ceux-ci par les lettres A et B.

Dans chaque théorie les conditions pour l'état stationnaire sont les mêmes, savoir, à l'intérieur d'un métal,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (18)$$

à une surface libre:

$$u \cos \alpha + v \cos \beta + w \cos \gamma = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (19)$$

et à une surface de séparation:

$$(u_a - u_b) \cos \alpha + (v_a - v_b) \cos \beta + (w_a - w_b) \cos \gamma = 0 \ . \quad (20)$$

Dans la théorie qui ne suppose pas de forces électromotrices à l'intérieur d'un même métal, on doit en outre avoir

$$u = -\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = -\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = -\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial \varphi}{\partial z} \ . \quad (21)$$

et partout aux surfaces de séparation

$$\varphi_a - \varphi_b = \psi \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (22)$$

où ψ satisfait à l'équation (β) du paragraphe 26.

En substituant les valeurs (21) dans (18), (19), (20), on obtient quelques conditions qui, avec (22), déterminent φ, à une constante additive près. Par là, on connaîtra aussi u, v, w.

Dans la théorie de M. Clausius, les équations (21) et (22) doivent être remplacées par d'autres. Suivant cette théorie, le long d'un élément linéaire ds dont les extrémités ont les températures T et $T + dT$, une force électromotrice $\sigma\, dT$ agit de l'extrémité froide à l'extrémité chaude; en d'autres termes, sur une unité d'électricité agit une force qui, quand cette unité se déplace le long de ds, exécute un travail $\sigma\, dT$. Cette dernière force est donc $\sigma \frac{dT}{ds}$, et de même, dans un corps à trois dimensions, agiront sur l'unité d'électricité, dans la direction des axes de coordonnées, les forces

$$\sigma \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \sigma \frac{\partial T}{\partial y}, \quad \sigma \frac{\partial T}{\partial z} .$$

En conséquence, nous devons remplacer (21) par

$$u = \frac{1}{\varkappa}\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sigma \frac{\partial T}{\partial x}\right), \; v = \frac{1}{\varkappa}\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \sigma \frac{\partial T}{\partial y}\right),$$
$$w = \frac{1}{\varkappa}\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \sigma \frac{\partial T}{\partial z}\right), \quad \ldots \ldots \ldots (23)$$

tandis qu'on doit avoir

$$\varphi_a - \varphi_b = A - \Pi \, . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (24)$$

La quantité A est ici la différence de potentiel, qui dans la théorie de M. Clausius existe indépendamment de la température. Comme cette différence de potentiel satisfait à la loi de la série des tensions, elle ne peut jamais avoir quelque influence sur l'intensité du courant.

Pour comparer les équations auxquelles conduit l'une des théories avec celles qui se déduisent de l'autre, nous observerons que, de quelque manière que σ dépende de T, on peut pour chaque métal introduire la fonction $\int \sigma\, d\, T$. En posant donc partout, dans la théorie de M. Clausius,

$$\varphi - \int \sigma \, d\, T = \varphi',$$

les équations (23) deviennent

$$u = -\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial \varphi'}{\partial x}, v = -\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial \varphi'}{\partial y}, w = -\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial \varphi'}{\partial z}, \quad . \; . \; . \quad (25)$$

tandis que (24) se transforme en

$$\varphi'_a - \varphi'_b = \psi', \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (26)$$

lorsqu'on pose

$$\psi' = A - \Pi - \int (\sigma_a - \sigma_b)\, d\, T.$$

Si l'on tient compte en outre de la relation (α) du § 26, on obtient

$$\psi' = A - \int \frac{\Pi}{T}\, d\, T,$$

de sorte que, par comparaison avec la quantité ψ de la relation (22), on trouve

$$\frac{d\,\psi'}{d\,T} = -\frac{\Pi}{T} = \frac{d\,\psi}{d\,T},$$

ce qui montre que la différence de ψ' et de ψ, pour chaque couple de métaux, est indépendante de la température.

Si à chaque surface limite les quantités ψ de (22) et ψ' de (26) étaient égales l'une à l'autre, u, v, w et φ seraient dans l'une des théories déterminés par des équations exactement les mêmes que celles qui dans l'autre déterminent u, v, w et φ', puisque les équations (25) et (26) concorderaient alors entièrement avec (21) et (22). Cela prouve que, dans ce cas, les deux théories conduiraient exactement à la même distribution de courant. Et il en sera encore de même si à chaque surface limite il

existe entre ψ et ψ' une différence indépendante de la température; car, en vertu de la loi de la série des tensions, à laquelle sont assujetties toutes les différences de potentiel dont il est ici question, les différences de potentiel indépendantes de T ne peuvent jamais, comme nous l'avons déjà dit, exercer quelque influence sur l'intensité et la distribution des courants.

Enfin, les deux théories conduisent encore au même résultat en ce qui concerne le développement de chaleur. Pour la surface de séparation de deux métaux, cela se reconnaît tout aussi simplement que pour les lieux de contact dans un circuit de conducteurs linéaires. Afin de le montrer également pour la chaleur dégagée à l'intérieur d'un métal, désignons par M l'énergie que possède l'unité d'électricité existant dans ce métal. En considérant un élément de volume $dx\,dy\,dz$ et ayant égard à l'énergie apportée ou emportée par l'électricité qui entre ou sort dans l'unité de temps, on trouve facilement pour la chaleur développée dans ce parallélipipède

$$-\left[\frac{\partial(uM)}{\partial x}+\frac{\partial(vM)}{\partial y}+\frac{\partial(wM)}{\partial z}\right]dx\,dy\,dz,$$

ou, en vertu de (18),

$$-\left[u\frac{\partial M}{\partial x}+v\frac{\partial M}{\partial y}+w\frac{\partial M}{\partial z}\right]dx\,dy\,dz.$$

Or, dans ma théorie, on a (voir la relation (C) du § 20)

$$M=\varphi+F(T),$$

de sorte que, si l'on tient compte de (14), le développement de chaleur devient

$$-\left[u\frac{\partial\varphi}{\partial x}+v\frac{\partial\varphi}{\partial y}+w\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right]dx\,dy\,dz\,-$$
$$-\sigma\left[u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}+w\frac{\partial T}{\partial z}\right]dx\,dy\,dz,\quad\ldots\ldots\quad(27)$$

où les deux termes représentent précisément les développements de chaleur proportionnels à la seconde et à la première puissance de l'intensité du courant.

Dans la théorie de M. Clausius, on a

$$M = \varphi,$$

et le développement de chaleur devient donc

$$-\left[u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi}{\partial y} + w \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right] dx\, dy\, dz,$$

expression qui, lorsqu'on introduit de nouveau φ', se transforme en (27), à cela près que la quantité φ est remplacée par φ'. Comme, toutefois, les mêmes équations servent à déterminer φ' (ou plutôt la manière dont cette quantité varie d'un point à l'autre) dans l'une des théories et φ dans l'autre, on voit que finalement les résultats concordent aussi pour le développement de chaleur.

§ 29. Parmi les théories thermo-électriques, celle de M. F. Kohlrausch [1]) occupe une place tout à fait à part. On y admet, en effet, qu'aucune force électromotrice n'agit aux points de contact, mais que, lorsque la chaleur se transporte par conductibilité d'un point de contact à l'autre, dans chacun des deux métaux dont un circuit est composé le flux de chaleur engendre un courant électrique proportionnel à lui-même. Tandis qu'il est ainsi rendu compte de la production du courant thermo-électrique, le développement de chaleur de Peltier trouve son explication, chez M. Kohlrausch, dans l'hypothèse que réciproquement un courant électrique entraînerait de la chaleur, et cela en quantité différente pour des métaux différents. En conséquence, lorsqu'un courant électrique est conduit à travers un point de contact, il y aurait plus de chaleur amenée vers ce point dans l'un des métaux que de chaleur emmenée dans l'autre métal (ou réciproquement).

Je ne m'étendrai pas sur cette théorie, mais remarquerai

---

[1]) Pogg. *Ann.*, t. 156, p. 601.

seulement qu'elle est tout à fait hors de la portée des considérations développées dans ce Mémoire.

En effet, s'il n'existe aucune différence de potentiel entre les deux métaux qui constituent les contacts supposés au paragraphe 8, le cycle décrit au paragraphe 11 ne peut rien nous apprendre sur les différences de potentiel ni sur les forces électromotrices. Nous ne pourrons rien en conclure non plus — si l'interprétaton de M. Kohlrausch est exacte — au sujet du développement de chaleur de Peltier. Car, lorsqu'à travers un contact nous faisons passer de l'électricité du transmetteur G_a à G_b, la chaleur manifestée au point de contact sera, d'après cette interprétation, une partie de celle qui y est amenée du côté de G_a, par le courant électrique, tandis que le reste de cette dernière chaleur est transmis à G_b. Si tout le système, les transmetteurs aussi bien que le contact, est en communication avec le réservoir R, aucune chaleur ne sera en somme enlevée ou cédée à celui-ci, puisqu'il s'agit seulement d'une autre distribution de la même quantité de chaleur entre les parties du système. Cette distribution, toutefois, échappe au mode de raisonnement que nous avons employé dans le présent travail et qui ne peut nous renseigner que sur la chaleur donnée ou empruntée à R.

§ 30. Pour terminer, je dirai encore comment le résultat du paragraphe 20 doit être modifié quand on veut supprimer la condition que, pendant l'échauffement du conducteur, sa forme géométrique reste invariable. On peut s'imaginer, en effet, que toutes les quantités qui déterminent cette forme, et que nous avons jusqu'ici regardées comme constantes, soient introduites à titre de variables. Alors il faut encore appliquer des forces extérieures, suffisantes à chaque instant pour maintenir ces quantités à des valeurs déterminées, mais nous pouvons maintenant considérer des changements réversibles dans lesquels se produisent des modifications de la forme.

Soient α, β, γ ces quantités, qu'on introduit pour déterminer la forme, et soit, pour un accroissement infiniment petit de ces quantités,

$$L\,d\alpha + M\,d\beta + N\,d\gamma + \ldots .$$

le travail qu'exécutent les forces extérieures, tandis que l'énergie du conducteur, par suite des changements en question, augmente de:

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial U}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial U}{\partial \gamma} d\gamma + \ldots .$$

L'équation (12) continuant à représenter la quantité de chaleur à fournir dans le cas où α, β, $\gamma \ldots .$ ne changent pas, nous aurons maintenant:

$$d\,Q = E\,F'(T)\,d\,T + A\,d\,T - L\,d\alpha - M\,d\beta - N\,d\gamma - \ldots .$$
$$+ \frac{\partial U}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial U}{\partial \beta} \partial\beta + \frac{\partial U}{\partial \gamma} d\gamma + \ldots .$$

Supposons que cette équation se rapporte au cas où le conducteur est chargé d'électricité positive, et comparons à ce cas celui où il est pourvu d'une égale quantité d'électricité négative et où il subit la même élévation de température, ainsi que le même changement de forme. La quantité A reste alors la même, puisqu'elle ne dépend pas de E. Les quantités L, M, N, ... conservent également la même valeur et le même signe, car les forces nécessaires pour maintenir le conducteur dans une forme déterminée sont, autant que nous sachions, les mêmes, qu'il soit chargé d'électricité positive ou d'une quantité égale d'électricité négative; en tant que ces forces dépendent de E, elles sont proportionnelles à E^2. Enfin, la partie de l'énergie qui dépend de α, β, γ, ... est aussi, pour autant que nous sachions, la même dans les deux cas. Nous avons, par exemple, à considérer une pareille énergie lorsque le conducteur éprouve des changements de forme par suite des répulsions électriques; comme ces changements deviennent égaux pour des charges positives et négatives égales, il en sera de même de l'énergie en question. Or, si nous admettons que $\frac{\partial U}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial U}{\partial \beta}$, $\frac{\partial U}{\partial \gamma}$, ... ont toujours pour les charges

$+E$ et $-E$ les mêmes valeurs, la différence des valeurs que dQ acquiert pour ces charges est

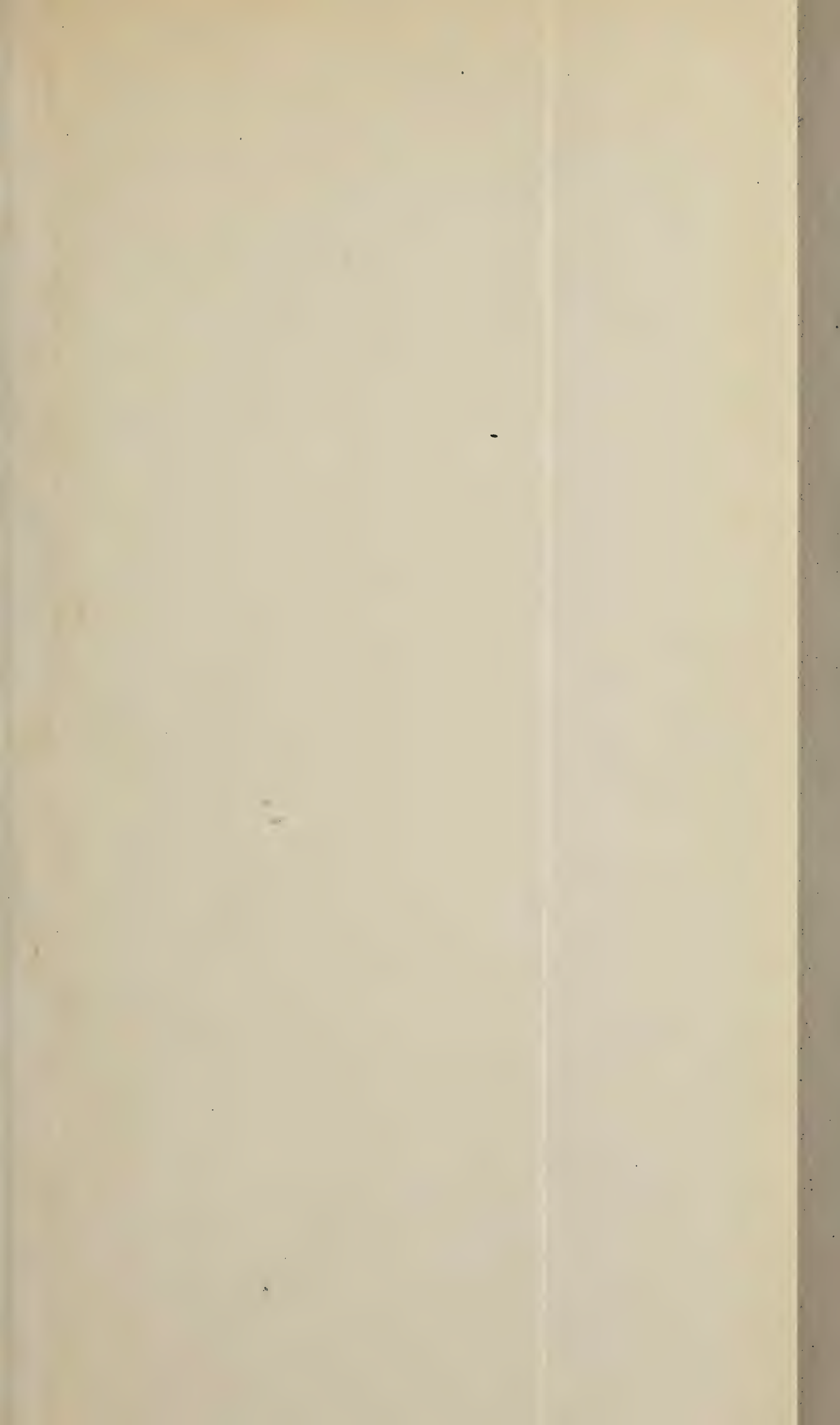
$$2\,E\,F\,(T)\,d\,T, \qquad (28)$$

de sorte qu'un conducteur à charge $+E$ et un conducteur égal à charge $-E$ exigent, pour une élévation de température déterminée, ayant lieu dans des conditions identiques, des quantités de chaleur inégales.

Un cas particulier est naturellement celui où l'on considère seulement des états du conducteur dans lesquels aucune force extérieure n'est nécessaire, où on laisse donc s'effectuer librement la dilatation par la chaleur et la déformation par les forces électriques.

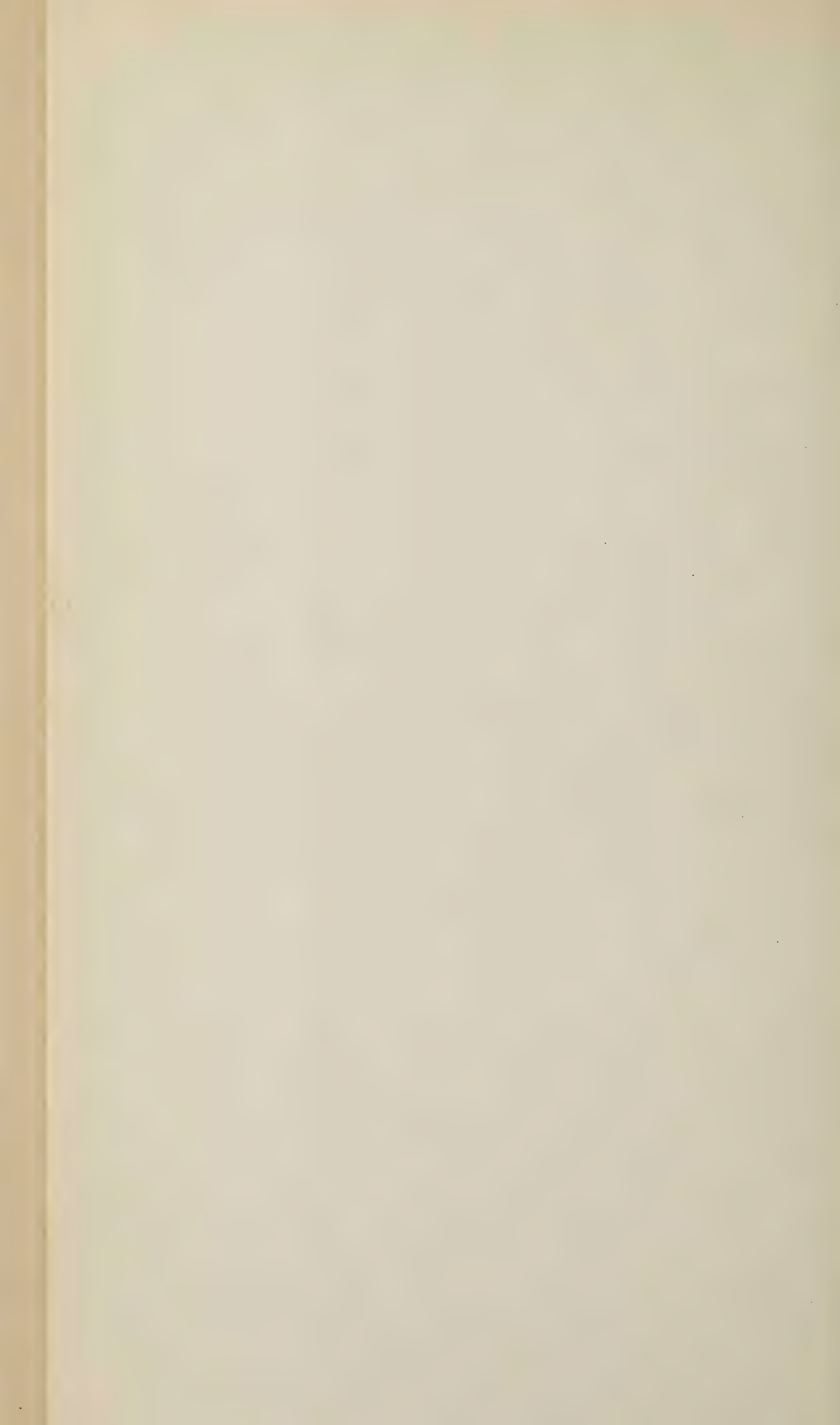
Les expériences sur les phénomènes thermo-électriques apprennent, du reste, que la quantité de chaleur (28), intégrée pour des intervalles de température finis, ne devient comparable à des calories que lorsque E est une quantité d'électricité de l'ordre de celle qui entre en jeu dans les courants électriques. Pour toutes les charges électrostatiques ordinaires, la valeur (28) restera donc insensible.

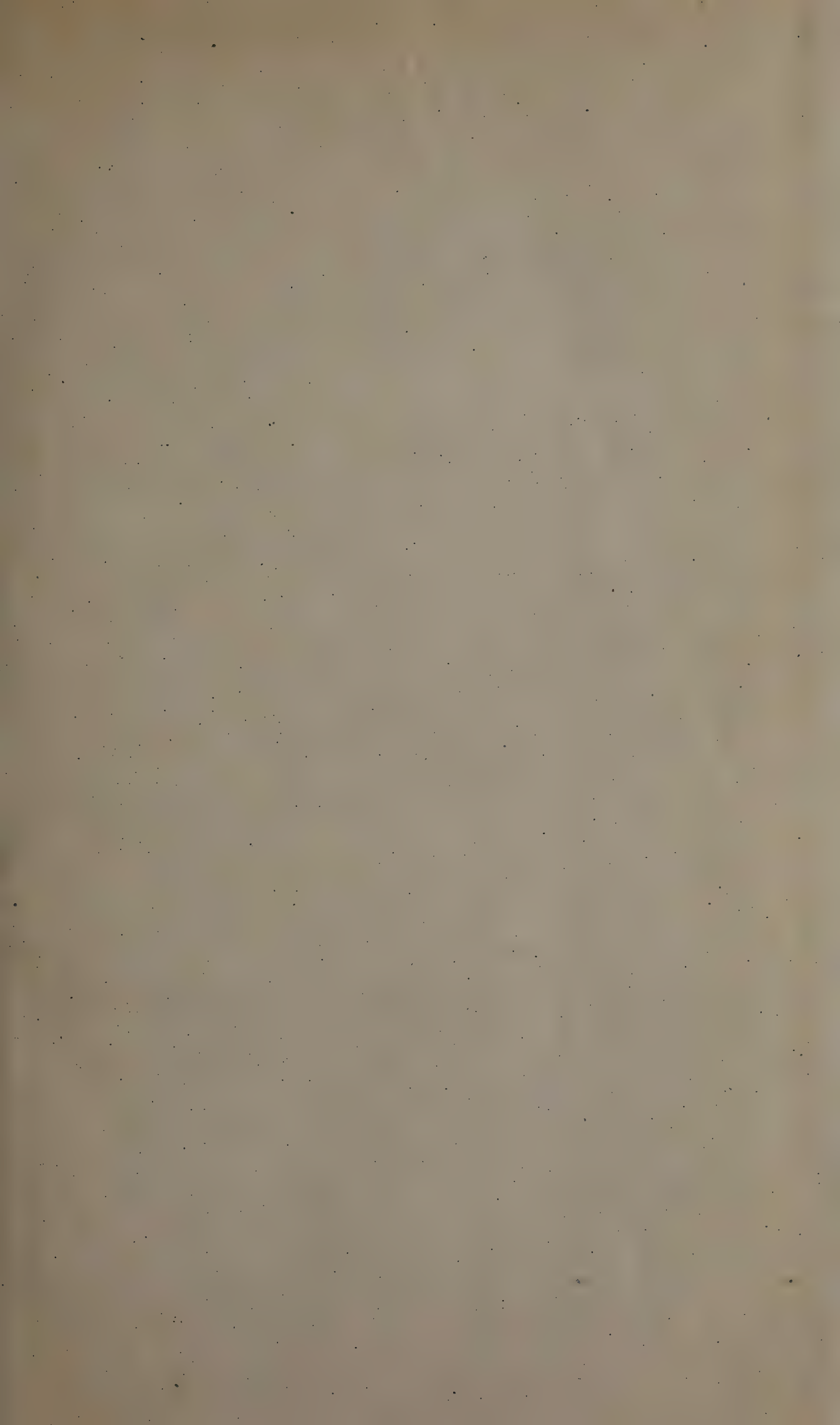
LEYDE, Avril 1885.





1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24.





DEUXIÈME LIVRAISON.

C. van Wisselingh, La gaîne du cylindre central dans la racine des phanérogames. . . . Pag. 95.
J. W. Giltay, L'emploi de la pile auxiliaire dans la téléphonie . . . . " 117.
H. A. Lorentz, Sur l'application aux phénomènes thermo-électriques de la seconde loi de la théorie mécanique de la chaleur . . . . " 129.

CONDITIONS DE L'ABONNEMENT.

Les **Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles** paraissent à des époques indéterminées, en livraisons de 6 à 12 feuilles d'impression, avec un nombre illimité de planches coloriées et noires.

Trente feuilles forment un volume.

Avec la dernière livraison de chaque volume les souscripteurs reçoivent gratis une table des matières, un titre général et une couverture.

Les abonnements engagent à un volume seulement. Les livraisons ne se vendent pas séparément.

Le prix du volume, avec les planches, est fixé à *fl.* 6.—.

On souscrit chez l'éditeur et chez tous les libraires des Pays-Bas et de l'étranger.

Pour faciliter l'acquisition de la première série du recueil, composée des volumes I à X (années 1866—1875), avec tables alphabétiques générales des matières et des noms d'auteurs, cette série est offerte temporairement au prix réduit de:

fl. de Holl. 40 = francs 84 = marks 67.

Les personnes qui voudraient profiter de cette offre sont priées de s'adresser directement au Secrétaire de la Société hollandaise des sciences à Harlem.

HARLEM. — IMPRIMERIE DES HÉRITIERS LOOSJES.

TOME XX. 3me Livraison.

ARCHIVES NÉERLANDAISES

DES

SCIENCES EXACTES ET NATURELLES

PUBLIÉES PAR

LA SOCIÉTÉ HOLLANDAISE DES SCIENCES À HARLEM,

ET RÉDIGÉES PAR

le Secrétaire de la Société,

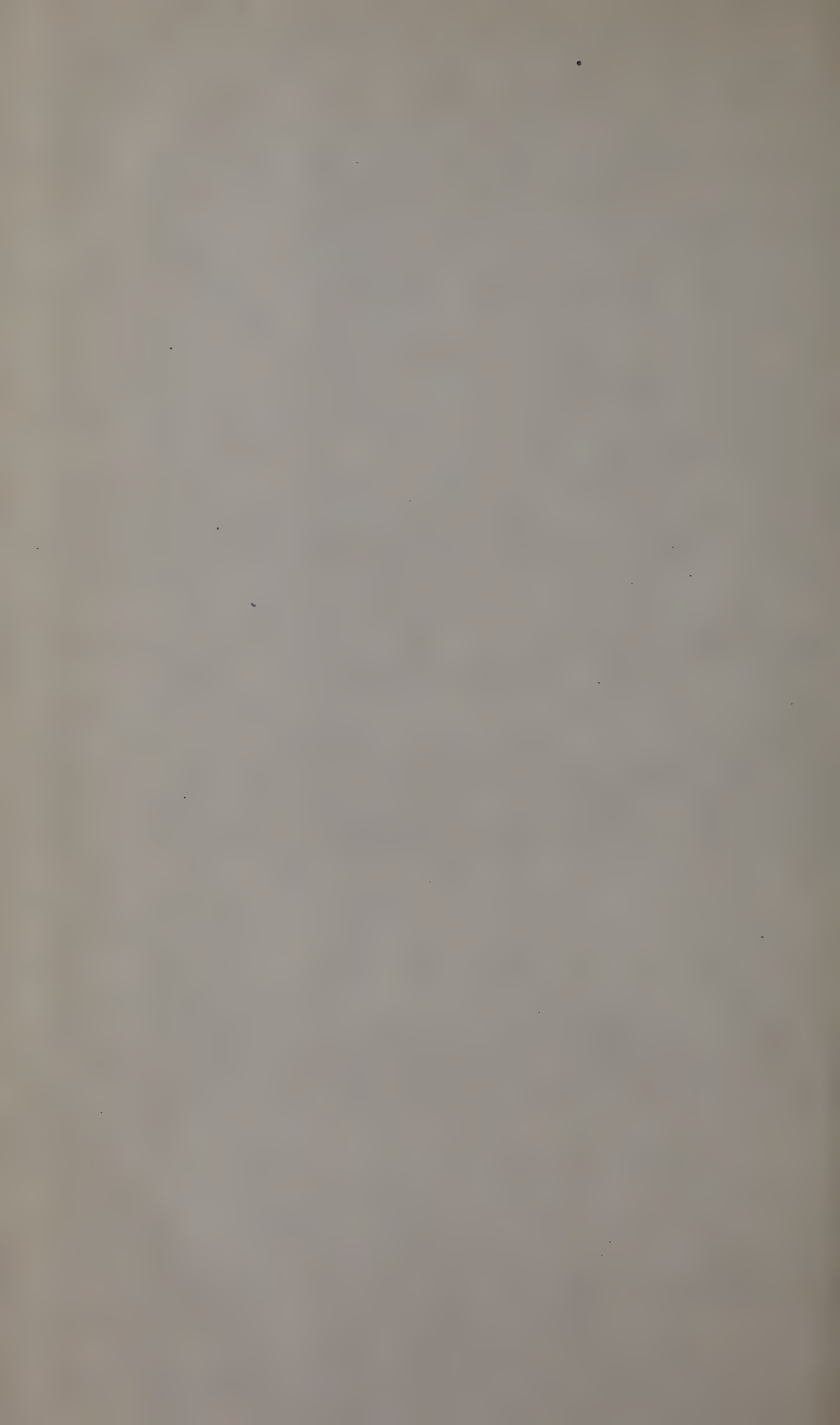
AVEC LA COLLABORATION DE

MM. D. Bierens de Haan, C. A. J. A. Oudemans, W. Koster,
C. H. D. Buijs Ballot et C. K. Hoffmann.

HARLEM
LES HÉRITIERS LOOSJES.
1885.

PARIS
GAUTHIER-VILLARS.

LEIPSIG
G. E. SCHULZE.



ARCHIVES NÉERLANDAISES
DES
Sciences exactes et naturelles.

MESURES
DE LA
POLARISATION ELLIPTIQUE DE LA LUMIÈRE,

PAR
R. SISSINGH.

I. Introduction.

1. Après les travaux de Fresnel, de Cauchy et de M. Jamin, qui ouvrirent une voie nouvelle, la réflexion de la lumière a été l'objet de différentes recherches, les unes théoriques, les autres expérimentales. Dans les premières, on a d'une part opposé quelques difficultés à la théorie de Cauchy, d'autre part essayé de parvenir suivant une voie différente, par des raisonnements rigoureux, à la connaissance des lois de la réflexion de la lumière. C'est ainsi que M. L. Lorenz [1]) et Lord Rayleigh [2]) ont montré que la manière dont Cauchy se sert des vibrations longitudinales pour satisfaire aux diverses conditions limites, provoque de sérieuses objections, tandis que Lord Rayleigh a fait voir, en outre, que les hypothèses de Cauchy conduisent à admettre pour l'éther un état d'équilibre instable. Les lois de Fresnel pour la réflexion sur les corps transparents et celles de Cauchy pour la réflexion sur les métaux peuvent être

[1]) L. Lorenz, *Ueber die Theorie des Lichts*, dans Pogg. *Ann.*, 118.

[2]) Rayleigh, *On the Reflection of Light from Transparent Matter*, dans *Phil. Mag.*, Ser. 4, Vol. 42; *On the Reflection and Refraction of Light by intensely opaque Matter*, dans *Phil. Mag.* Sér. 4, Vol. 43.

déduites, avec une entière rigueur, de la théorie électromagnétique de la lumière, comme l'a montré M. H. A. Lorentz [1]). En tenant compte, de la manière indiquée par M. L. Lorenz [2]), de l'influence d'une transition insensible entre les deux milieux, on peut encore, dans la théorie électromagnétique, obtenir, pour les différences de phase et les rapports des amplitudes dans le cas de la réflexion sur les corps transparents, des formules qui diffèrent peu de celles de Cauchy lorsque le coefficient d'ellipticité a de petites valeurs. Des théories mathématiques plus rigoureuses ont aussi été fondées sur l'hypothèse que l'éther peut être considéré comme un milieu élastique. C'est ainsi que M. Kirchhoff [3]) a appliqué le principe de la conservation de l'énergie, dans la réflexion sur les corps transparents, aux forces que la matière pondérable exerce sur l'éther à la surface de séparation, et de cette application il a déduit les conditions limites. M. Kirchoff a été suivi dans cette voie par M. Voigt [4]), qui a developpé, pour les corps transparents et les métaux, une théorie mécanique de la lumière.

La théorie ayant reçu de ces recherches une extension considérable, il m'a paru utile d'étudier à nouveau avec le plus grand soin différents phénomènes, et d'essayer d'obtenir, au moyen de mesures sur la réfraction et la réflexion de la lumière par les couches métalliques minces et sur l'influence des couches superficielles, quelque éclaircissement concernant la réflexion négative, inexpliquée jusqu'ici, et la propagation de la lumière dans les métaux.

---

[1]) H. A. Lorentz, *Over de Theorie der Terugkaatsing en Breking van het Licht.* Voir aussi: *Beiblätter,* I, p.92, et Schlömilch, *Zeitschr f. Mathem. u. Phys.* Bd. 22 et 23.

[2]) L. Lorenz, *Bestimmung der Schwingungsebene des Lichtaethers durch die Reflexion und Brechung des Lichts*, dans Pogg *Ann.*, 114.

[3]) G. Kirchhoff, *Ueber die Reflexion und Brechung des Lichts an der Grenze krystallinischer Mittel*, dans *Abhandl. der Berl. Akad.*, 1876.

[4]) W. Voigt, *Theorie des Lichts für durchsichtige Media*, dans Wied. *Ann.* 19. *Theorie der absorbirenden Medien*, *insbesondere Theorie der optischen Eigenschaften der Metalle*, dans Wied. *Ann.*, 23.

A cet effet, ainsi qu'il a été exposé avec plus de details dans ma Thèse inaugurale [1]), j'ai cherché à augmenter autant que possible la précision de la méthode appliquée d'abord par M. Jamin [2]) et plus tard, à différentes reprises, par M. Quincke; le compensateur de Babinet, employé dans cette méthode, a été disposé de telle sorte que ses différentes parties puissent être placées exactement dans la position qu'elles doivent avoir l'une par rapport à l'autre. Les changements apportés à la méthode d'observation avaient pour objet: 1° de déterminer avec plus de précision les angles d'incidence, 2° d'éliminer, par la combinaison d'observations, les erreurs du compensateur et celles qui résultent de la déviation de la lumière par les nicols, 3° d'exécuter les mesures avec un faisceau de lumière parallèle et homogène, 4° d'obtenir que la réflexion s'opère toujours sur la même partie du miroir.

A l'aide de la méthode ainsi modifiée j'ai successivement étudié: 1° la réflexion sur l'argent, *a* dans l'air, *b* dans l'eau; 2° l'influence de la température sur les constantes optiques du fer, 3° l'influence des propriétés magnétiques sur la réflexion par le fer doux, 4° l'influence des couches superficielles sur la réflexion par les corps transparents.

II. La méthode d'observation.

2. Les observations ont été faites avec le spectromètre de Meyerstein, qui a aussi été adapté aux recherches sur la réflexion de la lumière, et auquel j'ai donné la préférence sur l'appareil employé par M. Jamin, à cause de sa construction plus solide [3]) et des dispositions de réglage dont il est

---

[1]) R. Sissingh, *Metingen over de Elliptische Polarisatie van het Licht*, Leiden, 1885.

[2]) Jamin, *Mémoire sur la réflexion à la surface des corps transparents*, dans *Ann. de Chim. et de Phys.*, Sér. III, t. 29.

Mémoire sur la couleur des métaux, dans *Ann. de Chim. et de Phys.*, Sér. III, t. 22.

[3]) Voir aussi: Lundquist, Pogg. *Ann.*, 152, p.569.

pourvu. L'instrument dont je me suis servi ne diffère de celui décrit par M. Meyerstein [1]) qu'en ce que, dans le collimateur, le polariseur est placé derrière la lentille collimatrice, et dans la lunette, l'analyseur devant l'objectif. Entre les deux nicols il n'y a donc aucune lentille. J'ai toutefois retiré la fente et la lentille du tube du collimateur et installé séparément, en avant du spectromètre, le collimateur plus grand qui est joint à l'instrument pour servir à la détermination des indices de réfraction. Sur le milieu de la fente de ce collimateur le spectroscope de Kirchhoff forme un spectre pur. A cet effet, on dévisse l'oculaire de la lunette du spectroscope, et on place dans cette lunette, au foyer de l'objectif, la fente du collimateur. On doit veiller à ce que l'axe du faisceau de lumière réfracté et celui du collimateur se trouvent dans le prolongement l'un de l'autre. Un prisme de flint, à angle réfringent de 60°, disperse la lumière. Afin de donner au spectre une intensité lumineuse aussi grande que possible, les rayons solaires sont concentrés par une lentille de grande distance focale sur la fente du collimateur du spectroscope. Lorsque, à défaut de lumière solaire, on doit avoir recours à la lumière électrique, la lampe de Browning est posée devant le collimateur du spectroscope. Comme cette lampe ne maintient pas suffisamment constante la hauteur des cônes de charbon, on la place dans une auge en bois, qui peut être élevée ou abaissée à l'aide d'un petit treuil, établi à proximité de l'observateur. Le courant qui alimente la lampe est fourni par une pile de 50 à 60 éléments de Bunsen. Pour que les observations puissent se faire avec des lumières d'espèces différentes, le collimateur et le spectroscope sont portés sur une planche, susceptible d'un mouvement de rotation autour d'un axe vertical passant par le centre optique de l'objectif de la lunette du spectroscope. Cette disposition offre en même temps

---

[1]) Dr. M. Meyerstein, *Das Spectrometer*, 2e Aufl., Göttingen, 1870. Voir aussi: Wüllner, *Experimentalphysik*, Bd. II, et Carl, *Repertorium für Experimental-Physik*, Bd. VI.

l'avantage que, lorsque la planche ne subit pas de trop grands déplacements, les différentes parties de l'appareil n'ont pas besoin d'être réglées de nouveau, ou du moins n'exigent que de légères corrections.

3. On pourrait aussi appliquer la méthode de M. E. Wiedemann [1]) aux mesures avec le compensateur, si celui-ci était composé de deux plaques planparallèles, dont l'une serait à son tour partagée en deux lames prismatiques. En opérant alors l'ajustement par l'analyseur de la manière qui sera indiquée au § 6, on obtiendrait plus de précision dans la détermination du rapport des amplitudes. La disposition du compensateur, dont il vient d'être question, a déjà été employée par M. Hecht [2]). Mon intention était de faire aussi des mesures par cette méthode, mais je n'ai pu exécuter ce projet, n'ayant pas encore reçu les plaques de quartz.

4. L'espèce de la lumière employée aux mesures se détermine à l'aide d'un petit spectroscope de Bunsen. Les faisceaux lumineux donnent dans ce spectroscope des bandes larges d'environ 2 divisions de l'échelle, tandis que le spectre de B à G en occupe 72. Cette méthode pour déterminer l'espèce de la lumière a déjà été appliquée par M. Lundquist [3]) et est suffisamment exacte. Les franges observées dans le compensateur étaient toujours noires, non colorées. L'homogénéité des faisceaux lumineux peut aussi être appréciée de la manière suivante, indiquée par van der Willigen [4]). Soit a le déplacement de la lame prismatique mobile, pour lequel la différence de phase dans le compensateur augmente de la longueur d'onde λ, et soient ω et ϵ les indices de réfraction des rayons ordi-

---

[1]) E. Wiedeman, *Ueber die elliptische Polarisation des Lichtes und ihre Beziehung zu den Oberflächenfarben der Körper*, dans Pogg. *Ann.*, 151.

[2]) Hecht, *Ueber die Bestimmung des Axenverhältnisses der bei der elliptischen Polarisation im Quarz auftretenden Bahnellipsen*, dans Wied. *Ann.*. 20.

[3]) Lundquist, Pogg. *Ann.*, 152, p. 570.

[4]) Van der Willigen, *Die Reflexionsconstanten*, dans Pogg. *Ann.* 117, p.469.

dinaire et extraordinaire dans le quartz; $\frac{a}{\lambda}(\omega-\epsilon)$ est alors une grandeur constante. Pour trois faisceaux lumineux, tels qu'on ait $\lambda = \lambda_C$, $\lambda = \lambda_D$, $\lambda = 0{,}484 \times 10^{-3}$ mM., a mesure successivement 16^{mm},06, 14^{mm},28 et 11^{mm},53. Suivant M. Mascart, $\omega-\epsilon$ est, dans ces cas, égal à 0,00907, 0,00915 et 0,00932, de sorte que $\frac{a}{\lambda}(\omega-\epsilon)$ devient: 221,86, 221,98 et 221,92. Van der Willigen, qui dispersait la lumière par deux prismes, mais n'employait pas de collimateurs, trouva 243,8, 217,9 et 220,0.

5. Pour la mesure des angles d'incidence on se sert toujours de la grande lunette, non de celle devant l'objectif de laquelle se trouve l'analyseur. Cette grande lunette a été ajustée une fois pour toutes pour une distance infinie. Jamais on n'enfonce ou ne retire le tube oculaire, de sorte que l'axe optique conserve toujours la même position par rapport au corps de la lunette. Des soins suffisants ont été apportés à ce que l'axe de la grande lunette et celui de la lunette où se trouve l'analyseur prennent la même position quand ils sont placés dans le coussinet mobile du spectromètre. Pour que la mesure des angles d'incidence soit exacte et que la réflexion ait toujours lieu sur la même partie du miroir, on rend l'axe du cercle divisé et celui de la plate-forme parallèles l'un à l'autre, on place l'axe de la lunette perpendiculairement aux deux premiers, et on dresse le miroir de telle sorte sur la plate-forme que l'axe du cercle divisé et celui de la plate-forme soient situés dans la face antérieure du miroir. L'axe de la lunette doit, en outre, couper l'axe du cercle et celui de la plate-forme. Afin que ces deux dernières conditions puissent être remplies exactement, on tend sur le miroir un fil de cocon, et on place devant la lunette une lentille, qui permette d'observer l'image du fil dans la lunette ajustée exactement à distance infinie. Le miroir peut être déplacé sur la plate-forme dans deux directions perpendiculaires l'une à l'autre. Enfin, on s'arrange de manière que l'axe du faisceau lumineux incident

coïncide avec celui du polariseur et, quand l'angle d'incidence est de 90°, aussi avec celui de la lunette.

6. Lorsqu'on éteint la lumière au moyen de deux nicols, cette extinction, ainsi que l'a déjà fait remarquer M. Jamin [1]), ne s'opère pas simultanément en tous les points du champ. Dans ce champ on observe, quand les plans principaux des nicols sont à peu près perpendiculaires l'un à l'autre, une frange obscure, qui fait avec la section pricipale du polariseur un angle d'environ 25°, et qui, pendant la rotation des nicols, se déplace dans l'une ou l'autre direction, en restant parallèle à elle-même. La frange est limitée plus nettement quand on place une fente devant le polariseur. Lorsque devant le polariseur se trouve un collimateur, et derrière l'analyseur une lunette ajustée exactement pour distance infinie, on observe dans l'image de la fente du collimateur une petite frange noire oblique, si les sections principales des nicols sont à peu près à angle droit. Lorsque la frange passe par le milieu de l'image de la fente, les rayons qui traversent les nicols dans la direction de l'axe sont complètement éteints. Un fil mince étant tendu par-dessus le milieu de la fente du collimateur, on n'a qu'à saisir le moment où la frange coïncide avec l'image de ce fil. Les déterminations du lieu de la frange remplacent ainsi les estimations de l'intensité lumineuse du champ.

7. La plupart des nicols ont le défaut de changer la direction des rayons qui les traversent. Bien que M. Jamin [2]) dise que cela n'a pas lieu quand les nicols sont de bonne construction, et que M. Haughton [3]) aussi déclare que ses nicols ne faisaient pas dévier la lumière, je n'ai pu, parmi les nombreux exemplaires que possède le Laboratoire de physique de Leide, en trouver un seul qui ne produisît cette déviation [4]). Pour le nicol que j'ai employé comme polariseur,

---

1) Jamin, *Ann. de Chim. et de Phys.*, Sér. III, T. 29, p.267.

2) Jamin, *Ann. de Chim. et de Phys.*, Sér. III, T. 29, p.265.

3) Haughton, *Philos. Transact.*, 1863.

4) Voir Quincke, Pogg. *Ann.*, 127, p.206, *Jubelband*, p.340 Lundquist, Pogg. *Ann.*, 152, p. 569.

la déviation était de 2′,5. Quand on tourne ce polariseur, l'image de la fente du collimateur décrit donc dans la lunette un cercle dont le rayon, vu du centre optique de l'objectif, a une valeur angulaire de 2′,5.

La déviation de la lumière par les nicols est une source d'erreurs qu'on ne peut éliminer que par une combinaison appropriée des observations. Dès que les nicols changent la direction des rayons, il n'est plus satisfait aux conditions d'une détermination exacte des rotations des plans de polarisation. M. H. G. van de Sande Bakhuyzen [1]) a fait voir, toutefois, que les erreurs résultant 1° de ce que l'axe de rotation du nicol ne coïncide pas avec le rayon émergent, et 2° de ce que ces deux directions ne sont pas situées dans la section principale du nicol, se laissent éliminer si l'on exécute les observations en plaçant les nicols successivement dans les quatre quadrants. C'est ce qui a toujours eu lieu dans mes différentes séries d'observations.

8. Pour déterminer les positions des nicols dans lesquelles les sections principales sont parallèles au plan d'incidence, ou perpendiculaires à ce plan, je cherchais à éteindre au moyen des deux nicols la lumière réfléchie, sous un assez grand angle d'incidence, par un miroir d'argent. On y parvient sans beaucoup de peine en procédant de la manière indiquée au § 6. La petite frange, ou bien n'est pas visible, ou bien n'est qu'un peu plus foncée que les autres parties de l'image de la fente, lorsque l'azimut du polariseur diffère de plus d'un demi-degré de 0° ou de 90°. De plus, elle ne vient alors jamais se placer, quand on tourne les nicols, au milieu de l'image de la fente du collimateur. A mesure que l'azimut du polariseur se rapproche de 0° ou de 90°, la petite frange se rapproche de plus en plus du centre, et finalement on n'a plus qu'à choisir, entre différentes positions connexes du polariseur et de l'analyseur, celles où la frange est aussi obscure que possible

---

1) Van de Sande Bakhuyzen, Pogg. *Ann.*, 145.

Quand j'employais comme polariseur un nicol auquel on pouvait à l'aide d'une vis micrométrique imprimer de petits déplacements, les différents réglages ne différaient jamais de plus de 2′ l'un de l'autre.

De cette manière, les positions des nicols, où leur azimut est de 0° ou de 90°, se trouvent plus exactement que lorsqu'on éteint par le polariseur ou l'analyseur la lumière réfléchie sous l'angle de polarisation par le verre.. Dans ce dernier cas, la faible intensité de la lumière réfléchie ne permet pas d'espérer une exactitude allant au-delà de 0°,2.

Pour les déterminations dont il s'agit, on emploie la lumière solaire ou, à son défaut, la lumière Drummond. La lampe se place alors devant le collimateur du spectromètre.

9. A cause de la déviation que le polariseur imprime à la lumière, les positions dans lesquelles les nicols éteignent la lumière réfléchie par le miroir ne sont pas, toutefois, les mêmes à chaque angle d'incidence. Soient x la valeur de la déviation, z l'azimut de cette déviation par rapport à un plan passant par l'axe du polariseur et par la normale au miroir, i l'angle d'incidence; l'angle que ce plan fait avec le plan d'incidence est alors $\frac{x \sin z}{\sin i}$. Cet angle donne le changement qui se produit dans la position du plan d'incidence par suite de la déviation des rayons dans le polariseur. Comme $\sin z$ acquiert la même valeur, mais avec un signe opposé, quand l'azimut du polariseur augmente de 180°, on peut éliminer l'influence de la déviation en faisant des observations dans deux quadrants diamétraux. Pour atténuer de plus cette influence autant que possible, je fais réfléchir la lumière par le miroir sous un angle aussi grand que possible (88°). Lorsque l'angle était plus petit que 25°, on ne parvenait plus à obtenir une petite frange noire oblique au centre de l'image de la fente. Dans ces cas, en outre, cette image était colorée, en rouge ou en bleu, suivant la position de l'analyseur. Cela tient indubitablement à ce que la lumière traversait alors l'analyseur dans une direction qui faisait avec l'axe un angle assez grand.

Dans le polariseur dont je me suis servi, l'azimut de la déviation était à peu près 0° lors de la lecture 195°. Le plan de polarisation des rayons qui émergent du polariseur était perpendiculaire au plan d'incidence lors de la lecture 201°,5. A partir de la position dans laquelle les rayons sont déviés dans une direction parallèle au plan d'incidence, le polariseur doit donc être tourné d'un angle de 6°,5 pour que le plan de polarisation soit perpendiculaire au plan d'incidence. Pendant cette rotation, le plan d'incidence des rayons se déplacera dans le même sens, et d'autant plus que l'angle d'incidence devient plus petit. Si l'analyseur est placé de manière à éteindre la lumière pour un angle d'incidence de 90°, il doit, en cas d'incidence plus petite, être tourné un peu au-delà, dans le même sens, pour que l'extinction ait lieu de nouveau. Les positions correspondantes du polariseur et de l'analyseur, dans lesquelles la lumière est éteinte, sont, pour les angles d'incidence de:

	Polariseur.	Analyseur.
88°	86°,75	125°,3
45°	86,5	125°,6
30°	86,3	125°,7

Remarquons que pour l'observateur, qui est placé derrière l'analyseur, les divisions des nicols marchent en sens opposé.

10. Les angles d'incidence se déterminent toujours à l'aide de la grande lunette. Pour cette détermination, on enlève le polariseur. A raison de la déviation que la lumière subit dans le polariseur, ces angles d'incidence observés diffèrent de ceux sous lesquels la lumière tombe réellement sur le miroir lors des mesures avec le compensateur de Babinet. Dans ces mesures, le polariseur est successivement placé, sous un même azimut, dans chacun des quatre quadrants. La moyenne des quatre angles d'incidence, qui correspondent à ces positions du polariseur, est toutefois presque exactement égale à l'angle d'incidence qu'on observe lorsque la lumière ne traverse pas le polariseur. C'est ce dont je me suis assuré dans une des

séries d'observations. Les différences étaient presque toujours plus petites que les 10″ dont les deux verniers permettent la lecture sur le cercle divisé. L'accord est donc aussi grand que possible, surtout si l'on considère que l'image de la fente du collimateur n'est nettement limitée que d'un seul côté, lorsque les rayons sont déviés par le polariseur dans une direction parallèle au plan d'incidence [1]). La valeur moyenne des différences de phase et des rapports d'amplitude qui ont été observés dans les quatre positions du polariseur, s'applique à la moyenne des quatre angles d'incidence correspondants à ces positions. Ces angles, en effet, ne diffèrent que de 2′,5 l'un de l'autre, et les variations dans la différence de phase et dans le rapport des amplitudes peuvent être supposées proportionnelles aux variations dans les angles d'incidence, lorsque celles-ci ne s'élèvent qu'à une couple de minutes.

La valeur maximum de l'angle que les rayons d'un faisceau employé aux mesures font avec l'axe de ce faisceau, est donnée par l'angle sous lequel la demi-fente est vue du centre optique de la lentille du collimateur. Cet angle est de 2′,7 pour le collimateur du spectroscope, de 2′,3 pour celui du spectromètre. Les différents rayons d'un faisceau de lumière tombent donc sur le miroir sous des angles qui diffèrent tout au plus de 2′,3 de l'angle d'incidence correspondant à l'axe du faisceau.

D'après M. Quincke [2]), la mesure des angles d'incidence, dans la méthode de M. Jamin, ne comporterait pas une exactitude plus grande qu'à 5′ près. Cela tient simplement, toutefois, à la manière dont M. Quincke et M. Jamin déterminaient ces angles. Ils n'employaient ni lunette, ni collimateur. C'est à tort que M. Quincke a cru qu'on ne doit pas faire usage de lunette. En effet, les lentilles de la lunette et du collimateur ne se trouvant pas entre les nicols, mais en dehors, elles ne peuvent exercer aucune influence sur les phénomènes

---

[1]) Voir: Quincke, *Jubelband*, p.340

[2]) Quincke, Pogg. *Ann*, 127, p.10, 212; Pogg. *Ann*. 120, p.359, 546; *Jubelband*, p. 337.

de polarisation. Plus tard, au reste, M. Quincke [1]) a lui-même apporté, à la méthode dont M. Jamin s'était servi dans l'étude de la réflexion sur les métaux, des modifications analogues à celles que dans le présent travail j'ai appliquées à la méthode que M. Jamin avait suivie pour les corps transparents. Ces modifications ont en vue une détermination plus exacte des angles d'incidence.

11. Dans le compensateur de Babinet il faut que les axes des deux prismes de quartz soient perpendiculaires l'un à l'autre et que les faces soient deux à deux parallèles. Lorsqu'il n'est pas satisfait à la seconde de ces deux conditions, les rayons qui sortent du compensateur ne traversent pas le polariseur dans la direction de l'axe. En outre, la détermination des angles d'incidence deviendrait alors inutilement plus difficile et moins exacte. Deux compensateurs, l'un construit par M. Meyerstein, l'autre par M. Duboscq, donnaient, placés devant la lunette, quatre images du réticule éclairé, dont deux ne restaient pas à leur place quand on faisait glisser la lame prismatique mobile. De plus, les axes des deux prismes n'étaient pas croisés à angle droit. M. Kurz [2]) et M. Lundquist [3]) ont déjà remarqué que la position des franges dans le compensateur dépend de l'azimut du polariseur. Lorsque, l'azimut étant de 45°, on a amené une frange entre les fils tendus devant la lame prismatique fixe, on doit, quand l'azimut a une valeur différente, faire glisser un peu la lame mobile, pour rendre à la frange sa position première. Ces déplacements sont très grands lorsque la section principale du polariseur fait de petits angles avec la section principale d'une des lames prismatiques. Le tableau suivant fait connaître la place de la frange centrale pour différents azimuts du polariseur. Là où l'indication manque, le champ était trop faiblement éclairé

---

1) Quincke, *Jubelband*.

2) Kurz, Pogg. *Ann.*, 108, p.590 et 591.

3) Lundquist, Pogg. *Ann.*, 152, p. 569.

pour permettre une détermination tant soit peu exacte [1]).

Azimut du polariseur.	Lieu de la frange centrale.	Azimut du polariseur.	Lieu de la frange centrale.
96°	3,93	— 5°	3,20
95	3,96	— 4	3,18
94	4,08	— 3	2,95
93	4,16	— 2	2,41
92	4,24	— 1	—
91	4,51	0	5,18
90	4,66	1	4.47
89	—	2	4,14
88	2,3	3	3,98
87	2,6	4	3,98
86	3,10	5°	3,93
85	3,15		
84	3,20		
83	3,23		
—	—		
45°	3,52		

Lorsque le compensateur était placé entre les deux nicols, la lumière ne pouvait être éteinte que partiellement par ceux-ci, et la frange, dans les cas où l'azimut du polariseur différait peu de 0° ou de 90°, était seulement un peu plus obscure que les autres parties du champ.

Ces phénomènes, auxquels on pourrait donner le nom de phénomènes anomaux, sont tous des conséquences du défaut de perpendicularité entre les axes des deux lames prismatiques. Comme il est nécessaire de rechercher aussi l'influence de ce défaut sur les déterminations des différences de phase et des rapports d'amplitude, je vais traiter directement le cas général.

[1]) Des irrégularités analogues avaient déjà été observées antérieurement par M. H. A. Lorentz, chez le même compensateur avec lequel j'ai commencé mes recherches.

Supposons qu'un faisceau de lumière polarisée dans un azimut α tombe sur le miroir et, après la réflexion, sur le compensateur; soient φ, δ_1 et δ_2 les différences de phase produites par la réflexion et dans les deux lames prismatiques, a et b les coefficients d'affaiblissement pour des rayons polarisés l'un dans le plan d'incidence l'autre perpendiculairement à ce plan, β_1 l'angle que le plan de polarisation des rayons ordinaires de la première lame prismatique fait avec le plan d'incidence, et β_2 l'angle que le plan de polarisation des rayons extraordinaires de la seconde lame fait avec celui des rayons ordinaires de la première lame; on peut alors exprimer en fonction de ces quantités les deux déplacements, suivant les sections principales de la seconde lame prismatique, dans le faisceau qui sort du compensateur.

Si le faisceau qui émerge du compensateur est polarisé rectilignement, les déplacements en question peuvent aussi être exprimés par $A \cos \psi \cos (\mu t - \chi)$ et $A \sin \psi \cos (\mu t - \chi)$, où μt indique les déplacements dans le faisceau incident. En égalant ces deux expressions aux deux obtenues précédemment on obtient quatre équations, qui, après élimination de A, ψ et χ, donnent une équation déterminant la valeur de δ_2 pour laquelle la lumière, à sa sortie du compensateur, est polarisée rectilignement. Dans le cas où les rayons ne subissent pas de réflexion sur le miroir, il faut poser $a = b = 1$, $\varphi = 0$. On trouve de cette manière:

$$tg\, \delta_2 = tg\, \delta_1 \frac{1}{\cos 2\beta_2 - \dfrac{tg\, 2\beta_2}{\cos \delta_1\, tg\, 2(\alpha - \beta_1)}} .$$

Il résulte de là qu'en général on a $\delta_1 - \delta_2 = k\pi \pm \Delta$, où Δ désigne le déplacement de la frange. L'angle β_1 étant petit, Δ n'a une valeur sensible que lorsque α est rapproché de 0° ou de 90°; Δ change subitement de signe pour $\alpha = \beta_1$ et $\alpha = 90° + \beta_1$, et prend, si $\dfrac{tg\, 2\beta_2}{\cos \delta_1\, tg\, 2(\alpha - \beta_1)}$ est petit par

rapport à 1, une même valeur pour les azimuts α et $180-\alpha$ du polariseur. Cette dernière propriété avait déjà été remarquée par M. Lundquist [1]). Les conséquences que nous venons de déduire sont confirmées par les chiffres communiqués ci-dessus relativement à la place de la frange centrale pour différents azimuts du polariseur. Pour toute valeur de α, Δ augmente quand δ_1 croît de $2n\pi$ jusqu'à $(2n+1)\pi$. Les distances entre les différentes franges restent les mêmes. Tout se borne à un déplacement du système entier.

La circonstance qu'en cas d'azimuts différant peu de 0° ou de 90° les franges ne sont que légèrement plus obscures que les autres parties du champ, peut également être déduite du défaut de perpendicularité des axes.

Le tableau suivant fait connaître les intensités I_1, calculée pour les valeurs $\beta_1 = +20'$; $\beta_2 = -20'$ et $\alpha = 89°$ et I_2 calculée pour les valeurs $\beta_1 = +5'$; $\beta_2 = -5'$ et $\alpha = 89°$, pour quelques points du champ.

$2n\pi - \delta_1 =$	$2n\pi - \delta_2 =$	I_1	I_2
+120°	−240°	7	1
+75	−195	201	146
+30	−150	420	284
−15	−105	239	147
−60	−60	21	1
−105	−15	123	120
−150	+30	256	246
−195	+75	113	121
−240°	+120°	7	1

[1]) Lundquist, Pogg. *Ann.*, 152, *p.* 569

On voit par ces 9 nombres que les franges tranchent d'autant plus que $\beta_2 - \beta_1$ devient plus petit. Il est à remarquer que l'intensité lumineuse n'est pas la même à des distances égales des deux côtés d'une frange obscure. Cette inégalité s'accuse très fortement lorsque β_2 augmente. Lorsque $\beta_2 = \beta_1 = 0$, les particules d'éther, aux points considérés, décrivent des ellipses égales et semblables, qui sont parcourues en sens opposé. L'intensité doit donc être la même en ce cas.

A l'aide du déplacement de la frange on peut, si δ_1 est connue, calculer β_2. En supposant $\delta_1 = n\pi + 60°$, il faudrait, pour expliquer les déplacements de la frange centrale communiqués plus haut, que β_2 fût d'environ 20′. La disposition du compensateur ne permet pas à l'observateur de corriger ce défaut. M. Jamin et M. Quincke disent bien que l'axe optique d'une des lames prismatiques doit être situé dans le plan d'incidence, mais cela ne peut être réalisé que d'une manière grossièrement approximative tant que β_2 est un peu grand. Les faibles franges d'interférence que M. Quincke [1]) put encore observer sont aussi, très probablement, une conséquence de la non-perpendicularité des axes des deux lames prismatiques.

12. Comme je désirais amener les différentes parties du compensateur dans la position convenable, je l'ai modifié et je me suis servi de la disposition suivante.

Le compensateur est représenté dans la fig. 1. En 1^a on voit la face postérieure, qui est tournée au côté opposé à l'observateur et en 1^b et 1^c la face antérieure. La fig. 1^d montre de quelle manière le compensateur est rattaché au spectromètre. La Figure 1^e sert à mieux faire voir le fonctionnement de la vis. Dans la plaque A, qui est fixée par les deux vis a_1 et a_2 à l'anneau B, se trouve le quartz prismatique fixe. B peut tourner dans la pièce annulaire C et est assujetti au côté antérieur (fig. 1^b) par les deux petites plaques c et d. A l'aide des vis d_1 et d_2 on peut faire tourner le quartz prismatique

1) Quincke, Pogg. *Ann.*, 127, p. 206.

fixe autour d'un axe perpendiculaire à la face antérieure, et par conséquent le placer de façon que l'axe optique soit parallèle ou perpendiculaire au plan d'incidence. Le cadre *D* porte le quartz prismatique mobile et peut glisser dans la coulisse *E*. Aux quatre angles de ce cadre pressent d'un côté quatre petits ressorts, de l'autre côté quatre vis, de sorte que les faces des lames prismatiques peuvent être rendues parallèles deux à deux. Le mouvement du cadre n'altère pas d'une manière sensible ce parallélisme.

Les vis f_1 et f_2 (fig. 1^a) fixent la coulisse *E* à la plaque *A* et passent à cet effet par des ouvertures de l'anneau *B*. En desserrant ces deux vis, on peut faire mouvoir la coulisse *E* sur la plaque *A* et l'amener ainsi dans la position où les axes optiques sont perpendiculaires l'un à l'autre. La plaque *C*, repliée à angle droit, peut tourner, avec tout ce qu'elle porte, autour de la charnière *F* (fig. 1^e). Contre la face inférieure de la partie *K* presse un ressort *h*, contre la face supérieure une vis *l*, qui, pour éviter la confusion, a été omise dans la fig. 1^b. La plaque *M* (fig. 1^d), sur laquelle la coulisse *H* (fig. 1^a et 1^b) peut être mue au moyen de la vis *m* (fig. 1^c), est assujettie par la vis *n* à la pièce *N*, que porte l'alidade mobile du spectromètre. *P* (fig. 1^d) est une partie du cercle divisé.

De cette description il ressort déjà comment les différentes parties de l'appareil sont amenées dans la position convenable.

On peut faire tourner à la main tout le compensateur en desserrant un peu la vis *n* (fig. 1^d), autour d'un axe vertical, et au moyen de la vis *l*, autour d'un axe horizontal; ces deux mouvements permettent d'amener les faces extérieures des lames prismatiques dans la position perpendiculaire à l'axe de la lunette. A l'aide de *m* (fig. 1^c) on place le compensateur de manière que l'axe de la lunette passe au centre des fils tendus devant la lame prismatique fixe. Pour donner la bonne position aux axes optiques des deux lames, on place d'abord la lame fixe, puis après l'ajustement de celle-ci la lame mobile, de telle sorte qu'entre les deux nicols, dont les sections principales sont parallèles et perpendi-

culaires au plan d'incidence, la petite frange oblique, dont il a déjà été plusieurs fois question, soit aussi obscure que possible et passe par le milieu de l'image de la fente dans la lunette. A cause de la déviation de la lumière par le polariseur, on ne parvient pas à rendre la frange noire aussi obscure qu'elle l'est lorsque le compensateur ne se trouve pas entre les nicols.

Afin d'atteindre toute l'exactitude possible dans l'ajustement des différentes parties, on opère à la lumière solaire ou, si elle fait défaut, à la lumière Drummond. Dans ce dernier cas, la lampe est placée devant le collimateur du spectromètre. Le degré d'exactitude obtenu peut être déduit des phénomènes qu'on observe lorsque l'azimut du polariseur est voisin de 90°. Avec un azimut de 90°—24′, les franges se voyaient encore distinctement et le déplacement Δ (voir § 11) n'était pas trop grand. Lorsque l'azimut du polariseur était de 88°, le déplacement Δ avait la valeur $\frac{1}{40} \times \frac{1}{4} \lambda$; λ étant la longueur d'onde. Comme δ_1 est à peu près égal à $n\pi + 60°$, cette valeur de Δ correspond à $\beta_2 = 5'$ (§ 11). C'est aussi environ le chiffre auquel on arrive en ayant égard à l'exactitude du réglage des lames de quartz. Si l'une des deux vis d_1 et d_2 s'avance de $\frac{1}{8}$ de tour, la lame antérieure s'écarte déjà sensiblement de la position dans laquelle la petite frange oblique, entre les nicols croisés, est aussi obscure que possible. Le pas de ces vis étant de $\frac{5,5}{12}$ mm. et la distance au milieu de la lame prismatique de 29 mm., l'erreur du réglage est moindre que 7′.

13. Dans la détermination de l'influence des erreurs du compensateur sur les mesures des différences de phase et des rapports des amplitudes, j'ai admis que les écarts de la position exacte que présentent les lames prismatiques, par conséquent les angles β_1 et β_2, sont de petites quantités du premier ordre, et que les quantités du second ordre peuvent être négligées.

La valeur de la différence de phase dans la lame prismatique mobile, pour laquelle l'étroit faisceau lumineux, qui pénètre dans le compensateur en passant entre les fils, est polarisé rectilignement à sa sortie, et pour laquelle on peut

donc observer entre les fils une frange noire, cette valeur est trouvée au moyen de l'équation

$$tg\,\delta_2 = tg\,(\varphi+\delta_1) - \frac{a^2 \cos^2\alpha - b^2 \sin^2\alpha}{a\,b \sin 2\alpha \cos(\varphi+\delta_1)} \Big[2\beta_1 \sin\delta_1 - tg\,(\varphi+\delta_1)\,(2\beta_2 + 2\beta_1 \cos\delta_1)\Big],$$

où les différentes lettres ont la signification indiquée au § 11. Le second terme du second membre donne l'erreur en $tg\,\delta_2$. Cette erreur disparaît de la moyenne des observations faites avec les azimuts α et $180°-\alpha$ du polariseur. Il est vrai que dans ces deux cas, par suite de la déviation des rayons par le polariseur, l'angle d'incidence sur le compensateur n'est pas le même, et que par conséquent δ_1 n'est pas la même non plus; mais, si la déviation ne dépasse pas quelques minutes, les deux valeurs de δ_1 ne diffèrent que d'une petite quantité du premier ordre, et celles du second terme du second membre ne diffèrent que d'une quantité du second ordre, quantité dont on n'a pas à tenir compte. En indiquant par des accents les quantités qui se rapportent à l'azimut $180°-\alpha$ du polariseur, on a donc

$$tg\,\delta_2 + tg\,\delta'_2 = tg\,(\varphi+\delta_1) + tg\,(\varphi+\delta'_1),$$

Comme $\delta_2 - \delta_1$, $\delta_2' - \delta_1'$ ne sont également que des petites quantités de premier ordre on a, avec le même degré d'approximation:

$$\varphi = \tfrac{1}{2}\,\{(\delta_2 - \delta_1) + (\delta_2' - \delta_1')\}.$$

L'erreur en $tg\,\delta_2$ est un minimum lorsque $tg\,\alpha = \pm\frac{a}{b}$, par conséquent lorsque l'azimut rétabli est de 45°. Dans le cas de la réflexion sur les métaux, l'azimut du polariseur peut être choisi de telle sorte que cette condition soit remplie. Quand il s'agit de la réflexion par les corps transparents, l'azimut du polariseur devrait être voisin de 90°. Mais une petite erreur dans l'azimut du polariseur entraînerait alors une erreur relativement grande dans le rapport des amplitudes. Tout ce

qu'on peut donc faire, pour les corps transparents, c'est de prendre l'azimut du polariseur assez grand, afin que les erreurs à éliminer ne deviennent pas trop fortes relativement aux quantités mesurées. Dans mes expériences sur le flintglass, l'azimut α était de 80°, l'azimut principal d'environ 4°, et par conséquent $\frac{a^2 \cos^2 \alpha - b^2 \sin^2 \alpha}{a b \sin 2\alpha \cos(\varphi + \delta_1)}$ à peu près égal à 1.

La frange noire dans le compensateur est limitée le plus nettement lorsque, de part et d'autre, l'intensité lumineuse est aussi grande que possible. Cela aussi a lieu quand l'azimut rétabli a pour valeur 45°.

L'azimut du faisceau polarisé rectilignement à la sortie du compensateur est donné par l'équation

$$tg\psi = \frac{b}{a} tg\,\alpha - \frac{a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha}{a^2 \cos^2 \alpha} \Big\{ \beta_1 \cos\varphi + \beta_2 \cos(\varphi + \delta_1) - \\ - (\beta_1 + \beta_2) \cos(\varphi + \delta_1 - \delta_2) \Big\}.$$

Distingue-t-on de nouveau par un accent les quantités relatives à l'azimut 180—α du polariseur, alors on a, $\delta_2 - \delta'_2$ et $\delta_1 - \delta'_1$ étant des quantités du premier ordre, $\frac{b}{a} = tg\frac{\psi + \psi'}{2}$. L'erreur en ψ est indépendante de l'azimut du polariseur.

On élimine ainsi l'effet d'un défaut d'orientation des lames prismatiques du compensateur en prenant la moyenne des valeurs des différences de phase et des rapports des amplitudes mesurés dans les azimuts α et 180° — α du polariseur.

Les résultats déduits dans ce paragraphe ne valent que dans le cas où les angles entre les sections principales des nicols et le plan d'incidence ou le plan perpendiculaire à celui-ci, sont très grands par rapport à β_1 et β_2.

14. Afin de trouver l'expression exacte pour la différence de phase dans le compensateur, il faut observer que les faisceaux lumineux, à raison de la déviation par le polariseur, tombent sur le compensateur sous un petit angle d'incidence, savoir, sous un angle de quelques minutes. Si l'on regarde

cet angle comme une petite quantité du premier ordre, l'influence que l'obliquité de l'incidence exerce sur la différence de phase est également du premier ordre, lorsque aucun des rayons n'a une amplitude très petite dans le compensateur lui-même. C'est ce que confirment les déterminations suivantes du lieu que la frange centrale occupait quand on avait donné au compensateur de petits déplacements angulaires autour d'un axe vertical et autour d'un axe horizontal. La condition ci-dessus mentionnée, savoir, qu'aucune des amplitudes des rayons dans le compensateur lui-même ne soit très petite, était toujours réalisée dans mes mesures.

Lieu de la frange centrale.	Azimut du polariseur.	Déplacement angulaire du compensateur.
39,57	45°	Nul
67	85°	»
62	»	+ 4′ autour d'un axe vert.
62^5	»	— 4′ » » » »
63	»	+ 4′ » » » »
62	»	— 4′ » » » horiz.

Le mouvement de la frange centrale, par suite des déplacements angulaires donnés au compensateur, a pour valeur $0{,}007 \times \frac{1}{4}\lambda$ et a lieu dans un sens tel, que les rayons doivent parcourir dans la seconde lame prismatique un chemin plus long, pour que la différence de phase, dans le compensateur, redevienne nulle.

Lorsque l'azimut du polariseur ne diffère que peu de 0° ou de 90°, deux causes influent donc sur la différence de phase dans le compensateur, savoir, la non-coïncidence des sections principales des deux lames prismatiques et l'obliquité de l'incidence. L'influence de chacune de ces deux causes étant

petite, on peut les considérer séparément. La première a déjà été examinée au paragraphe précédent.

Les lames prismatiques de quartz ont la forme indiquée dans la fig. 2. Pour la différence de phase on trouve l'expression $\varphi = \xi a + \eta d + \zeta l$, où $a = AB$ est la distance de l'arête aiguë de la première lame au centre des fils, $d = CD$ l'épaisseur de la couche d'air entre les deux lames, et $l = ED$. Les quantités ξ, η et ζ dépendent de la position des axes optiques et de l'angle d'incidence. Pour un angle d'incidence déterminé, donc pour un azimut déterminé du polariseur, ce sont des constantes. Si δ est l'angle aigu de la seconde lame de quartz, le changement produit dans la différence de phase par un mouvement x de cette seconde lame est $\pm x(\eta \sin \delta - \zeta \cos \delta)$, donc proportionnel au mouvement. Il suit de là que, à l'aide des positions de la seconde lame pour lesquelles la différence de phase dans le compensateur est de 0, $+\frac{1}{2}\lambda$ et $-\frac{1}{2}\lambda$, on peut, par une simple proportion, trouver exactement, à des quantités du second ordre près, les différences de phase; à condition, bien entendu, que ces positions de la lame aient été déterminées pour les mêmes azimuts du polariseur qui plus tard sont employés dans les mesures avec le compensateur. D'une part la différence de phase de la réflexion est ramenée à 0, d'autre part elle est complétée jusqu'à $\frac{1}{2}\lambda$. La moyenne des deux valeurs ainsi obtenues pour la différence de phase est en partie affranchie de l'erreur qui résulte d'un défaut d'uniformité dans l'augmentation d'épaisseur de la seconde lame prismatique.

15. M. W. Voigt [1]) a fait remarquer que les expressions ordinairement données pour les différences de phase dans les lames minces cristallisées sont inexactes, parce qu'on n'y a pas tenu compte des réflexions intérieures. D'après M. Voigt lui-même, toutefois, ces réflexions n'exercent pas d'influence lorsque la couche dans laquelle elles ont lieu est assez épaisse

---

[1]) Voigt, Wied. *Ann.* 22.

pour que, avec la lumière homogène employée dans les mesures, les franges d'interférence de Newton ne se laissent plus observer. Pour cette raison, j'ai déterminé l'épaisseur de la couche d'air, en pointant un microscope, mobile le long de l'échelle d'un cathétomètre, sur les faces latérales des prismes de quartz. J'ai trouvé ainsi $d = 7^{mm},4$, de sorte qu'on peut négliger les réflexions intérieures dans la couche d'air. Celles qui se font dans les deux lames prismatiques n'exercent pas non plus d'influence. Lorsque le compensateur est placé devant la lunette, on voit dans celle-ci 4 images de la fente du collimateur, savoir, l'image directe, deux images situées de part et d'autre à des distances égales, et provenant de deux réflexions intérieures dans la première et dans la seconde lame prismatique, enfin une image due aux réflexions à l'intérieur de la lame de l'oculaire de Gauss. Les trois premières de ces images consistent en une bande centrale claire bordée de deux franges plus obscures, ce qui résulte de ce que les rayons ordinaire et extraordinaire sortant du compensateur font un petit angle entre eux. Il est facile de montrer que les deux images extérieures sont deux fois plus larges que l'image centrale, ce que l'observation confirme d'ailleurs. Si ω et ε désignent les indices de réfraction des rayons ordinaire et extraordinaire, δ l'angle aigu des lames prismatiques, la distance des images est $\delta\ (\varepsilon + \omega)$ en remplaçant le sinus du petit angle δ par l'arc lui-même. De la distance estimée j'ai déduit $\delta = 14',5$, tandis que des mesures directes ont donné $\delta = 16'$, valeur qui résulte aussi du déplacement de la seconde lame prismatique (environ 7 mm.) correspondant à un changement de $\frac{1}{2}\lambda_D$ dans la différence de phase; λ_D étant la longueur d'onde de la raie D. Les images de la fente du collimateur qui proviennent de plus de deux réflexions à l'intérieur des lames prismatiques ne sont plus situées dans le champ de la lunette.

Comme, pour les mesures, une fente est placée devant le compensateur, de sorte que les rayons passant entre les fils sont seuls employés, et que les rayons qui subissent des ré-

flexions à l'intérieur des lames prismatiques sortent dans des directions toutes différentes, on voit qu'il n'y a rien à changer à l'expression trouvée, au § 14, poür la différence de phase.

Pour l'établissement de cette expression, en outre, les lames de quartz ne peuvent pas être considérées comme des lames parallèles, ce qui est en parfait accord avec le fait que les franges sont mieux limitées quand on place la fente devant le compensateur.

16. La partie du miroir, utilisée pour les mesures, est très petite. Par différentes circonstances, notamment parce que l'axe du cercle divisé se trouve toujours à une certaine distance, si petite qu'elle soit, de la surface réfléchissante, parce que le milieu des fils tendus devant le compensateur ne se trouve pas exactement dans l'axe de la lunette, et surtout parce que la lumière est déviée par le polariseur, la réflexion ne peut pas toujours se faire au même point du miroir. En tenant compte de la distance de l'axe du cercle divisé au miroir ($0^{mm},02$), de la déviation des rayons lumineux, de la distance des deux fils entre eux ($0^{mm},25$) et à l'axe du cercle (55 mm), enfin des valeurs maximum (86°10′) et minimum (43°) des angles d'incidence qui se présentent dans les mesures, on trouve que la partie utilisée du miroir n'a pas plus de $0^{mm},57$ de longueur et $2^{mm},71$ de largeur, qu'elle est par conséquent plus petite que $1^{mmq},54$.

Comme on n'a besoin, pour les mesures avec le compensateur, que d'un faisceau lumineux très mince, on pourrait peut-être remplacer le nicol polariseur par une petite plaque de spath calcaire parallèle à l'axe. Dans ce cas, on serait affranchi de la déviation des rayons lumineux par le polariseur, et l'étendue de la partie utilisée du miroir serait encore notablement réduite.

III. La réflexion de la lumière sur les métaux.

17. La méthode d'observation, décrite dans la section précédente, a été appliquée en premier lieu à la mesure des

différences de phase et des rapports des amplitudes dans la réflexion sur l'argent. Je voulais rechercher jusqu'à quel point les formules de Cauchy [1]), de Neumann [2]) et de Voigt [3]), pour la réflexion sur les métaux, s'accordent avec l'observation, et si celle-ci ne pourrait pas décider entre les différentes formules.

Parmi tous les métaux, la préférence a été accordée à l'argent, parce qu'il est facile de faire soi-même de beaux miroirs de ce métal, et parce que l'argent ne présente pas de propriétés spéciales, pouvant exercer de l'influence sur les phénomènes de la réflexion. Les trois miroirs dont je me suis servi avaient été construits suivant la méthode de M. Martin [4]) et polis au rouge de Paris. Cette méthode donnant en général des miroirs translucides, j'ai, dans la construction du troisième miroir, laissé déposer successivement deux couches d'argent sur le verre.

Pour déterminer sans aucune équivoque la position des plans de polarisation des faisceaux lumineux et la signification de la différence de phase mesurée, j'introduirai les définitions suivantes. Les azimuts, tant du polariseur que de l'analyseur, sont comptés de 0° á 360°, dans le sens où, pour un observateur placé dans le faisceau incident ou réfléchi, la tête tournée vers le miroir, se déplaceraient les aiguilles d'une montre. Le point à partir duquel on compte les azimuts est, chez le polariseur, une des positions dans lesquelles le faisceau sortant du polariseur est polarisé dans le plan d'incidence, et pour l'analyseur, une des deux positions dans lesquelles ce faisceau est éteint. La différence de phase est 0, lorsqu'un faisceaux polarisé dans un azimut moindre que 90° donne, après la réflexion, de la lumière polarisée rectilignement qui est éteinte par l'analyseur dans un azimut moindre que 90°. Les différences de phase sont positives, lorsque la composante

---

1) Cauchy, *C.R.*, T. VIII.

2) *Fortschritte der Physik im Jahre* 1859, p. 200.

3) Voigt, Wied. *Ann.*, 23.

4) Martin, *C.R.*, T. 56; *Ann. de Chim. et de Phys.* Sér. IV, T. XV.

polarisée dans le plan d'incidence est en avance de phase. D'après ces définitions, la différence de phase est 0 en cas d'incidence normale, positive et plus petite que $\frac{1}{2}\lambda$ pour des angles d'incidence compris entre 0° et 90°, et égale à $\frac{1}{2}\lambda$ en cas d'incidence rasante.

Si, la seconde lame prismatique se trouvant dans la position où en face des fils tendus devant la lame fixe les épaisseurs des deux lames sont les mêmes, on fait mouvoir cette seconde lame à droite, les différences de phase dans le compensateur deviennent négatives; par un glissement à gauche, elles deviennent positives. Dans le premier cas on annule la différence de phase produite par la réflexion, dans le second cas on la complète jusqu'à $\frac{1}{2}\lambda$. Le tableau suivant indique dans quel ordre les observations sont exécutées:

		Analyseur (Polariseur) dans le quadrant:							
		I	II	III	IV	IV	III	II	I
Polariseur (Analyseur) dans le quadrant:	I	*A*	—	*A*	—	*C*	—	*C*	—
	II	—	*A*	—	*A*	—	*C*	—	*C*
	III	*A*	—	*A*	—	*C*	—	*C*	—
	IV	—	*A*	—	*A*	—	*C*	—	*C*

A signifie annulation de la différence de phase, *C* complément à une demi-longueur d'onde.

Je donne ci-dessous les divers pointés relatifs à un angle d'incidence pris arbitrairement dans une des séries d'observations; ils pourront servir à faire juger du degré de précision obtenu. Pour cet angle d'incidence, l'analyseur fut placé successivement dans des azimuts de 45°, 135°, 225° et 315°, et avec le polariseur et le compensateur on pointe sur une frange noire. Comme on l'a vu au § 13, c'est pour un azimut rétabli de 45° que la frange est le plus nettement limitée et que les erreurs du compensateur exercent le moins d'influence sur les mesures des différences de phase.

Angle d'incidence $i = 80° 28' 35''$.

Annulation de la différence de phase.

Lectures sur l'analyseur.	312°4		42°,4		132°,4		222°,4	
	Polariseur.	Compensateur						
	339°,4	49^r,46	64°,3	49^r,46	338°,25	49^r,47	65°,0	49^r,47
	338,4	60	64,9	24	340,0	37	65,2	32
	339,2	59	65,25	21	340,0	34	65,1	34
	340,0	44	65,0	40	338,1	44	64,6	46
	339°,25	49^r,52	64°,8	49^r,33	339,1	49^r,405	65°,0	49^r,40
	159°,1	49^r,39	224°,75	49^r,38	159°,0	49^r,41	245°,5	49^r,49
	158,9	57	245,1	19	159,8	24	244,9	24
	159,2	58	245,3	22	160,1	27	245,25	28
	159,0	35	245,4	37	158,5	43	244,5	45
	159°,05	49^r,47	245°,1	49^r,29	159°,55	49^r.34	245°,05	49^r,35^5
Moyenne	339°,15	49^r,50	245°,0	49^r,31	339°,2	49^r,37	245°,0	49^r,38

Complément de la différence de phase.

Lectures sur l'analyseur.	312°,4		42°,4		132°,4		222°,4	
	Polariseur.	Compensateur.						
	64°,2	35^r,34	338°,3	35^r,23	65°,0	35^r,18	337°,9	35^r,20
	65,0	06	339,4	03	65,1	02	339,0	05
	64,9	09	338,9	04	64,8	34,96	339,2	07^5
	64,5	34	338,4	22	64,1	35,16	338,2	26
	64°,65	35^r,21	338°,75	35^r,13	64°,75	35^r,08	338,6	35^r,14^5
	244°,2	35^r,29	158,75	35^r,23	244°,7	35^r,16	159°,1	35^r.23
	244,6	04	158,75	04	244,35	34,98	159,9	01
	245,4	01	158,7	03	244,5	99	159,8	34,98
	244,2	23	158,6	23	244,7	35,18	159,9	35,24
	244°,6	35^r,14	158°,7	35^r,13	244°,55	35^r,08	159°,7	35^r,11^5
Moyenne	244°,6	35^r,17^5	338°,7	35^r,13	244°,65	35^r,08	339°,15	35^r,13

Comme les points à partir desquels on compte les azimuts du polariseur et de l'analyseur sont 291°,6 et 267°,4, et que les positions de la seconde lame prismatique, pour lesquelles la différence de phase dans le compensateur est $\frac{1}{2}\lambda$, 0 et $-\frac{1}{2}\lambda$, sont $C_{\frac{1}{2}\lambda} = 25^r,14$, $C_0 = 39^r,50$, $C_{-\frac{1}{2}\lambda} = 53^r,69$, on a donc, correspondant à l'angle d'incidence $i = 80°28'35''$, les valeurs moyennes suivantes pour la différence de phase et pour l'azimut rétabli, c'est-à-dire, pour l'angle dont la tangente donne le rapport des amplitudes:

	Différences de phase. Azimut de l'analyseur: 45°	135°	225°	315°	Moyennes.		Azimut rétabli. Azimut de l'analyseur. 45°	135°	225°	315°	Moyennes.
Ann.	$10^r,00$	$9^r,81$	$9^r,87$	$9^r,88$	$9^r,89$	$10^r,01$	42°,45	43°,4	42°,4	43°,4	42°,9
Compl.	$10,03^5$	9,99	9,94	9,99		9,99	43,0	42,9	43,05	42,45	42,85
						10,00					42°,875

Comme $\frac{C_0 - C_{\frac{1}{2}\lambda}}{C_{-\frac{1}{2}\lambda} - C_0} = \frac{14,36}{14,19} = 1,012$, la moyenne des valeurs qu'on a obtenues en annulant la différence de phase doit, pour la comparaison avec l'autre, être multiplié par le facteur 1,012. La valeur ainsi corrigée a été inscrite, sous l'en-tête „Moyennes", à côté de la valeur non réduite. Les nombres donnés sont chacun la moyenne de 8 pointés.

18. Les observations avec les trois miroirs d'argent ont donné en définitive les résultats suivants. I et H désignent l'angle d'incidence principal et l'azimut principal, $a_{\frac{1}{4}\lambda}$ le déplacement de la seconde lame prismatique, qui correspond à un changement de $\frac{1}{4}\lambda$ dans la différence de phase dans le compensateur.

Miroir d'argent *C*.

$I = 72°34'47''$, $H = 42°21'42''$, $a_{\frac{1}{4}\lambda} = 7^r,18$.

Numéro d'ordre.	Angle d'incidence	Différence de phase Observée	Différence de phase Calculée.	Différence en $\frac{\lambda}{4}$	Azimut rétabli. Observé.	Azimut rétabli. Calculé.	Différence
I	80°28'35''	$10^r,00$	$9^r,98$	+ 0,003	42°52'5	42°51'5	+ 1'
II	72°54'51''	7,31	7,28	+ 0,004	42°24'	42°21'28''	+ 2'5
III	72°28'36''	7,14	7,16	— 0,003	42°21'	42°21'41''	— 1'
IV	55°35'36''	$3,52^5$	3,48	+ 0,006	43°1'5	42°8'	— 6'5

Miroir d'argent *B*.

$I = 72°2'59''$. $H = 42°0'$, $a_{\frac{1}{4}}\lambda = 6^r95$.

Numéro d'ordre.	Angle d'incidence.	Différence de phase Observée	Calculée.	Différence en $\frac{\lambda}{4}$	Azimut rétabli. Observé.	Calculé.	Différence.
V	81°34'57''5	10r,33	10,24	+ 0,013	42°51'	42°49'	+ 2'
VI	72°33'3''	7,05	7,10	— 0,007	42°0'	42°1'	— 1'
VII	71°56'58''	6,93	6,92	+ 0,002	41°48'	42°0	— 12'
VIII	71°20'51''	6,81	6,75	+ 0,008	42°12'	42°0	+ 12
IX	58°0'22''	3,84	3,86	— 0,003	42°45'	42°39'	+ 6'

Miroir d'argent *B*. (translucide.)

$I = 72°23'1''$, $H = 41°1'$, $a_{\frac{1}{4}}\lambda = 7^r10$.

X	82°11'40''	10r,76	10 ,65	+ 0,016	42°10'	42°12'	— 2'
XI	81°55'20''	10,63[5]	10,54	+ 0,013	42°27'	42°8'	+ 19'
XII	72°41'55''	7,22	7,19	+ 0,004	40°57'	41°1'	— 4'
XIII	71°57'15''	6,95	6,97	— 0,003	41°6'	41°0'39''	— 5'
XIV	70°50'25''	6,70	6,65	+ 0,007	41°18'	41°2'	+ 16'
XV	55°27'5''	3,66	3,54	+ 0,016	41°58'5	42°6'	— 7'5

Pour les miroirs *C* et *A* on a déduit des observations II et III, XII et XIII, par interpolation, les valeurs de l'angle d'incidence principal et de l'azimut principal, et au moyen de ces valeurs on a calculé, par les formules de Cauchy, les différences de phase et les rapports des amplitudes correspondant aux autres angles d'incidence. Dans la série relative au miroir *B* trois observations ont été faites au voisinage de l'angle d'incidence principal. Toutes les trois ont servi à la détermination des valeurs exactes de l'angle d'incidence principal et de l'azimut principal, et à cet effet on a admis qu'au voisinage de l'angle d'incidence principal les petites modifications de la différence de phase et de l'azimut rétabli, dues à de petits changements de l'angle d'incidence, peuvent être calculées au moyen des valeurs approchées de *I* et de *H* qui résultent de deux des observations. Dans les observations avec le miroir *B*, la normale fut d'abord tournée vers la gauche,

puis vers la droite. Plus tard cela a été omis, parce que les observations donnaient, dans les deux cas, les mêmes valeurs pour les grandeurs mesurées. Les déterminations sont toutes relatives à une lumière ayant environ la réfrangibilité de la raie D.

19. Après l'achèvement des observations X—XV avec le miroir A, j'ai déterminé, pour l'angle d'incidence principal trouvé par interpolation, la différence de phase et l'azimut rétabli, afin de voir si ces deux quantités étaient égales à $\frac{1}{4}\lambda$ et H. Deux observations successives donnèrent:

Angle d'incidence.	Différence de phase.	Azimut rétabli.
72° 23′ 1″	7^r,25	41° 27′
72° 23′ 1″	7^r,26	41° 33′

de sorte que les valeurs moyennes de ces quantités sont

7^r,25⁵ 41° 30′.

Non-seulement ces valeurs diffèrent sensiblement de $\frac{1}{4}\lambda$ et de H, mais elles tombent même en dehors de celles qui avaient été trouvées antérieurement pour les angles d'incidence XII et XIII, et desquelles on avait déduit par interpolation l'angle d'incidence principal. Voulant savoir à quoi cette différence devait être attribuée, je déterminai de nouveau la différence de phase et l'azimut rétabli pour les angles d'incidence XII et XIII. Ces observations donnèrent:

Angle d'incidence.	Différence de phase.	Azimut rétabli.
72° 41′ 55″	7^r,29	41° 19′ 5
71° 57′ 15″	6^r,82	41° 28′ 5

On déduit de là: $I = 72° 23′ 51″$, $H = 41° 24′$. Des mesures faites à ce nouvel angle d'incidence principal donnèrent:

72° 23′ 51″ 7^r,09 41° 24′.

Ces valeurs de la différence de phase et de l'azimut rétabli concordent parfaitement avec $\frac{1}{4}\lambda$ et H. Mais, aux mêmes angles d'incidence, j'avais maintenant trouvé, pour les quantités mesurées, d'autres valeurs que la première fois. L'état de la surface avait donc subi une modification. Cela ressortait aussi de la circonstance suivante Au début des observations le soleil apparaissait à travers le miroir comme un disque bleu, après l'achèvement, comme un disque jaune. Le miroir était devenu plus transparent. Même la flamme d'une lampe à pétrole s'y voyait à travers. M. Quincke [1]) aussi a observé de pareils changements dans les miroirs d'argent, et il a remarqué, en outre, que les rayons lumineux se propageaient d'abord plus rapidement dans la plaque que dans le verre, ensuite plus lentement. Cela n'est pas le cas pour notre miroir. Les indices de réfraction, avant et après le changement, sont 0,439 et 0,397. La variation de l'indice de réfraction est plus petite et dans un autre sens que pour les miroirs de M. Quincke. La modification qui s'est produite, au cours du travail, dans les propriétés du miroir, explique jusqu'à un certain point la grande différence entre les valeurs calculée et observée de l'azimut rétabli dans l'observation XI; les observations ont été exécutées, en effet, dans l'ordre suivant: d'abord X, plus tard XII, XIII, XIV, et finalement XV et XI.

20. Avec les trois miroirs d'argent, des mesures ont été prises au voisinage de l'angle d'incidence principal et à des angles d'incidence pour lesquels la différence de phase est d'environ $\frac{1}{8}\lambda$ et $\frac{3}{8}\lambda$. Dans chacun de ces trois groupes d'observations on peut combiner les mesures et considérer la moyenne des différences entre les quantités mesurées et calculées comme l'écart de l'observation au calcul. On obtient de cette manière les résultats suivants:

---

[1]) Quincke, *Ueber die optischen Eigenschaften der Metalle*, dans Pogg. *Ann.*, 119 et 120. Voir aussi: Berl. *Monatsber.*, 1863.

Différence de phase environ.	Différence de phase observée — calculée.	Moyenne.	Azimut rétabli observé — calculé.	Moyenne.
$\frac{3}{8}\lambda$	$+0{,}016\frac{\lambda}{4}$, $+0{,}013\frac{\lambda}{4}$; $+0{,}013\frac{\lambda}{4}$;	$+0{,}011\frac{\lambda}{4}$	$-2'$, $+19'$, $+2'$;	$+5'$
	$+0{,}003$;	(0,008)	$-1'$;	(0',5)
$\frac{1}{4}\lambda$	$+0{,}004$, $-0{,}003$, $+0{,}007$;	$+0{,}001^5$	$-4'$, $-5'$, $+16'$;	$+1'$
	$-0{,}007$, $+0{,}002$, $+0{,}001$;	(0,001)	$+0'$, $-12'$, $+12'$;	(0',2)
	$+0{,}004$, $-0{,}003$;		$+2'$, $-1'$;	
$\frac{1}{8}\lambda$	$+0{,}016$, $-0{,}003$, $+0{,}006$;	$+0{,}006$	$-7',5$; $+6'$, $-6',5$;	$-3'$
		(0,002)		(0)

Les nombres placés entre parenthèses s'appliquent au cas où l'on exclut les mesures faites avec le miroir A, dont les propriétés ont éprouvé un changement pendant la durée des recherches. Ce miroir, en outre, était transparent, et les observations de M. Quincke [1]) ont montré que pour les miroirs transparents les formules de Cauchy représentent encore assez bien, il est vrai, les différences de phase et les rapports des amplitudes, mais que les écarts sont pourtant notablement plus grands que pour les miroirs opaques.

Il résulte de nos observations que, pour la réflexion sur l'argent dans l'air, les différences de phase et les azimuts rétablis donnés par les formules de Cauchy sont exacts à environ $0{,}007 \times \frac{1}{4}\lambda$ et un peu plus de 0°,1 près. Les valeurs mesurées des rapports des amplitudes diffèrent d'environ 0,3°/₀ des valeurs calculées. Les différences entre l'observation et le calcul sont à peu près égales aux erreurs d'observation, car celles-ci peuvent être évaluées pour les différences de phase à $0{,}005 \times \frac{1}{4}\lambda$ et pour les azimuts rétablis à 0°,1. L'exactitude de la mesure des azimuts rétablis n'est donc pas très grande. Du reste, comme il fallait mouvoir les nicols à la main et estimer à l'oeil les dixièmes de degré, on ne

---

[1]) Quincke, Pogg. *Ann.* 128, p. 562 et suiv.

pouvait guère attendre de cette méthode d'observation un plus haut degré d'exactitude, d'autant plus que les différentes déterminations des azimuts des Nicols, qui rendent la frange dans le compensateur aussi obscure que possible, peuvent présenter des divergences assez notables.

Les mesures de M. Jamin et de M. Quincke ont fait voir que les changements éprouvés par la lumière, en se réfléchissant sur les métaux, sont reproduits par les formules de Cauchy avec une exactitude à peu près la même pour les différents angles d'incidence, de sorte que le résultat des observations faites à des angles pour lesquels la différence de phase est d'environ $\frac{3}{8}\lambda$, $\frac{1}{4}\lambda$ et $\frac{1}{8}\lambda$ peut être étendu à des angles d'incidence quelconques. Les différences entre les valeurs mesurées et les valeurs calculées par les formules de Cauchy étant donc toujours petites, et à peu près du même ordre que les erreurs d'observation, il est permis de conclure que ces formules expriment exactement les phénomènes présentés par la réflexion sur les métaux.

Pour le calcul M. Jamin et M. Quincke se servent de formules un peu simplifiées. Les formules originales de Cauchy, pour la réflexion sur les métaux, sont:

$$2H = \tau + \omega_a\,,\quad \cos 2I = \frac{tg\,(\tau - \omega_a)}{tg\,(\tau + \omega_a)}\,,$$

$$\sigma = tg\,I\sqrt{\frac{\cos\,(\tau + \omega_a)}{\cos\,(\tau - \omega_a)}}\,,$$

$$\cot\,(2\,\omega + \tau) = \cot\,\tau\,\cos\left\{2\ arc\ tg\,\frac{\sin i_1}{\sigma}\right\},$$

$$\varrho^2 \sin 2\,\omega = \frac{\sin^2 i_1 \sin 2\,\tau}{\sigma^2}\,,$$

$$tg\,\varphi = \sin\,(\tau + \omega)\,tg\left\{2\,arc\,tg\,\frac{\sin^2 i_1}{\sigma\varrho\,\cos i_1}\right\}$$

$$\cos 2\,h = \cos\,(\tau + \omega)\,\sin\left\{2\,arc\ tg\,\frac{\sin^2\ i_1}{\sigma\,\varrho\,\cos i_1}\right\}.$$

I désigne l'incidence principale, H l'azimut principal, φ la différence de phase et h l'azimut rétabli pour l'angle d'incidence i_1.

Les trois premières équations servent à déduire de I et H les constantes optiques σ et τ, la troisième et la quatrième à calculer les quantités auxiliaires ω et ϱ. Celles-ci ont pour chaque angle d'incidence une valeur déterminée, mais M. Jamin et M. Quincke les considèrent comme des quantités constantes.

J'ai calculé une des séries d'observations de M. Quincke avec les formules de Cauchy non simplifiées. Ce calcul m'a fait voir que la simplification introduite ne modifiait que de 1′, tout au plus de 2′, l'azimut rétabli, mais qu'elle pouvait occasionner des changements de $0{,}005 \times \frac{1}{4}\lambda$ dans la différence de phase. Comme les observations que j'ai communiquées donnent une différence d'environ $0{,}007 \times \frac{1}{4}\lambda$ entre les différences de phase observées et calculées, on voit qu'il vaut mieux, pour le calcul de ces quantités, ne faire subir aucune modification aux formules.

21. La concordance entre l'observation et les formules de Cauchy est plus grande dans mes mesures que dans celles de M. Jamin et de M. Quincke. M. Jamin [1]) a comparé de différentes manières la théorie de Cauchy avec les phénomènes observés dans la réflexion par les métaux, et cette comparaison lui a donné les résultats suivants:

Méthode.	Différence de phase observée — calculée. Moyenne.	Azimut rétabli observé — calculé. Moyenne.
1. Comparaison des intensités des faisceaux réfléchis sur le verre et sur les métaux.	——	environ 30′.
2. Réflexions multiples sur deux miroirs parallèles.	$0{,}01 \frac{\lambda}{4}$	environ 30′. (dans le cuivre.)
3. Détermination des axes de l'ellipse dans le faisceau réfléchi polarisé elliptiquement.	Azimut observé—calculé du petit axe de l'ellipse que les molécules d'éther décrivent dans le faisceau réfléchi.	en moyenne environ 20′.
4. Détermination du rapport des amplitudes, au moyen de la position du polariseur pour laquelle les deux images de l'analyseur ont la même intensité.	——	12′.

1) Jamin, *Ann. de Chim. et de Phys.*, Sér. III, T. 19.

Les observations de M. Quincke [1]), de même que les miennes, ont été faites par réflexion simple, au moyen du compensateur, et ont fourni les résultats suivants:

Métal.	Différence de phase observée — calculée. Moyenne.	Azimut rétabli observé — calculé. Moyenne.
Argent déposé sur flintglass.	$0{,}012 \frac{\lambda}{4}$	33',5
Argent déposé sur crownglass.	$0{,}035 \frac{\lambda}{4}$	23',5
Or.	$0{,}009 \frac{\lambda}{4}$	29'

En outre, dans la série des observations sur l'argent, quand l'incidence croît de 0 à I, la valeur observée de l'azimut rétabli ne diminue pas régulièrement. C'est ce que M. Wiedemann a déjà fait remarquer [2]).

Dans les derniers temps, M. Conroy [3]) a mesuré l'intensité des faisceaux lumineux réfléchis par les métaux. Il a trouvé, en définitive, que pour l'acier, l'argent et le métal des cloches les différences entre les intensités observées et calculées étaient de 0,01 à 0,05 de l'intensité des rayons incidents. On peut se demander toutefois si la méthode suivie par M. Conroy, et dans laquelle la mesure de l'intensité lumineuse se faisait à peu près de la même manière que dans l'emploi du photomètre de Ritchie, permettait d'atteindre un haut degré d'exactitude. Les différences entre les déterminations successives sont effectivement assez grandes. Ce qui plaide aussi contre l'exactitude des résultats de M. Conroy, c'est que mes observations sur les miroirs, A, B et C prouvent, comme

[1]) Pogg. *Ann.*, 128.

[2]) E. Wiedemann, Pogg. *Ann.*, 151, p. 5.

[3]) Conroy, *On the Amount of Ligth reflected by Metallic Surfaces,* dans *Proc. Royal Soc.*, 35, 36, 37.

on l'a vu, que la formule de Cauchy reproduit exactement, à environ 0,003 près, le rapport des intensités. M. Conroy aurait donc dû trouver, pour les rayons polarisés dans le plan d'incidence et perpendiculairement à ce plan, à peu près les mêmes différences entre les intensités calculées et observées, ce qui n'est pas le cas.

Les recherches de M. Jamin et de M. Quincke ont démontré — et les observations de M. Conroy ne peuvent rien changer à ce résultat — que les formules de Cauchy représentent d'une manière suffisamment exacte les phénomènes de la réflexion métallique; de mes propres séries d'observations avec les miroirs d'argent A, B et C (§ 19, (2) et (4)) il résulte en outre que, si l'on donne plus de précision à la méthode d'observation et pousse plus loin l'élimination des erreurs, les différences entre les valeurs observées et calculées des différences de phase et des rapports des intensités s'abaissent jusqu'à $0{,}007 \times \frac{1}{4}\lambda$ et 0,3°/₀ (ou un peu moins de 0°,1) et deviennent donc à peu près du même ordre que les erreurs expérimentales [1]).

22. De l'accord des observations avec les formules de Cauchy on ne peut toutefois conclure l'exactitude de la théorie que Cauchy a proposée. Les formules, en effet, qui ont été obtenues par Neumann [2]) et celles qui résultent de la théorie développée

---

1) A l'occasion des premiers résultats du travail de M. Conroy, lesquels ont toutefois été modifiés plus tard, M. Stokes a fait observer (*Proc. Royal Soc.*, Vol. 35, p. 39) que les formules de Cauchy représentent bien assez exactement les rapports des intensités, mais nullement les intensités elles-mêmes, et que le caractère optique des métaux doit être déterminé par trois constantes, tandis que peut-être les formules de Cauchy doivent être regardées comme des formules d'interpolation.

Maintenant, que l'extrême petitesse des différences entre l'observation et les formules de Cauchy est prouvée, on est certainement autorisé à attribuer à celles-ci une portée plus grande.

2) Les formules de Neumann ont été communiquées par M. Wild dans les *Fortschritte der Physik*, 1859. Les formules que Neumann avait données précédemment dans Pogg. *Ann*. 26, et dont M. Quincke fait mention (Pogg. *Ann*. 128, p. 545), sont de nature empirique.

par M. Voigt [1]) représentent les phénomènes avec à peu près le même degré d'exactitude, comme le montre le tableau suivant:

Miroir d'argent *C*.

$I = 72° 34' 47''$, $H = 42° 21' 42''$, $a_{\frac{1}{4}\lambda} = 7^r,18$.

Angle d'incidence.	Différence de phase.				Azimut rétabli.			
	Observée.	Calculée d'après Cauchy.	Calculée d'après Voigt.	Différence Cauchy-Voigt.	Observé.	Calculé d'après Cauchy.	Calculé d'après Voigt.	Différence Cauchy-Voigt.
80°28'35''	$10^r,00$	9,98	9,98	$0,000\ \frac{\lambda}{4}$	42°51'	42°51'27'5	42°51'21''	6''5
72°54'51''	7,31	7,28			42°24'	42°21'28''		
72°28'36''	7,14	7,16			42°21'	42°21'41''		
55°35'36''	$3,52^5$	3,48	3,47	$+0,001\ \frac{\lambda}{4}$	43°4'	43°8'	43°8'11''	— 11''

Miroir d'argent [2]).

$I = 72° 34' 47''$, $H = 42° 26'$.

Angle d'incidence.	Différence de phase.			Azimut rétabli.		
	Calculée d'après Cauchy.	Calculée d'après Neumann.	Différence Cauchy-Neumann.	Calculé d'après Cauchy.	Calculé d'après Neumann.	Différence Cauchy-Neumann.
80°28'35''	9,98	9,99	$-0,001\ \frac{\lambda}{4}$	42°55'	42°54'5	+ 0',5
72°28'36''	7,15	7,15	0,000	42°26'	42°26'	0'
55°35'36''	3,48	3,46	+0,003	43°11'11''	43°12'15''	— 1'

[1]) Voigt, dans Wied. *Ann.*, t. 23.

[2]) Dans les calculs des différences de phase et des azimuts rétablis par les formules de Neumann, j'avais par méprise employé l'angle 42°26', au lieu de 42°21'42'', pour l'azimut principal; j'ai donc aussi refait, avec cette valeur fautive, le calcul des différences de phase et de l'azimut rétabli suivant les formules de Cauchy.

Pour les deux constantes n et $\varkappa$ des formules de M. Voigt, constantes qui ne s'obtiennent pas directement, mais par des approximations successives, il a été trouvé $n = 0{,}295$, $\varkappa = 9{,}771$. Avec ces valeurs, la différence de phase, pour l'incidence principale, est de $90^\circ\ 2'\ 20'' = 1{,}004 \times \frac{1}{4}\lambda$, et l'azimut rétabli de $42^\circ\ 1'\ 44'' = H + 2''$. On voit par là que l'indice de réfraction n et le coefficient d'absorption $\varkappa$ sont déterminés très exactement [1]).

Réflexion sur l'argent dans l'eau.

23. Les deux constantes optiques d'un miroir métallique, pour la réflexion dans l'air, étant d'après Cauchy σ et τ, d'après M. Voigt n et $\varkappa$, on a, lorsque la réflexion par le même miroir s'opère dans un autre milieu, à indice de réfraction n_1, les valeurs $\sigma' = \frac{\sigma}{n_1}$ et τ, ou $n' = \frac{n}{n_1}$ et $\varkappa$. Dans la théorie électromagnétique de la lumière, théorie dont on peut aussi déduire les formules de Cauchy pour la réflexion sur les métaux, cette relation persiste. M. Quincke a fait quelques mesures à ce sujet. L'accord avec la théorie n'est toutefois pas très grand. Pour reconnaître si les différences doivent être attribuées à des erreurs d'observation, ou si la théorie n'est pas tout à fait exacte, j'ai aussi étudié la manière dont la réflexion, sur le miroir d'argent C, s'opère dans l'eau.

---

[1]) M. Voigt lui-même (Wied. *Ann*. 23) a comparé sa théorie, entre autres, avec les différentes observations de M. Jamin et de M. Quincke, mais en se contentant d'un moindre degré d'exactitude dans les calculs. D'après M. Voigt, ce serait peine perdue de refaire des calculs plus détaillés, tant qu'on n'a pas trouvé le moyen de construire des miroirs ayant des propriétés optiques constantes, et tant que les observations n'ont pas atteint une plus grande exactitude. La méthode d'observation ayant toutefois été rendue plus précise, et une petite partie seulement du miroir ayant été utilisée pour les mesures, j'étais naturellement conduit à recommencer les calculs en y mettant plus de rigueur, afin de voir si les différences qui existent peut-être entre les formules échappent encore à la précision des mesures.

La petite auge, qui contenait l'eau, est représentée dans les fig. 3^a et 3^b. La fig. 3^a montre l'auge vue d'en haut, la fig 3^b, vue de côté. La paroi latérale peut tourner autour de la charnière B et décrire un angle allant jusqu'à 60° et qui est réglé au moyen de la vis a. Aux bords de la paroi mobile sont fixées, dans deux rainures, des bandes de caoutchouc, grâce auxquelles l'auge reste étanche malgré le déplacement de la paroi. Les ouvertures b et c, percées dans les parois latérales, sont recouvertes de deux plaques de verre plan-parallèles, isotropes. L'auge est installée sur la table du spectromètre, de telle sorte que le faisceau incident et le faisceau réfléchi par le miroir traversent les plaques de verre perpendiculairement à leurs faces. Les plaques n'exercent donc pas d'influence sur le plan de polarisation de ces faisceaux. Un appareil particulier, qui se fixe au spectromètre, sert à amener l'axe de rotation du miroir dans le miroir lui-même et à faire coïncider cet axe avec celui du cercle divisé. Cet appareil, représenté dans la fig. 4, consiste essentiellement en un anneau $A A$, qui au moyen de deux glissières G et H peut être déplacé dans deux directions rectangulaires, et qui porte lui-même deux autres glissières E et F, à l'une desquelles, savoir à E, est adapté le miroir S. A l'aide de ces deux dernières glissières, qui déplacent le miroir dans deux directions rectangulaires, on peut donner à celui-ci une position telle que l'axe autour duquel tourne l'anneau se trouve dans la face antérieure du miroir. Les deux premières glissières servent à amener l'axe de l'anneau en coïncidence avec l'axe du cercle divisé. Les vis a, a de l'anneau $A A$ et celle de la plaque C servent successivement à rendre l'axe de l'anneau et du miroir perpendiculaire à l'axe du cercle divisé. Tout l'appareil est assujetti par les vis a et b sur une petite colonne en fer faisant corps avec un arceau du même métal et qui est fixé, au moyen de vis de pression, à deux des bras du pied du spectromètre. On ajuste d'abord le miroir, puis on glisse l'auge autour du miroir et on la place exactement dans la position requise.

J'ai trouvé ainsi :

Angle d'incidence.	Différence de phase.	Azimut rétabli.
67° 44′ 1″	$7^r,12$	42° 27′
68° 7′ 34″	$7^r,21^5$	42° 34′,⁵

Il suit de là, puisque $a_{\frac{1}{4}\lambda} = 7^r,18$, $I = 67°58'53''$, $H = 42°32'$.

Dans les deux tableaux suivants je réunis les valeurs des différentes quantités, telles qu'elles résultent de mes observations et de celles de M. Quincke.

Réflexion sur l'argent.

Milieu	τ	log σ	log σ calculé.	Indice de réfraction de l'eau. observé.	Indice de réfraction de l'eau. calculé.	Angle d'incidence principal. observé.	Angle d'incidence principal. calculé.	Azimut principal. observé.	Azimut principal. calculé.
Air	84°10′	0,4609	—	—	—	72°34′.5	—	42°22′	—
Eau	84°6′5	0,3223	0,3362	1,3329	1,376	67°59′	67°59′+26′	42°32′	42°32′
Les observations de M. Quincke ont donné :									
Air	87°24′	0,5174	—	—	—	74°19′	—	43°48′	—
Eau	87°52′	0,4257	0,3916	1,336	1,235	71°28′	71°28′-1°11′	44°3′	43°52′

L'indice de réfraction n_1 de l'eau a été déterminé immédiatement après les observations dont je viens de faire connaître les résultats ; pour cette détermination, la petite auge faisait l'office de prisme creux. Les nombres de la troisième colonne sont fournis par la relation : $\log \sigma_e = \log \frac{\sigma_a}{n_1}$, ceux de la cinquième par : $n_1 = \frac{\sigma_a}{\sigma_e}$ si l'on distingue par les indices e et a les constantes selon que la réflexion s'opère dans l'eau où dans l'air.

Tant suivant la théorie de Cauchy que suivant la théorie électromagnétique, on devrait avoir $\tau_a = \tau_e$, $\sigma_e = \frac{\sigma_a}{n_1}$. Les

tableaux ci-dessus montrent que mes observations satisfont mieux que celles de M. Quincke à ces deux relations. De plus, dans les observations de M. Quincke et dans les miennes les écarts se produisent en sens contraire, ce qui porte à croire que, selon toute probabilité, les relations données par la théorie sont exactes.

Les valeurs de I et de H, inscrites dans les huitième et dixième colonnes, ont été trouvées de la manière suivante. Au moyen des deux constantes optiques pour la réflexion dans l'air, σ_a et τ_a, on a calculé celles dans l'eau, savoir $\sigma_e = \frac{\sigma_a}{n_1}$ et $\tau_e = \tau_a$. Avec celles-ci on a cherché, par des approximations successives, l'angle d'incidence pour lequel la différence de phase est $\frac{1}{4}\lambda$, et l'azimut rétabli correspondant à cette incidence, c'est-à-dire, l'azimut principal. D'après la théorie, la différence de phase, pour l'incidence principale observée dans l'eau, aurait dû être $90° - 0{,}017 \times \frac{1}{4}\lambda$, et non $90°$. La différence est environ le double de l'erreur d'observation.

24. La mesure de la polarisation elliptique produite par la réflexion sur les métaux dans les liquides n'offre non plus aucun argument décisif en faveur de la théorie de Cauchy ou de celle de M. Voigt. Suivant la théorie de M. Voigt, les constantes optiques du miroir d'argent C sont dans l'air: $n_a = 0{,}295$, $\varkappa_a = 9{,}771$, et par conséquent dans l'eau: $n_e = \frac{0{,}295}{n_1} = 0{,}2214$. En calculant avec ces valeurs la différence de phase et l'azimut rétabli, pour l'incidence principale observée dans l'eau, on trouve $\varphi = 90° - 0{,}018\ \frac{1}{4}\lambda$ et a. r. $= 42°\ 31'\ 38''$, c'est-à-dire, presque exactement les mêmes valeurs qui résultent de la théorie de Cauchy. De l'incidence principale observée dans l'eau, il suit $n_e = 0{,}2139$, de sorte que l'indice de réfraction de l'eau, calculé d'après la théorie de M. Voigt, serait $\frac{n_a}{n_e} = \frac{0{,}295}{0{,}2139} = 1{,}379$. La théorie de Cauchy donne pour cet indice

1,376. La concordance des deux nombres serait probablement parfaite, si la valeur de n_e pour le miroir d'argent, d'après la théorie de M. Voigt, avait été déterminée encore plus exactement.

Même lorsque la réflexion s'opère dans des liquides plus réfringents, sur des métaux dont l'azimut principal s'éloigne plus de 45°, il n'existe pas, entre les théories de Cauchy et de M. Voigt, des différences que l'on peut mesurer de cette manière. C'est ce qui ressort clairement du tableau suivant, où sont donnés l'incidence principale et l'azimut principal de l'acier, du cuivre et du platine dans le sulfure de carbone, calculés selon les deux théories.

M. Quincke a trouvé:

acier	$I = 75° 28'$	$H = 28° 16'$
cuivre	$69° 9'$	$40° 25'$
platine	$77° 8'$	$32° 46'$.

De là résultent pour les constantes dans la théorie de M. Voigt les valeurs:

acier	$n = 2,12$	$\varkappa = 1,412$
cuivre	0,425	5,3
platine	1,82	2,083.

En calculant avec ces valeurs les différences de phase et les azimuts rétablis, pour l'incidence principale, on trouve

acier	$\varphi = 90° 22'$	a. r. $= 28° 15' 50''$
cuivre	$89° 44'$	$40° 24' 16''$
platine	$89° 52'$	$32° 45' 32''$,

nombres qui montrent que n et $\varkappa$ sont déterminés avec une assez grande exactitude. Pour la réflexion dans le sulfure de carbone ($n = 1,624$) on a:

---

[1]) Quincke, dans Pogg. *Ann.*, *Jubelband.*

	Angle d'incidence principal.	Différence de phase		Différence.	Azimut principal		Différence.
		Cauchy.	Voigt.		Cauchy.	Voigt.	
acier	68°30′	90°15′	90°46′	− 31′	29°29′	29°30′	− 1′
cuivre	62°0′	90°28′	90°17′	+ 11′	41°10′	41°9′	+ 1′
platine	70°30′	89°14′	89°6′	+ 8′	33°33′	33°32′5	+ 0′5

La plus grande différence des valeurs, calculées suivant M. Voigt et suivant Cauchy est, pour les différences de phase 31′ ou 0,006 × $\frac{1}{4}\lambda$, et pour les azimuts rétablis 1′. Les différences sont donc plus petites ou de la même grandeur que les erreurs d'observation. Il est même probable qu'elles s'amoindriraient encore, si l'on déterminait avec plus de précision n et $\varkappa$, l'indice de réfraction et le coefficient d'absorption, d'après M. Voigt. Mais, comme il est déjà démontré que les différences échappent à l'observation, on n'a aucun intérêt à pousser plus loin ces laborieux calculs.

La réflexion sur le fer doux.

25. Les formules que Cauchy a établies pour la réflexion sur les métaux ont été déduites par M. H. A. Lorentz [1]) des équations du mouvement de l'électricité dans les corps homogènes isotropes, à l'aide des conditions auxquelles il doit être satisfait à la limite d'un conducteur et d'un corps isolant. Pour formuler ces conditions limites, M. Lorentz a admis que le rapport $\frac{1 + 4\pi\theta_1}{1 + 4\pi\theta_2}$, où θ_1 et θ_2 désignent les composantes de la polarisation magnétique dans l'air et dans le métal, peut être égalé à l'unité. Cette hypothèse n'est pas permise chez les métaux fortement magnétiques. Il y avait donc quelque intérêt à rechercher jusqu'à quel point les formules

---

[1]) H. A. Lorentz, *Over de Theorie der Terugkaatsing en Breking van het Licht.* Voir aussi dans Schlömilch, *Zeitschr. f. Mathem. u. Phys.*, Jahrg. 22 et 23, et *Beiblätter*, t. 1.

de Cauchy représentent les phénomènes de la réflexion sur le fer doux.

J'ai, en conséquence, exécuté la série suivante d'observations sur un miroir de fer doux construit par Steinheil.

Miroir de fer doux.

$$I = 76^\circ\, 4'\, 0'',\ H = 27^\circ\, 11'\, 33'',\ a_{\frac{1}{4}\lambda} = 7^r, 13^5.$$

Angle d'incidence	Différence de phase		Différence en $\frac{\lambda}{4}$	Azimut rétabli		Différence.
	observée	calculée.		observé.	calculé.	
86°10′20″	$12^r,47$	$12^r,32$	+ 0,02	36°30′	36°42′^{5}	— 12′^{5}
82 33 5	10,73^5	10,68	+ 0,008	31 4	30 54	+ 10
76 9 5	7,16	7,16	— 0,000	27 13	27 12^5	+ 0^5
76 0 57^5	7,12	7,13	— 0,001	27 9^5	27 11^5	— 2
65 2 56	3,73	3,73	0,000	31 8	31 4	— 4
50 28 39	1,77^5	1,77	+ 0,000^5	37 25	37 13^5	+ 11^5
29 49 17^5	0,55	0,53	+ 0,003	42 20	42 29	— 9

Le miroir présentait beaucoup de stries et de plages ternes, de sorte que, avec le grand angle d'incidence de 86° 10′ 20′, on n'observait pas dans le compensateur une frange droite, nettement limitée, et on n'y distinguait rien de la partie centrale plus obscure qui ordinairement permet d'obtenir la position exacte. Pour cette raison, la détermination de la différence de phase, à ce grand angle d'incidence, peut être affectée d'une erreur assez forte.

La différence moyenne des grandeurs observées et calculées est, pour la différence de phase $0{,}006 \times \frac{1}{4}\lambda$, pour l'azimut rétabli, 9′.

Cette dernière différence est un peu plus grande que celle dans les mesures avec les miroirs d'argent. La somme des différences positives (22′) étant toutefois à peu près égale à celle des différences négatives (25′,5), on peut conclure de ces déterminations que, pour le fer doux aussi, les formules de Cauchy représentent exactément les phénomènes de la réflexion.

La question de savoir si la polarisation magnétique dans le fer exerce de l'influence sur la réflexion de la lumière,

reste indécise. Car, d'une part, l'hypothèse sera permise que, si les forces magnétiques changent aussi rapidement de direction que celles qui apparaissent dans les vibrations lumineuses, la polarisation, même dans les métaux fortement magnétiques, est de même grandeur que dans le vide. La polarisation, en effet, doit probablement être conçue comme un arrangement, relativement lent, des molécules dans de nouvelles positions d'équilibre. D'autre part il se pourrait, si le rapport $\frac{1+4\pi\theta_1}{1+4\pi\theta_2}$ ne doit plus être pris égal à l'unité, que les formules acquièrent bien une autre forme, mais que l'influence de ce changement sur les valeurs calculées de la différence de phase et de l'azimut rétabli soit trop faible pour que l'observation puisse la constater. L'examen de ce point étant toutefois de nature entièrement théorique, nous ne nous en occuperons pas.

L'influence de la température sur la réflexion de la lumière par les métaux.

26. Dans la théorie électromagnétique, les constantes optiques d'un métal dépendent de la résistance. Comme celle-ci varie sensiblement avec la température, on s'attendrait donc, d'après la théorie électromagnetique, à ce qu'un changement de température exerce une influence appréciable sur σ et τ, et par conséquent aussi sur I et H. Pour vérifier cette présomption, j'ai mesuré, à une incidence voisine de I, la différence de phase et l'azimut rétabli, lorsque le miroir avait la température ambiante, lorsqu'il était chauffé à 120°, et lorsque le refroidissement l'avait ramené à la température ambiante.

Puisque le miroir devait être chauffé fortement, je l'ai placé dans une petite boîte en cuivre, vissée à l'une des extrémités d'une assez grosse barre du même métal. Alors on chauffait l'autre extrémité de cette barre Par-dessus la boîte on glissait une enveloppe cylindrique, de sorte que le miroir

se trouvait dans une petite enceinte, dont les parois latérales sont portées à une température d'environ 120°. Cette température était déterminée par voie thermo-électrique. L'enveloppe est percée de deux fentes étroites, qui livrent passage aux faisceaux incident et réfléchi. Comme ces faisceaux ne sont guère plus larges que la distance des fils tendus devant le compensateur, la barre de cuivre est solidement fixée, tout près du miroir, dans une colonne vissée sur la table du spectromètre. Sans cela, l'extrémité de la barre, qui porte le miroir, se déplacerait trop par la chaleur, et le mince faisceau réfléchi ne tomberait plus sur les fils du compensateur.

Avant, pendant et après l'échauffement, une série de 20 mesures fut exécutée. Les moyennes furent:

Lectures du compensateur.			Lectures de l'analyseur.		
Avant	Pendant	Après	Avant	Pendant	Après
l'échauffement.			l'échauffement.		
33,86	33,85	33,82	132°,5	132°,3	132°,25
—	33,97	$33,99^5$	—	132°,4	132°,2
34,01	$33,97^5$	33,97	132°,55	132,5	132°,6

Dans la seconde série on ne trouve pas inscrites les moyennes des mesures avant l'échauffement, parce que, un instant avant que cette série ne commençât, la barre fut malheureusement un peu dérangée de sa position.

Le résultat de ces observations est que l'influence de la température sur la différence de phase et sur le rapport des amplitudes tombe au dessous des limites des erreurs d'observation, savoir, $\pm 0{,}007 \frac{1}{4} \lambda$ et $\pm 0{,}003$°/₀ [1]).

27. La théorie électromagnétique, nous l'avons déjà dit, faisait prévoir un résultat différent. Si la relation entre la

[1]) Un examen concernant l'influence de la température sur les propriétés optiques avait déjà été exécuté, avec des moyens moins exacts, par W. R. Grove (*Phil. Mag.*, Sér. 4, Vol. 17). Il avait eu également pour résultat qu'une pareille influence ne pouvait être constatée.

composante μ du courant et la force électromotrice χ, pour des courants de très courte durée, est

$$\chi = \varkappa\, u + g \frac{du}{dt},$$

où g indique jusqu'à quel point la loi de Ohm s'applique à des courants variables [1]), les constantes optiques σ et τ d'un métal, dans la théorie électromagnétique, sont déterminées par:

$$\sigma^2 \, Cos\, 2\, \tau = K - \frac{2\, T}{\varkappa} \frac{s}{1+s^2} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\sigma^2 \, Sin\, 2\, \tau = \frac{2\, T}{\varkappa} \frac{1}{1+s^2} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Dans ces équations, $K = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$ est le rapport des constantes de la polarisation diélectrique dans le métal et dans l'air, $\varkappa$ la résistance, et $s = \frac{2\,\pi\, g}{\varkappa\, T}$, où T désigne la durée de la vibration. L'angle d'incidence principal I et l'azimut principal H sont liés à σ et τ par les relations suivantes:

$$\sigma = tg\, I \sqrt{\frac{Cos\,(\tau + \omega_a)}{Cos\,(\tau - \omega_a)}} \;(3), \quad Cos\, 2\, I = \frac{tg\,(\tau - \omega_a)}{tg\,(\tau + \omega_a)} \;(4),$$

$$2\, H = \tau + \omega_a \;(5).$$

L'angle ω_a étant très petit, — de 51′ pour mon miroir de fer doux, — on peut négliger les termes de l'ordre ω_a^2 dans le calcul de l'influence des variations de température sur I et H. On a alors:

$$tg^2\, I\, Sin\, 4\, H = \frac{2\, T}{\varkappa} \frac{1}{1+s^2} \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

Dans le système des mesures électrostatiques, employé pour

---

[1]) Voir à ce sujet: H. A. Lorentz, *Over de theorie der terugkaatsing en breking van het licht*, p. 170 et suiv. Id., Schömilch, *Zeitschr. für Math. u. Phys.*, Jahrg. 23, p. 201, 208. Id. *Beiblätter*, I, p. 102 et suiv.

l'établissement des relations (1) et (2), la résistance $\varkappa$ du fer est $\frac{1}{0,97 \times 10^{17}}$ seconde [1]). Avec cette valeur de $\varkappa$ on peut tirer des équations (1) et (2) la valeur de s et de K. Puisque, pour le miroir de fer doux sur lequel j'ai opéré, $\tau = 52° 41' 1'',5$ et $log\, \sigma = 0,588455$, on trouve: $s = 5,02$, $K = 68,9$. Ensuite si l'on admet, pour le coefficient de la température dans la résistance du fer, le nombre 0,004, la quantité $tg^2 I \sin 4 H$, d'après la formule (6), est, à 100°, près de une fois et demie plus grande qu'à 0°. Or, cela ne s'accorde pas avec les observations.

Si l'on suppose, pour se faire une idée du changement que I et H éprouvent chacun séparément, que $K = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$ est indépendant de la température, on peut, au moyen des équations (1), (2), (3) et (4), trouver les valeurs que τ et ω_a prennent par un accroissement de température, puis, au moyen de (4) et (5), les valeurs de I et H. En faisant usage de la simplification déjà introduite (omission de ω_a^2), on obtient

$$\text{pour } t = 100°, \; I = 77°35' \; H = 24°14',$$

tandis qu'on avait

$$\text{pour } t = 0°, \; I = 76°4' \; H = 27°11',5.$$

Faisons remarquer, d'ailleurs, que les différentes conséquences de la théorie électromagnétique de la lumière, qui s'appuient sur la résistance des métaux, soient en contradiction avec les faits. Dans cette théorie, l'absorption de la lumière est liée à la résistance et à la vitesse de propagation de la lumière. Calculée au moyen de cette relation, l'absorption est toutefois, pour les métaux et les électrolytes, beaucoup trop grande [2]). Ces deux cas sont évidemment en rapport

---

1) L'ohm est ici la résistance d'une colonne de mercure longue de 106 cm. et ayant une section de 1mmq; la résistance relative du fer, par rapport au mercure, est empruntée aux tableaux de M. Matthiessen.

2) Maxwell, *Electricity and Magnetism*, § 798. H. A. Lorentz, *l. c.* p 155, 156.

avec celui dont nous venons de nous occuper. Du fait que l'absorption est sensiblement indépendante de la température, on peut en effet déduire que la résistance, dont cette absorption dépend en partie, conserve à peu près la même valeur à toutes les températures, et que par conséquent la température n'exerce qu'une influence très faible sur les propriétés optiques des métaux. Ce désaccord entre la théorie électromagnétique de la lumière et l'expérience tient donc, très probablement, à ce que la résistance aux glissements électriques, considérée dans cette théorie, est une autre que la résistance galvanique. Les observations du § 26 nous apprennent que la première de ces résistances se distingue de la seconde en ce qu'elle ne varie que très peu, ou pas du tout, avec la température.

L'influence d'une mince couche superficielle sur la réflexion de la lumière par les corps transparents.

28. Pour étudier la réflexion sur les corps transparents, j'ai fait usage d'un prisme de flintglass, construit par Steinheil. Sur les deux faces latérales de ce prisme des séries d'observations ont été exécutées avec des rayons de réfrangibilité différente. De ces observations il ressort, qu'entre l'indice de réfraction donné par la déviation minimum et celui qu'à l'aide des formules de Cauchy on déduit des phénomènes de la réflexion, il existe une très-grande différence, plus grande qu'on ne l'avait encore constaté jusqu'ici; il en ressort aussi que les indices de réfraction, qui résultent de l'angle d'incidence principal et de l'azimut principal, ne deviennent pas plus grands, mais plus petits, lorsque la longueur d'onde de la lumière diminue. Je montrerai, en outre, que ces deux circonstances sont dues à un changement qu'éprouve peu à peu la surface du corps, et que les observations font connaître les lois auxquelles obéit la réflexion sur ces surfaces modifiées.

29. Avant de communiquer les résultats des différentes séries d'observations, je donnerai les mesures relatives à un angle d'incidence quelconque, pris dans l'une des séries.

Série avec la lumière D, sur la face latérale I.

Angle d'incidence $= 56^\circ 25' 15''$.

Annulation de la différence de phase.

Azimut du polariseur. 80°		100°		260°		280°	
Analyseur.	Compensateur						
46^r,76	108°,4	46^r,54	64°,0	46^r,64	108°,3	46^r,62	64°,5
60	108,5	45	64,2	76	108,5	38	64,5
67	108,2	38	64,7	76	108,1	41	64,5
78	108,3	52	64,3	58	109,0	52	64,5
46^r,70	108°,3^5	46^r,47	64°,3	46^r,68^5	108°,5	46^r,48	64°,5
46^r,78	287°,5	46^r,55	243°,8	46^r,77	288°,7^5	46^r,52	243°,7
70	287,7^5	48	244.2^5	60	288,2	44	244,0
70	289,1	47	244,9	60	288,9	41	244,1
81	288,0	58	244,7	72	288,2	55	243,5
46^r,75	288°,1	46^r,52	244°,4	46^r.67	288°,5	46^r,48	243°,8^5
Moyennes 46^r,72^5	288°,2	46^r,50	244°,3^5	46^r,68	288°,5	46^r,48	244°,1^5

Complément de la différence de phase.

Analyseur	Compensateur	Analyseur	Compensateur	Analyseur	Compensateur	Analyseur	Compensateur
32^r,51	246°,0	32^r,21	110°,7^5	32^r,46	246°,2	32^r,26	111°,0
38	246,3	09	110,7	34	246,8	09	111,6
38	246,0	11	110,9	32	246,3	09	110,2^5
54	245,4	24	110,1^5	50	246,0	23	110,5
32^r,45	245°,9	32^r,16	110°,6	32^r,40^5	246°,3	32^r,17	110°,8^5
32^r,50	66°,1	32^r,24	290°,2^5	32^r,43	66°,2	32$_r$.26	290°,1
29	66,4	10	289,8	29	66,4	16	291,0
27	66,7^5	15	290,1^5	29	66,2	08	290,2
46	66,6	25	290,5	43	66,3	24	290,3
32^r,38	66°,4^5	32^r,18	290°,2	32^r,36	66°,3	32^r,18^5	290°,4
Moyennes 32^r,41	246°,2	32^r,17	290°,4	32^r,38	246°,3	32^r,18	290°,6

Comme on a trouvé pour les lieux des franges dans le compensateur

$$C_{-\frac{1}{2}\lambda} = 53^r.68\,,\ C_0 = 39^r{,}39\,,\ C_{+\frac{1}{2}\lambda} = 24^r{,}94\,,$$

et que les points de repère pour la mesure des azimuts du polariseur et de l'analyseur sont 291°,6 et 267°,4, les valeurs moyennes de la différence de phase et de l'azimut rétabli, qui correspondent à une position déterminée du polariseur et résultent chaque fois de huit observations, sont:

Angle d'incidence.	Différences de phase. Azimut du polariseur 80°	110°	260°	280°	Moyennes.		Azimut rétabli. Azimut de l'analyseur. 80°	100°	260°	280°	Moyennes.
56°25'15"	7,33[5]	7,11	7,29	7,08[5]	7,20[5]	7,28	20,8	23,0[5]	21,1	23,2[5]	22°,0[5]
	7,48	7,23	7,44	7,24		7,35	21,2	23,0	21,1	23,2	22°,1
						7,31[5]					22°4'[5]

Les valeurs de la différence de phase produite par la réflexion, obtenues en annulant cette différence au moyen du compensateur, doivent être multipliées par $\frac{C_0 - C_{\frac{1}{2}\lambda}}{C_{-\frac{1}{2}\lambda} - C_0}$ pour être comparables aux valeurs trouvées en complétant cette même différence jusqu'à $\frac{1}{2}\lambda$.

L'azimut du faisceau incident était de 80°, une seule fois de 78°. Pour cet azimut, ainsi qu'on l'a vu au § 13, les erreurs du compensateur n'ont pas une trop grande influence sur les mesures et, en même temps, la frange est nettement limitée. Les différentes séries d'observations sont distinguées par les signes C_1, C_2, D_1, D_2, F_1 et F_2, où la lettre indique à peu près la longueur d'onde de la lumière, tandis que l'indice désigne la face latérale du prisme sur laquelle on opérait. Ces observations ont donné les résultats suivants:

Série.	Angle d'incidence.	Différence de phase. ob-servée	calculée. Cauchy.	Green.	Différence en $\frac{1}{4}\lambda$. Cauchy.	Green.	Azimut rétabli. ob-servé.	calculé. Cauchy.	Green.	Différence. Cauchy.	Green.
D_1	59°9′ 46″	10,81	10,86	10,92	— 0,007	— 0,015	5°38′	5°42′	5°37′	— 4′	+ 1′
	56 38 31	7,42	7,35	7.36	+ 0,008	+ 0,008	4 1	3 59	3 59	+ 2	+ 2
	56 34 15	7,22	7,22	7,22	0,000	0,000	3 59	3 59	3 59	0	0
	54 16 58	3,82^5	3,83	3,90	— 0,001	— 0,010	5 17	5 18	5 23	— 1	— 6
F_2	58 19 50	8,60	8,62	8,67	— 0,003	— 0,012	5 55	5 48	5 43	+ 7	+ 12
	55 50 32^5	5,95	5,91	5,91	+ 0,007	+ 0,007	4 11	4 7	4 6	+ 4	+ 5
	55 42 15	5,70	5,71	5,71	— 0,002	— 0,002	4 4^5	4 6	4 6	— 1^5	— 1^5
	55 35 47^5	5,63	5,57	5,57	+ 0,010	+ 0,010	4 9	4 6	4 7	+ 3	+ 2
	53 34 57^5	3,19	3,20	3,25	— 0,002	— 0,010	5 16	5 16	5 21	— 0	— 5
C_2	71 26 33	15,23	15.27	15,36	— 0,005	— 0,016	22 42	22 36	22 31	+ 6	+ 11
	58 59 56	11,85^5	11,84	11,91	+ 0,002	— 0,007	5 43	5 37	5 32	+ 6	+ 11
	56 34 6	8,02	8,04	8,04	— 0,003	— 0,003	4 8	4 6	4 6	+ 2	+ 2
	56 33 9	8,06	8,01	8,01	— 0,006	— 0,006	4 3	4 6	4 6	— 3	— 3
	56 30 10	7,73	7,92	7,92	— 0,024	— 0,024	3 58	4 6	4 6	— 8	— 8
	53 54 45	3,95^5	3,95	4,04	— 0,000	— 0,011	5 49	5 45	5 50	+ 4	— 1
D_2	69 30 52	13,52^5	13,61	13,70	— 0,012	— 0,024	20 2^5	20 12	20 7	— 10	— 5
	62 18 44^5	12,48	12,53	12,63	— 0,007	— 0,021	10 4	10 6	9 59	— 2	+ 5
	59 9 12	10,90^5	10,94	11,00	— 0,005	— 0,013	5 57^5	5 59	5 54	— 1^5	+ 3^5
	56 26 24^5	7,31^5	7,31	7,31	+ 0,000	+ 0,000	4 5^5	4 7	4 7	— 1^6	— 1^5
	56 21 18	7,16^5	7,17	7,17	— 0,000	— 0 000	4 8	4 7	4 7	+ 1	+ 1
	53 46 32	3,61	3,59	3,67	+ 0,003	— 0,008	5 43	5 44	5 49	— 1	— 6
	50 22 37	1,78	1,81	1,94	— 0,004	— 0,022	9 56	10 2	10 8	— 6	— 12
	46 1 4	0,93^5	1,02	1,17	— 0,013	— 0,033	15 53	15 58	16 4	— 5	— 11
D'_2	56 22 43	7,35	7,26	7,26	+ 0,010	+ 0,010	4 13	4 13	4 12	— 0	+ 1
	56 18 51	7,15	7,14^5	7,14^5	— 0,000	— 0,000	4 11	4 11	4 11	— 0	— 0
	50 22 38	1,81	1,84	1,97	— 0,004	— 0,022	9 47	9 57	10 4	— 10	— 17
	42 53 35	0,68^5	0,75	0,91	— 0,009	— 0,032	19 54	19 58	20 4	— 4	— 10

Au moyen des observations pour les deux angles d'incidence qui dans chaque série se trouvent de part et d'autre de l'incidence principale, on a déterminé par interpolation les valeurs de I et de H, et avec ces valeurs on a calculé pour tous les angles d'incidence les différences de phase et les azimuts rétablis,

suivant les formules de Cauchy [1]) et de Green [2]) pour la réflexion sur les corps transparents. Les deux angles d'incidence en question diffèrent le plus souvent de 4′, dans un seul cas de 8′. Entre des limites si étroites l'interpolation peut se faire sans le moindre inconvénient, car, au voisinage de l'incidence principale, la différence de phasé varie très-rapidement, il est vrai, mais d'une manière régulière dans les limites de 4′ à 8′.

30. Quelques observations ont encore été faites dans le dessein de déterminer sur la face latérale I l'angle d'incidence principal I et l'azimut principal H pour les lumières C et F.

Le tableau suivant contient, pour les différentes espèces de lumière et pour les deux faces du prisme, les valeurs de I et de H, ainsi que les coefficients d'ellipticité ε, et les deux indices de réfraction n_r et n_d, déduits, l'un de I et H, l'autre de la déviation minimum. On y trouve en outre les longueurs d'onde des lumières employées, longueurs d'onde qui furent déterminées avec une exactitude suffisante au moyen d'un petit spectroscope (voir § 4); puis les déplacements de la seconde lame prismatique du compensateur, correspondants à un changement de phase de $\frac{1}{4}\lambda$; enfin, $I + R$, c'est-à-dire la somme de l'angle d'incidence principal et de l'angle de réfraction correspondant.

Série.	λ	I	H	ε	n_r	n_d	$a_{\frac{1}{4}\lambda}$	$I + R$
C_1	$6{,}57 \times 10^{-4}$ mM.	56°50′	3°56′	0,0755	1,5258	1,6117	8,03	89°54′1″
D_1	$5{,}90 \times 10^{-4}$ „	56 34 28″	3 59 13″	0,0767	1,5192	1,6167	7,23	89 53 56
F_1	$4{,}86 \times 10^{-4}$ „	55 58	4 13	0,0825	1,4847	1,6285	5,88	89 53 30
C_2	6.57×10^{-4} „	56 33 39	4 5 55	0,0789	1,5186	1,6117	8,03	89 53 36
D_2	$5{,}89 \times 10^{-4}$ „	56 23 21	4 6 53	0,0796	1,5087	1.6167	7,22⁵	89 53 38
D'_2	$5{,}82 \times 10^{-4}$ „	56 18 39	4 10 31	0,0809	1,5043	1.6172	7,14	89 53 28
F_2	$4{,}84 \times 10^{-4}$ „	55 44 34	4 6 23	0,0808	1,4721	1,6287	5,76⁵	80 53 56

1) Cauchy, *Compt. Rend.*, T. 9. Voir aussi: Jamin, *Ann. de Chim. et de Phys.*, sér. III, T. 29.

2) Green, *Cambr. Phil. Transact.*, Vol. VII.

31. Ces observations montrent que l'erreur moyenne dans les déterminations de la différence de phase et dans celles de l'azimut rétabli peut être évaluée à $0{,}005 \times \frac{1}{4}\lambda$ et à 3′. La différence moyenne entre les quantités observées et les quantités calculées suivant les formules de Cauchy est, pour la différence de phase, $0{,}005 \times \frac{1}{4}\lambda$, et pour l'azimut rétabli, 4′,5. Si l'on regarde les formules de Cauchy comme démontrées par ce résultat, on trouve, en excluant les observations qui ont servi à déterminer les quantités constantes I et H, pour l'erreur moyenne de la différence de phase $0{,}006 \times \frac{1}{4}\lambda$, et pour celle de l'azimut rétabli, 4′. Dans le tableau suivant, j'ai réuni les différences entre les quantités observées et calculées correspondantes aux angles d'incidence pour lesquels la différence de phase a environ la même valeur.

Différence de phase environ.	Différence de phase observée — calculée suivant Cauchy.	Moyenne.		Azimut rétabli observé — calculé suivant Cauchy.	Moyenne.	
		Cauchy.	Green.		Cauchy.	Green
$\frac{15}{32}\lambda$	$-0{,}013 \times \frac{1}{4}\lambda$	$-0{,}013 \times \frac{1}{4}\lambda$	$-0{,}024 \times \frac{1}{4}\lambda$	— 10′	— 10′	— 5′
$\frac{7}{16}\lambda$	— 0,007, — 0,005,	— 0,006	— $0{,}018^{5}$	— 2, + 6	+ 2	+ 8
$\frac{3}{8}\lambda$	— 0,005, — 0,007, — 0,003,					
	+ 0,002,	— 0,003	— 0,012	— 1.5, — 4, + 7, + 6	+ 2	+ 7
$\frac{1}{4}\lambda$	— 0,000, — 0,000, — 0,000,			— 1.5, + 1.5, — 0		
	+ 0,008; + 0,010, — 0,002,			+ 2, + 3, — 4.5		
	+ 0,007; — 0,003, — 0,006,			+ 4; — 2, — 3		
	+ 0,024; — 0,000, + 0,010;	0,000	0,000	— 8; — 0, + 0;	— 0	— 0
$\frac{1}{8}\lambda$	+ 0,003, — 0,001, — 0,002,			— 1, — 1, — 2		
	— 0,000;	0,000	— 0,010	+ 4;	+ 0	— 4^{5}
$\frac{1}{16}\lambda$	— 0,004, — 0,004,	— 0,004	— 0,022	— 6, — 10	— 8	— 14
$\frac{1}{32}\lambda$	— 0,013, — 0,009,	— $0{,}010^{5}$	— $0{,}032^{5}$	— 5, — 4	— 4^{5}	— 10

32. Si l'on se reporte aux recherches de M. Jamin [1]) et de M. Quincke [2]) sur la réflexion par les corps transparents, on trouve que les différences moyennes entre les quantités observées et calculées y sont plus considérables qu'elles ne

[1]) Jamin, *Ann. de Chim. et de Phys.*, sér. III, t. 29.

[2]) Quincke, Pogg. *Ann.*, 128.

l'ont été dans les miennes. Voici, en effet, le tableau de ces différences :

Observateur.	Corps réfléchissant.	Différence de phase observée - calculée. Moyennes.	Azimut rétabli. observé — calculé. Moyennes.
Jamin	réalgar	$0{,}015 \times \frac{1}{4}\lambda$	21′
	blende transparente	0,011	15
	diamant	0,010	11
	flint	0,026	14
	verre	0,018	15
	fluorine	0,014	7
Quincke	flintglass	0,012	20
	crownglass	0,065	13

Les observations sur mon prisme de flint s'accordent donc mieux avec les formules de Cauchy que les mesures de M. Jamin et de M. Quincke. Cela est surtout vrai des azimuts rétablis, et il faut indubitablement l'attribuer à ce que les différentes parties du compensateur ont été amenées autant que possible dans la position exacte les unes par rapport aux autres. Il est à remarquer, d'ailleurs, qu'on ne trouve dans mes observations aucune différence assez forte pour que l'accord entre l'observation et le calcul ne puisse plus être considéré comme satisfaisant. Dans les expériences de M. Jamin les différences montent à $0{,}08 \times \frac{1}{4}\lambda$ et 50′; dans celles de M. Quincke elles s'élèvent dans la série du flint à $0{,}04 \times \frac{1}{4}\lambda$ et 45′, tandis que la série du crown présente cinq cas où l'écart entre la différence de phase observée et calculée atteint plus de $0{,}1 \times \frac{1}{4}\lambda$.

Il faut observer, d'ailleurs, que c'est seulement en apparence que les déterminations de l'azimut rétabli s'accordent ici mieux avec les formules de Cauchy que dans le cas de la réflexion sur les métaux [1]); en réalité, l'accord est moindre. Les valeurs données pour l'azimut rétabli, tant par M. Quincke et M. Jamin que par moi, ne représentent pas, en effet, des quantités observées. On observe l'azimut rétabli, lorsque le

[1]) Eisenlohr, Pogg. *Ann.*, 104, p. 373.

faisceau incident est polarisé dans un plan presque perpendiculaire au plan d'incidence. Soit β l'azimut rétabli observé, α l'azimut du polariseur; l'angle ω, dont la tangente indique le rapport des amplitudes, se détermine alors par $tg\,\omega = \frac{tg\,\beta}{tg\,\alpha}$.
Comme α diffère peu de 90°,les différences entre les ω calculés et les ω déduits de l'observation sont, surtout si ω est petit, beaucoup moindres que les différences entre les β calculés et observés. C'est ainsi que, dans mes mesures, $\beta_{\text{observé}} - \beta_{\text{calculé}}$ est en moyenne de 11',5, donc beaucoup plus grande que la valeur moyenne de $\omega_{\text{observé}} - \omega_{\text{calculé}}$, 3',5. Quand on se rappelle la manière dont ω se déduit des observations, on peut difficilement regarder comme une confirmation satisfaisante de la formule de Cauchy les observations, où $\omega_{\text{observé}} - \omega_{\text{calculé}}$ s'élève à 20' et plus. Les expériences de M. Jamin [1]), donnent par exemple, dans la série du verre, pour
$i = 57°$, $\omega_{\text{observé}} - \omega_{\text{calculé}} = 1°\,36' - 1°\,12' = 24'$, tandis que

$$\beta_{\text{observé}} - \beta_{\text{calculé}} = 14°53' - 11'\,16' = 3°\,37'.$$

M. Jamin remarque [2]) que l'erreur en ω est beaucoup plus petite que celle en β, mais cela ne s'applique qu'à sa valeur absolue. En réalité, les ω ne sont pas plus exacts que les β.

33. M. Quincke, pour faciliter le calcul, simplifie les formules de Cauchy. Au lieu de $tg\,\varphi = \frac{\varepsilon \sin i\,\{tg\,(i+r)+tg(i-r)\}}{1-\varepsilon^2 \sin^2 i\,tg\,(i+r)tg(i-r)}$ il emploie $tg\,\varphi = \varepsilon \sin i\,tg\,(i+r)$, et, au lieu de $tg^2\,\omega = \frac{\cos^2(i+r) + \varepsilon^2 \sin^2 i \sin^2(i+r)}{\cos^2(i-r) + \varepsilon^2 \sin^2 i \sin^2(i-r)}$, $tg^2\,\omega = \frac{\cos^2(i+r)}{\cos^2(i-r)}(1 - \varepsilon^2 \sin^2 i\,tg^2\,(i+r))$; φ représente la différence de phase. Cependant, si $tg\,(i+r)$ n'est pas très grand, l'expression de Cauchy, pour la différence de phase, se transforme en $\frac{-1}{\varepsilon \sin i\,tg\,(i+r)}$, non en $\varepsilon \sin i\,tg\,(i+r)$. La première de ces

[1]) Jamin, *Ann. de Chim et de Phys.*, Sér. III, T. 29, p. 299.
[2]) Jamin, *Ann de Chim. et de Phys.*, Sér. III, T. 22, p. 275.

deux expressions fournit effectivement la différence de phase, dans le cas spécifié, avec l'exactitude nécessaire. Quand l'angle d'incidence principal est plus petit ou plus grand que l'angle de polarisation, la formule simplifiée de M. Quincke donne, pour des angles intermédiaires entre les deux qui viennent d'être nommés, une différence de phase plus petite ou plus grande que 90°, tandis qu'en réalité elle est plus grande ou plus petite, suivant que le coefficient d'ellipticité ε est positif ou négatif. Afin de pouvoir juger de l'influence que la simplification exerce sur les quantités calculées, j'ai fait encore une fois, par la formule simplifiée, le calcul de la série D_1, ce qui m'a donné:

Angle d'incidence	Différence de phase.			$tg\,\varphi = \varepsilon \sin i \left\{\frac{1}{tg(i+r)} + tg(i-r)\right\}$	Azimut rétabli.		
	observée	calculée suivant Cauchy.	calculée suivant Quincke.		observé.	calculé suivant Cauchy.	calculé suivant Quincke.
59° 9′46″	10,781	10,86	10,72	10,79	5°38′	5°42′	5°42′
56 38 31	7,42	7,35	7,22	7,22	4 1	3 59	3°59′30″
56 34 15	7,22	$7{,}22^3$	7,10	7,10	3 59	3 59	3 59 18
54 16 58	$3{,}82^5$	3,83	3,72	3,77	5 17	5 18	5 18

Ce tableau montre que, non-seulement au voisinage de l'incidence principale, mais aussi pour d'autres angles, les différences de phase calculées suivant les formules simplifiée et non simplifiée s'écartent l'une de l'autre de $0{,}018 \times \frac{1}{4}\lambda$ et plus, quantités qui ne peuvent être négligées dans des mesures exactes. Quant à l'azimut rétabli, les déterminations n'en sont pas assez exactes pour que l'emploi des formules simplifiées exerce une influence appréciable.

L'influence de la simplification des formules décroîtra naturellement à mesure que le coefficient d'ellipticité sera plus petit. Pour notre prisme de flint ce coefficient est très grand, savoir 0,08. Une valeur aussi forte n'a été rencontrée par M. Jamin que dans le réalgar et quelques autres corps. Pour un flint ayant à peu près le même indice de réfraction que notre prisme, M. Jamin a trouvé $\varepsilon = 0{,}012$. Les

caractères de la polarisation elliptique produite par la réflexion sur notre prisme de flint sont d'ailleurs en concordance avec la valeur considérable de son coefficient d'ellipticité. L'azimut principal est plus grand, et les limites, entre lesquelles il se produit encore une polarisation elliptique sensible, sont plus écartées. C'est ainsi que les angles d'incidence pour lesquels la différence de phase est environ de $\frac{1}{32}\lambda$ et de $\frac{15}{32}\lambda$, diffèrent de 23°,5, tandis que dans une série d'observations de M. Jamin, avec du flint pour lequel $\varepsilon = 0,017$, l'écart de ces mêmes angles n'était que de 6°,5.

34. Par suite de la polarisation elliptique à laquelle la réflexion donne lieu, il existe, ainsi que l'a remarqué M. Jamin, une différence entre l'angle d'incidence principal et l'angle de polarisation de Brewster, déterminé par la relation $tg\, i = n$. Cette différence s'accuse nettement dans deux de mes séries d'observations. J'ai en effet trouvé, dans la série D_1:

pour $i = 56°34'14''$ différence de phase $= 1,000\,\frac{1}{4}\lambda$, $i + r = 89°53'56'',5$
$i = 56°38'31''$ „ „ „ $= 1,027$ „ $i + r = 89°59'45''$

et dans la série D_2:

pour $i = 56°18'51''$ différence de phase $= 1,001\,\frac{1}{4}\lambda$, $i + r = 89°53'45''$
$i = 56°22'43''$ „ „ „ $= 1,029$ „ $i + r = 89°59'20''$

La différence des deux angles est d'environ 4' [1]).

Etude de la couche superficielle.

35. Bien que les observations avec le prisme de flint soient sous tous les rapports très-exactement représentées par les formules de Cauchy, comme le montrent le parfait accord des quantités observées avec les quantités calculées et la différence nettement accusée entre l'angle d'incidence principal et l'angle de polarisation, la théorie de Cauchy n'est pas applicable

[1]) D'après M. Jamin (*l.c.* p. 289), cette différence serait, pour le réalgar, de 18'. Le coefficient d'ellipticité du réalgar étant toutefois à peu près le même que celui de mon prisme de flint, la différence donnée par M. Jamin est, selon toute probabilité, notablement trop grande.

à ces phénomènes. Dans cette théorie on a, en effet, $n_r = n_d$, tandis que pour les lumières C et D nous avons trouvé entre n_r et n_d une différence de 6°/o, et pour la lumière F une différence de 9°/o. Des différénces aussi considérables n'avaient été observées ni par M. Jamin, ni par M. Quincke. Dans les recherches soignées de M. Seebeck, l'écart était également plus petit. Une seconde particularité, que nous avons constatée, c'est que n_r n'augmente pas, mais diminue, quand la longueur d'onde décroît.

Il a été dit, précédemment, qu'un fil de cocon est tendu sur la surface réfléchissante, afin qu'on puisse amener une partie déterminée de ce plan dans l'axe du cercle divisé. Pour une raison quelconque, ce fil dut un jour être remplacé par un autre. Or, il se trouva qu'on observait alors sur la face du prisme, sous des angles d'incidence suffisamment grands, l'image dite de Moser. Naturellement se présentait ainsi cette question: jusqu'à quel point les couches d'air condensées sur le prisme, qui produisent les images de Moser, exercent-elles de l'influence sur les phénomènes et peuvent-elles être la cause des deux particularités qu'ils offrent, savoir la grande différence entre n_r et n_d et l'accroissement de n_r avec la longueur d'onde?

Les expériences de M. Waidele [1]) ont fait voir qu'au moyen de la poudre de charbon, préalablement rougie au feu, on peut enlever les couches d'air condensées. J'ai donc, pour l'angle d'incidence principal, déterminé la différence de phase et l'azimut rétabli, tant lorsque la surface était encore recouverte de la couche d'air, que lorsque celle-ci avait été absorbée par la poudre de charbon fortement calcinée. A cet effet, la poudre encore incandescente était répandue sur la face du prisme, au bout de quelque temps on en secouait la plus grande partie, puis, à l'aide d'un pinceau de filaments d'asbeste, également rougi, on enlevait les particules restées adhérentes au verre. Une série de mesures ayant alors été effectuée, la

[1]) Waidele, Pogg. *Ann.* LIX.

face était bien essuyée et, après un délai suffisant pour que la couche d'air condensé eût pu s'y reproduire, on exécutait une nouvelle série de mesures. Bien que ces observations aient été répétées plusieurs fois, à des jours différents, jamais je ne me suis aperçu que l'air condensé eût exercé quelque effet.

36. La cause des particularités offertes par la réflexion sur le prisme de flint ne pouvait donc être cherchée que dans la couche superficielle, qui peut-être, peu à peu, avait acquis de nouvelles propriétés. Pour trancher la question, les faces du prisme furent usées à l'émeri, puis repolies au rouge de Paris. Après ce travail, exécuté par M. Steinheil, le prisme, à première vue, ne se distinguait en rien d'un autre, qui présentait les mêmes particularités. Mais bientôt on reconnut que l'intensité de la lumière réfléchie était beaucoup diminuée.

Le fil de cocon, tendu au-dessus de la face du prisme, donnait dans le champ de la lunette une ligne obscure, qui rendait tout pointé impossible. J'employai donc, pour centrer, une petite pointe de laque, ainsi qu'il a déjà été dit. La lumière du soleil était à peine assez intense pour la détermination des différences de phase et des rapports des amplitudes au voisinage de l'angle d'incidence principal. Les résultats des mesures sont contenus dans le tableau suivant:

Espèce de la lumière.	Face du prisme.	Angle d'incidence principal.	Azimut principal.	ε	n_r	n_d	$I + R$
C	II	58° 20′ 35″	46′ 47″	0,014	1,6220	1,6117	89°59′45″
F	II	58 30 35	1° 9	0,021	1,6329	1,6285	89 59 26

Par l'enlèvement de la couche superficielle, le coefficient d'ellipticité et l'azimut principal sont donc devenus au moins cinq fois plus petits, tandis que l'angle d'incidence principal a augmenté de 2°. La différence des deux indices de réfraction est maintenant beaucoup moindre, savoir 0,6 °/₀ et 0,3 °/₀ pour les lumières C et F, et elle tombe dans un autre sens que pré-

cédemment. Les intensités des composantes du faisceau réfléchi sont maintenant 0,202 et $0,37 \times 10^{-4}$ tandis qu'elles étaient de 0,156 et $7,6 \times 10^{-4}$ avant le repolissage du prisme, en mettant l'intensité de la lumière incidente égale à l'unité. Sur les nouvelles faces, les figures de Moser ne s'observaient plus.

37. L'influence qu'une modification de la surface pourrait exercer sur les phénomènes de la réflexion a déjà été signalée plus d'une fois. M. Quincke la mentionne en divers passages de ses *Optische Experimental Untersuchungen* [1]), et il paraît avoir toujours en vue les couches gazeuses condensées, comme on peut l'inférer d'un renvoi aux opinions exprimées dans un Mémoire inséré aux Pogg. *Ann.*, T. 108. Récemment, M. Glan [2]) aussi a fait des recherches sur le même sujet, et il a trouvé que des couches gazeuses différentes n'exercent aucune influence, ou bien exercent toutes la même [3]). Si l'on tient compte, en outre, de ce qu'ont appris nos expériences avec la poudre de charbon, il semble qu'on soit autorisé à conclure que la présence des couches gazeuses condensées est sans effet sur les différences de phase et sur les rapports des amplitudes.

Les particularités que nous a offertes le prisme de flint avaient déjà été décrites, en partie, par Seebeck [4]). Ce physicien, ayant déterminé exactement les angles de polarisation, trouva des différences entre ces angles et ceux qui se déduisent de la loi de Brewster. La différence la plus grande était de 38′; sur une face nouvellement polie, elle se réduisait à 2′,1. Comme nous avons vu, au § 34, que la différence entre l'angle d'incidence principal et l'angle de polarisation n'est, pour notre prisme, que de 4′, les angles de polarisation relatifs aux raies C, D et F, sur la face II du prisme, sont environ

$$56° 38', \quad 56° 27', \quad 55° 49',$$

1) Voir, entre autres, Pogg. *Ann.*, 127, p. 218, 232; id. 128, p. 301, 390.

2) Wied. *Ann.*, 11.

3) Bien que M. Glan ait cherché à chasser par la chaleur les gaz condensés à la surface, il est douteux que l'échauffement ait été assez fort pour enlever les couches de gaz immédiatement contiguës au verre. Voir, à ce sujet, Voigt, dans Wied. *Ann.* 19.

4) Pogg. *Ann.*, 20.

tandis que les valeurs qui, d'après la loi de Brewster, se déduisent de n_C, n_D, n_F sont:

$$58^\circ 10', \quad 58^\circ 16', \quad 58^\circ 27'.$$

Les différences s'élèvent ici à environ 2°; après que les faces eurent été usées et repolies, ces différences, pour les raies C et F, n'étaient plus que de 9',5 et 3' 45''.

Pour notre prisme de flint et pour le verre de Seebeck qui présentait la différence la plus forte, les différences en question ont le même signe, tant avant qu'après le repolissage. On serait donc tenté de conclure qu'elles ont une cause commune, savoir, la pression exercée, pendant l'opération de la taille, sur les couches superficielles; pourtant, telle ne peut être la vraie cause, puisque, pour les faces nouvelles, Seebeck a trouvé l'écart tantôt dans un sens et tantôt dans l'autre.

Si les phénomènes de la réflexion sont réellement influencés par les couches gazeuses condensées, toute modification de ces couches devra entraîner un changement dans la réflexion. On peut produire une pareille modification en polarisant un miroir métallique plongé dans un liquide, le courant qui traverse celui-ci devant d'ailleurs être assez faible pour ne pas déterminer une décomposition. Quelques expériences faites de cette manière, avec un miroir de platine, n'avaient décelé, à la suite de la polarisation, aucun changement dans la différence de phase, ni dans le rapport des amplitudes. Avec le palladium, pour lequel l'absorption de l'hydrogène constitue une source spéciale de modification des constantes optiques, j'ai commencé des expériences, qui seront poursuivies.

38. L'étude de la réflexion sur le prisme de flint avait été entreprise pour rechercher avec quel degré d'exactitude les phénomènes s'accordent avec les formules qu'on a établies, et laquelle de ces formules les représente le plus fidèlement. Des expressions pour la différence de phase et le rapport des amplitudes ont été données, en effet, non-seulement par Cauchy, mais aussi par Green [1]).

---

1) Green, *Cambr. Phil. Transact.*, Vol. VII.

Tous les deux emploient les mêmes conditions limites, auxquelles ils parviennent par des voies différentes, mais ils n'admettent pas les mêmes hypothèses quant aux vibrations longitudinales. L'observation ayant dévoilé de si grandes différences entre les deux indices de réfraction qui se déduisent, l'un de l'incidence principale et de l'azimut principal, l'autre de la déviation minimum, aucune réponse ne peut être faite à la seconde des deux questions ci-dessus énoncées; mais, tout comme dans les expressions de Cauchy, on peut aussi introduire dans les formules de Green la valeur de l'indice de réfraction qui résulte de I et de H, et examiner laquelle des deux formules, maintenant empiriques, s'accorde le mieux avec les expériences sur le prisme de flint. Cet examen est tout à fait de la même nature que celui auquel M. Eisenlohr [1]) a soumis les mesures de M. Jamin, lesquelles ont rapport à des surfaces non modifiées.

Cauchy avait trouvé pour le coefficient d'ellipticité $p = \dfrac{2\,u\,sin\,i}{t\sqrt{sin^2 i + t^2}}$, expression qu'il changea plus tard [2]), à la suite des recherches de M. Jamin, en $p = \varepsilon\,sin\,i$. Green obtint $p = \dfrac{\lambda_{\prime\prime}^2 - \lambda''^2}{\lambda_{\prime\prime}^2 + \lambda''^2}$ [3]). Dans ces expressions, i est l'angle

---

1) Eisenlohr, Pogg. *Ann.*, 104.

2) Cauchy, *Comptes Rendus*, T. 28, p. 124.

3) Eisenlohr (Pogg. *Ann.*, 104, p. 357) a fait remarquer que cette forme du coefficient d'ellipticité ne doit pas être regardée comme celle de Green. Celui-ci suppose que les rapports des deux coefficients d'élasticité sont les mêmes dans les deux milieux, de sorte qu'on aurait $\dfrac{\lambda_{\prime\prime}}{\lambda''} = n$, n étant l'indice de réfraction des vibrations transversales, et $p = \dfrac{n^2 - 1}{n^2 + 1}$. Avec cette forme de p, toutefois, les formules ne peuvent pas représenter les observations, car n devrait alors être égal à 1,18, par conséquent beaucoup trop petit. Mais Lord Rayleigh (*Phil*, *Mag.*, Ser. IV, Vol. 42) a montré qu'on peut aussi arriver aux formules de Green en supposant seulement la résistance au glissement égale dans les deux milieux, de sorte qu'il n'est par nécessaire que les indices de réfraction pour les vibrations transversales et longitudinales soient les mêmes.

d'incidence, $\lambda_{,,}$ et λ'' désignent les longueurs d'onde des vibrations longitudinales dans l'air et dans le second milieu transparent, u et t dépendent de la longueur d'onde des vibrations dans le faisceau incident et du coefficient d'extinction des vibrations longitudinales. Cauchy suppose, en effet, que les vibrations longitudinales ne peuvent se propager que comme un système d'ondes à amplitude décroissante.

Pour que les formules puissent être calculées avec $p = \frac{2\, u \sin i}{t \sqrt{\sin^2 i + t^2}}$, il faut que t et u soient connus. J'ai donc, pour les différentes séries d'observations, déterminé $\frac{p}{\sin i}$ tant au moyen des différences de phase observées qu'au moyen des rapports d'amplitude observés, et j'ai en outre cherché quelle influence exerce, sur les valeurs calculées de $\frac{p}{\sin i}$, une petite erreur dans les quantités mesurées. Ces calculs m'ont appris que $\frac{p}{\sin i}$ se déduit le plus exactement des différences de phase correspondant à des angles d'incidence qui ne sont pas trop grands et des azimuts rétablis voisins de l'angle d'incidence principal. Une erreur de $0{,}007 \times \frac{1}{4}\lambda$ dans la différence de phase et une erreur de $10'$ dans l'azimut rétabli observé, c'est-à-dire, de $2'$ dans l'angle dont la tangente donne le rapport des amplitudes, occasionnent toutefois dans $\frac{p}{\sin i}$ des variations plus grandes que $1\,^{\circ}/_{\circ}$. D'après l'expression $p = \frac{2\, u \sin i}{t \sqrt{\sin^2 i + t^2}}$, $\frac{p}{\sin i}$ devrait diminuer lorsque l'angle d'incidence augmente. Mais on trouve que, pour des valeurs croissantes de l'angle d'incidence, les valeurs correspondantes de $\frac{p}{\sin i}$ tantôt croissent et tantôt décroissent. Il en résulte qu'on ne peut pas déterminer de valeurs pour u et t. Les observations ne sont donc pas encore assez exactes pour nous apprendre quelque chose concernant la forme que Cauchy a

obtenue pour le coefficient d'ellipticité [1]). Elles nous permettent toutefois de décider entre les formes $p = \varepsilon \sin i$ et $p = \frac{\lambda_{\prime\prime}^2 - \lambda''^2}{\lambda_{\prime\prime}^2 + \lambda''^2}$ Suivant la première, le coefficient d'ellipticité est proportionnel à $\sin i$, suivant la seconde, il est constant. Avec chacune des deux valeurs du coefficient d'ellipticité j'ai calculé, dans les différentes séries d'observations, pour chaque angle d'incidence, les différences de phase et les azimuts rétablis. La valeur constante, que suivant Green on doit attribuer à p, fut déterminée au moyen de l'angle d'incidence principal et de l'azimut principal. Les résultats de ces calculs ont été communiqués ci-dessus, dans les tableaux du § 29. Pour des angles très rapprochés de l'incidence principale, il est naturellement à peu près indifférent que l'on exécute les calculs par l'une ou par l'autre forme de p. Avec les formules de Cauchy, les différences entre les valeurs observées et calculées des différences de phase et des azimuts rétablis sont successivement $0{,}005 \times \frac{1}{4}\lambda$ et $4',5$,

---

[1]) Il devait paraître singulier que mes observations avec le prisme de flint ne donnent rien qui puisse servir à juger la forme $p = \frac{2\,u \sin i}{t \sqrt{\sin^2 i + t^2}}$, alors que M. Eisenlohr avait pu employer à cet usage les mesures de M. Jamin sur le réalgar, dont l'accord avec les formules de Cauchy est moindre. M. Eisenlohr trouva, en effet, qu'avec $p = \frac{2\,u \sin i}{t \sqrt{\sin^2 i + t^2}}$ la somme des carrés des différences entre les quantités observées et calculées avait la valeur la plus petite; ensuite venait $p = \varepsilon \sin i$, et en dernier lieu $p =$ constante, comme le veut la théorie de Green. A raison de ces résultats de M. Eisenlohr, j'ai cherché les valeurs de $\frac{p}{\sin i}$ qui se déduisent des valeurs des différences de phase et des azimuts rétablis obtenues par M. Jamin pour le réalgar; or, pour ces valeurs aussi, j'ai trouvé tantôt un accroissement, tantôt un décroissement, lorsque l'angle d'incidence devient plus grand. Ces observations n'autorisent donc pas à conclure que $p = \frac{2\,u \sin i}{t \sqrt{\sin^2 i + t^2}}$ soit la forme la plus probable du coefficient d'ellipticité. Incidemment, je ferai remarquer qu'une erreur doit s'être glissée dans les nombres que M. Jamin donne pour ε et n. De $I = 67°\,26'$ et $H = 4°\,52'$ il résulte $n = 2{,}427$ et $\varepsilon = 0{,}065$. M. Jamin indique $n = 2{,}454$ et $\varepsilon = 0{,}079$.

avec celles de Green 0,017 × $\frac{1}{4}\lambda$ et 8′, tandis que l'erreur moyenne des quantités observées peut être évaluée, comme on l'a vu au § 31, à 0,005 × $\frac{1}{4}\lambda$ et 3′. Il résulte de là que $p = \varepsilon \sin i$, et non $p =$ constante, est la forme la plus probable du coefficient d'ellipticité pour représenter mes observations sur le flint avec sa couche superficielle particulière. Ce sont surtout les différences de phase qui l'indiquent clairement. Les observations de l'azimut rétabli devraient être un peu plus exactes pour donner à de pareilles questions une réponse péremptoire [1]).

39. Comme les phénomènes observés sur le flintglass sont dus à la modification de la couche superficielle, on est naturellement conduit à se demander jusqu'à quel point ces phénomènes peuvent être expliqués par une transition graduelle [2]) entre les deux milieux, air et verre. Il se trouve toutefois que, d'après cette hypothèse, l'angle d'incidence principal serait plus grand que l'angle de polarisation; or, pour le flint (§ 34), c'est l'inverse qui a lieu. On a également recherché si l'on pourrait rendre compte des déviations, que présente le flint, en admettant que les deux milieux sont séparés par une couche possédant d'autres propriétés que le verre. Les premiers résultats de l'examen ne sont pas favorables à cette seconde supposition. Toutefois, pour qu'un jugement définitif puisse être prononcé, de nouveaux calculs sont nécessaires.

En général, il y a trois causes qui déterminent une polarisation elliptique dans la lumière réfléchie par les corps trans-

---

[1]) M. Kurz (Pogg. *Ann.*, 108) a également comparé ses mesures sur le flintglass avec les formules de Cauchy et de Green. Dans ce cas aussi la surface était un peu modifiée, car on trouva $n_r = 1{,}596$; n_d n'est pas donné. M. Kurz déduit de ses nombres que les formules de Green s'accordent le mieux avec les différences de phase mesurées. Bien que cela soit vrai, il faut remarquer que les différences entre les quantités mesurées et calculées sont assez considérables, et que dans la grande majorité des cas elles ont le même signe. Si l'on voulait tirer une conclusion des observations de M. Kurz, il faudrait donc déclarer que l'accord avec les formules est insuffisant.

[2]) L. Lorentz, Pogg. *Ann.*, 111.

parents, savoir: les vibrations longitudinales qu'on doit introduire pour satisfaire aux conditions limites, la transition graduelle entre les deux milieux, laquelle peut être interrompue par une couche à propriétés modifiées, d'où résulte, comme troisième cause, une transition brusque. Lorsqu'on veut tenir compte de ces trois circonstances à la fois, le problème devient des plus complexes. Il y aurait donc un grand avantage à pouvoir vérifier séparément, par l'expérience, chacune des trois hypothèses. En ce qui concerne la transition graduelle, ce contrôle peut se faire par l'observation de la différence entre l'angle d'incidence principal et l'angle de polarisation pour des surfaces non modifiées. Pour que l'observation soit suffisamment exacte, il faudra toutefois que le coefficient d'ellipticité ait la même grandeur qui celui du prisme de flint. Bien que, suivant M. Jamin, le réalgar satisfasse à cette condition, les propriétés biréfringentes de cette matière la rendent moins propre aux expériences en question.

Abstraction faite de l'explication complète des phénomènes, on pourrait rendre compte, de la manière suivante, du fait que n_r decroît avec la longueur d'onde. L'influence de la couche superficielle modifiée se manifeste surtout en ce que n_r devient plus petit que n_d. A cette couche il faudra attribuer une épaisseur déterminée. Celle-ci, exprimée en longueurs d'onde, acquiert une valeur plus grande à mesure que la longueur d'onde diminue. On pourra donc admettre, eu égard aussi aux expériences de M. Quincke sur la pénétration de la lumière dans le second milieu en cas de réflexion totale, que, pour la lumière d'une moindre longueur d'onde, la couche exerce une influence plus grande et rend plus grande la différence entre n_r et n_d, de sorte que n_r croît et décroit avec la longueur d'onde.

---

[1]) C. A. van Rijn, *De elliptische polarisatie bij de terugkaatsing van het licht door doorschijnende middenstoffen*, voir aussi, Wied. *Ann.*, 20.

Les observations décrites dans ce Mémoire ont été exécutées au laboratoire de physique de l'Université de Leyde, sous la direction de M. le professeur H. Kamerlingh Onnes [1]).

---

1) La rédaction de mon travail était achevée, lorsque j'ai reconnu que le mode d'observation par les nicols, exposé au § 6, avait déja été indiqué et discuté par M. Lippich [1]), et que la question des erreurs du compensateur avait été traitée, quoique d'une autre manière qu'au § 11, par M. J. Macé de Lépinay [2]). Celui-ci, toutefois, n'a apporté aucune modification à la construction du compensateur.

1) *Wien. Sitz. Ber.*, *Bd.* 85, 1882.

2) *Ann. de Chim. et de Phys.*, sér. V, T. 19, 1880.

L'ÉQUILIBRE CHIMIQUE

DANS LES

SYSTÈMES GAZEUX OU DISSOUS À L'ÉTAT DILUÉ,

PAR

J. H. VAN 'T HOFF.

Introduction.

Le présent travail contient un exposé des propriétés générales de la dissolution diluée, pour autant qu'elles peuvent servir à la déduction des lois de l'équilibre chimique dans lesdites circonstances. Pour indiquer la lacune qu'il s'agissait de combler par là, je tracerai en peu de mots l'état actuel de la question qui nous occupe.

L'équilibre chimique, dont il s'agit de connaître les lois, est l'équilibre qui peut s'établir en cas de présence simultanée de deux états de la matière, différents au point de vue chimique. La décomposition du calcaire chauffé en présente l'exemple classique; elle s'arrête en effet, avant d'être totale, aussitôt que la pression de l'acide carbonique a atteint une certaine valeur, et lorsqu'il y a par conséquent présence simultanée du calcaire inaltéré et des produits de sa décomposition. Un tel équilibre sera traduit, pour nous en tenir à cet exemple, par la notation suivante:

$$CO_3\ Ca \rightleftarrows CO_2 + Ca\,O,$$

indiquant par les deux flèches en sens opposé que l'équilibre peut être considéré comme le résultat de deux transformations contraires entre deux états différents de la matière, qui seront

désignés dans la suite par les termes „premier" et „second système".

Les lois qui régissent la quantité relative des deux systèmes à l'état d'équilibre dans des conditions de volume et de température déterminées, peuvent être abordées par l'expérience et par la théorie, et sous ce dernier rapport il y a à distinguer deux points de départ différents, savoir la thermodynamique et la théorie kinétique.

Afin d'indiquer jusqu'à quel point ces lois sont connues, rappelons que pour les systèmes gazeux suffisamment dilués pour satisfaire aux lois de Boyle et de Gay-Lussac, comme p. e. dans l'équilibre du gaz hypoazotique:

$$N_2\,O_4 \rightleftarrows 2\,N\,O_2\,,$$

il y a une concordance satisfaisante entre les données de l'expérience et les déductions théoriques obtenues par les deux voies différentes que nous venons d'indiquer. La loi qui exprime, dans un tel cas, les relations à température constante, se traduit par l'équation:

$$\frac{C_{\prime\prime}^{\,n_{\prime\prime}}}{C_{\prime}^{\,n_{\prime}}} = K \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

dans laquelle $C_{\prime\prime}$ et $C_{\prime}$ représentent les concentrations des deux systèmes, par conséquent dans l'exemple choisi les quantités de $2\,N\,O_2$ et de $N_2\,O_4$ dans l'unité de volume; $n_{\prime\prime}$ et $n_{\prime}$ désignent le nombre des molécules nécessaires à la transformation du second et du premier système, par conséquent $n_{\prime\prime} = 2$ et $n_{\prime} = 1$ dans notre cas spécial; K enfin est une constante, qui ne dépend que de la température.

Cette relation (1) s'applique encore à l'équilibre hétérogène, où il y a présence simultanée de corps solides ou liquides et gazeux, pourvu que ces derniers aient la dilution mentionnée; comme exemple, reprenons le cas du calcaire:

$$Ca\,CO_3 \rightleftarrows C\,O_2 + Ca\,O.$$

La seule différence dans l'application de l'équation (1) à ces cas consiste en ce que $n_,$ et $n_{,,}$ n'ont rapport qu'aux corps qui se trouvent à l'état gazeux; par conséquent, dans l'exemple choisi, l'on a $n_, = 0$ et $n_{,,} = 1$.

La question a fait un pas en avant par l'introduction de la relation entre la constante de l'équilibre K et la température; cette relation a été déduite des principes de la thermodynamique et s'est trouvée d'accord avec l'expérience; elle s'exprime par l'équation suivante:

$$\frac{d.\, l.\, K}{d.\, T} = \frac{q}{2T^2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

dans laquelle q indique la chaleur dégagée, si, à volume constant, la quantité moléculaire du second système en kilogrammes se transforme dans le premier. Observons que cette relation s'applique également aux deux formes d'équilibre, homogène et hétérogène, qui viennent d'être distinguées.

Tandis que les lois dont il s'agit sont connues pour ce qui regarde les systèmes composés en entier ou en partie de corps gazeux à l'état suffisamment dilué, il en est autrement pour ce qui concerne l'état dissous. Quoiqu'une certaine analogie dans les deux cas fasse présumer une ressemblance dans les lois qui régissent les deux ordres de phénomènes, une déduction rigoureuse des lois de l'équilibre dans ces conditions fait défaut.

Le présent travail est destiné à combler cette lacune; en effet, en se basant sur la thermodynamique, il a été possible de déduire pour l'équilibre chimique homogène et hétérogène dans l'état dilué gazeux ou dissous, les relations suivantes:

1°. Loi de l'équilibre à température constante:

$$\frac{C_{,,}^{\Sigma a_{,,} i_{,,}}}{C_{,}^{\Sigma a_{,} i_{,}}} = K;$$

la signification des valeurs a ne peut s'éclaircir qu'à l'aide

du symbole d'équilibre sous la forme générale :

$$a_{\prime}' M_{\prime}' + a_{\prime}'' M_{\prime}'' + \text{etc.} \rightleftarrows a'_{\prime\prime} M'_{\prime\prime} + a_{\prime\prime}'' M_{\prime\prime}'' + \text{etc.};$$

par conséquent a indique le nombre de chaque espèce de molécules, tandis que i est une grandeur qui dépend du corps dont il s'agit. Si ce corps est gazeux, i est égal à l'unité, tandis que pour les corps dissous sa valeur sera déterminée dans la suite.

2° Déplacement de l'équilibre par la température :

$$\frac{d.\ l.\ K}{d.\ T} = \frac{q}{2\,T^2};$$

cette relation s'applique à l'équilibre chimique homogène et hétérogène dans l'état gazeux ou dissous.

3° Détermination de la grandeur K :

$$l.\,K = -\frac{E}{2\,T},$$

E indiquant la force électromotrice, exprimée en calories, que produit la transformation du second dans le premier système à l'unité de concentration.

I. Application des principes de la thermodynamique aux solutions à l'aide de la paroi sémi-perméable.

En abordant le problème de l'équilibre dans les solutions, deux points de départ se présentaient, la thermodynamique et la théorie kinétique. Or, comme c'est la thermodynamique qui a mené au but, je commence par en exposer en peu de mots le contenu, sous la forme dont on s'en est servi dans la suite. Il s'agit par conséquent des deux lois que voici :

Première loi de la thermodynamique (principe de la conservation du travail). Comme on sait, ce principe implique que, s'il ne s'agit que de deux formes de travail, savoir le travail mécanique (F) et la chaleur (Q), chaque kilogrammètre disparu se retrouvera sous forme de $^1/_{423.55}$ ($= A$) calorie et réciproquement.

La conséquence qui nous en intéresse spécialement ici a rapport à ce qu'on appelle un cycle de transformations, c'est-à-dire une série de transformations qui conduit à l'état initial dont on est parti. Dans un tel cycle, effectué avec quoi que ce soit et d'une manière quelconque, le travail intérieur étant zéro, le principe énoncé conduit à l'égalité entre la somme des chaleurs (Q) absorbées et celle des travaux extérieurs (F) effectués, si l'on exprime toutefois ces derniers en calories:

$$\Sigma Q = A \Sigma F; \qquad (1)$$

il s'entend qu'une quantité de chaleur produite rentre dans cette forme avec un signe négatif, de même qu'une quantité de travail absorbé.

Deuxième loi de la thermodynamique (principe de Carnot-Clausius). Ce principe implique que la chaleur ne peut pas passer spontanément d'un corps à un autre à température supérieure.

La conséquence qui nous en intéresse spécialement ici a rapport à ces transformations qu'on appelle réversibles, parce qu'elles peuvent se produire dans un sens comme dans l'autre; si un gaz se dilate p. e. en élévant un piston qui, par un poids placé dessus, équilibre au juste la pression qu'exerce le gaz, il y a transformation réversible, ce qui n'est pas le cas si le piston est chargé d'un poids inférieur. Pour un cycle de telles transformations, la somme des chaleurs absorbées (Q), divisées chacune par la température absolue (T) à laquelle elle a été absorbée, est égale à zéro:

$$\Sigma \frac{Q}{T} = 0 \qquad (2)$$

une quantité de chaleur dégagée est indiquée, cette fois encore, pas le signe négatif.

Il s'agit de déduire de ces lois deux conséquences, ayant rapport l'une au cycle à température constante, l'autre au cycle à température variable.

Cycle de transformations réversibles à température constante. Si la température reste invariable pendant toutes les transformations, on peut multiplier par T l'expression (2) et l'on obtient:

$$\Sigma Q = 0,$$

ce qui, en appliquant la relation (1), produit:

$$\Sigma T = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

en d'autres termes, dans un cycle de transformations réversibles effectué à température constante, la somme des travaux extérieurs est zéro.

Cycle de transformations réversibles à température variable. Il s'agit de déduire la conséquence des lois énoncées, pour le cas spécial seulement où deux quantités de chaleur (Q_1 et Q_2) sont absorbées à deux températures différentes (T_1 et T_2); les expressions (1) et (2) deviennent alors:

$$Q_1 + Q_2 = A \Sigma F \text{ et } \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0.$$

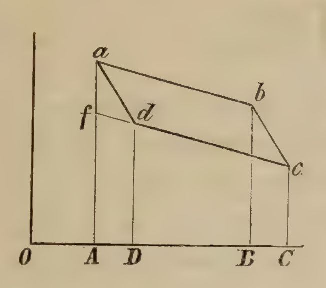
Supposons que T_1 soit supérieure à T_2, et éliminons Q_2; on obtient:

$$A \Sigma F = Q_1 \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

en d'autres termes: la somme des travaux extérieurs est égale à la chaleur absorbée, multipliée par le rapport entre la différence des températures et la température à laquelle la chaleur a été absorbée. Observons que cette expression implique la relation (3) pour le cas où T_1 et T_2 sont égaux.

Il est nécessaire encore d'ajouter l'expression analytique d'un cycle de transformations représentant un cas spécial de la catégorie indiquée. Le corps qui subira les changements, un gaz p. e., occupant un volume de V mètres cubes et exerçant une pression de P kilogrammes par mètre carré, se trouve à la température T dans un cylindre à piston.

Désignons cet état de choses par a, $OA = V$, $Aa = P$. Une transformation réversible est effectuée alors sans que la température change; dans cette transformation, dite isothermique, un accroissement du volume de $d.\ V$ se produit par un déplacement du piston de $d.\ V$, indiqué par $A\ B$, de sorte que l'état des choses se représente maintenant par b. Or, la température est maintenue constante pendant cette transformation en ajoutant la chaleur (Q_1) qu'elle absorbe et qu'on peut représenter analytiquement par:



$$Q_1 = \left(\frac{\delta.\ Q}{\delta.\ V}\right)_T d.\ V$$

indiquant par $\left(\frac{\delta.\ Q}{\delta.\ V}\right)_T$ le rapport entre la chaleur absorbée et l'accroissement de volume si la température T reste constante. C'est ensuite qu'une deuxième dilatation $B\ C$ se produit, cette fois sans qu'il y ait de chaleur ajoutée ou enlevée; pendant cette transformation, dite isentropique et indiquée par $b\ c$ la température descend de $d.\ T$. Enfin on revient à l'état primitif par deux transformations $c\ d$ et $d\ a$, isothermique l'une et isentropique l'autre.

Il s'agit maintenant d'observer que le travail effectué $(\Sigma\ F)$ se mesure par la surface $a\ b\ c\ d$, par conséquent:

$$\Sigma\ F = a f \times A\ B = \left(\frac{\delta.\ P}{\delta.\ T}\right)_V d.\ T\, d.\ V.$$

Si l'on substitue les valeurs de Q_1 et de $\Sigma\ F$, ainsi obtenues, dans la relation (4) on obtient:

$$A \left(\frac{\delta.\ P}{\delta.\ T}\right)_V d.\ T\ \ d.\ V = \left(\frac{\delta.\ Q}{\delta.\ V}\right)_T d.\ V \frac{d.\ T}{T},$$

ce qui, en simplifiant, revient à:

$$A \left(\frac{\delta. P}{\delta. T}\right)_V = \frac{1}{T} \left(\frac{\delta. P}{\delta. V}\right)_T \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

Or, l'application des principes de thermodynamique au problème de l'équilibre dans les solutions diluées a été hautement facilitée, sinon rendue possible, en effectuant les changements réversibles à l'aide d'une paroi que nous appellerons semi-perméable, parce qu'elle laisse passer le dissolvant, soit l'eau p. e., tandis qu'elle s'oppose au passage des corps dissous. Cette espèce de filtration n'est pas une simple fiction; la nature même nous présente de telles parois dans le protoplasme vivant, qui ne laisse passer que de l'eau, et MM. Traube et Pfeffer ont reproduit cette qualité dans des membranes précipitées, obtenues par le contact ménagé de deux liquides, comme p. e. une solution de sulfate cuivrique et une autre de ferrocyanure de potassium, qui produisent, dans leur action mutuelle, le ferrocyanure cuivrique précipité. L'expérience a prouvé que ces membranes s'opposent au passage de corps dissous, tout en permettant celui de l'eau; et même on peut s'en procurer qui sont perméables pour tel corps dissous sans l'être pour un autre. Nous ferons amplement usage de ces parois semi-perméables, et, au besoin, nous introduirons aussi cette perméabilité spéciale qui vient d'être signalée.

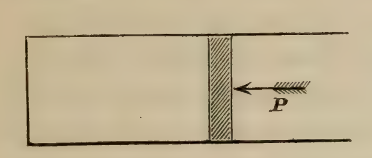
Disons d'abord comment une semblable paroi peut servir à la production de changements réversibles. Les expériences de M. Pfeffer [1]) l'indiquent clairement: un vase poreux, tel que ceux dont on fait usage dans les batteries galvaniques, est rempli d'une solution de sulfate cuivrique et plongé dans un autre vase, qui contient du ferrocyanure potassique; les solutions se recontrent dans la paroi, dont l'air a été chassé par une humectation préalable, et y forment une membrane semi-perméable de ferrocyanure cuivrique. Le vase ainsi muni est lavé, rempli d'une solution contenant 1°/₀ de sucre p. e.,

---

1) *Osmotische Untersuchungen*, Leipzig, 1877.

fermé et plongé dans l'eau; le phénomène d'osmose va alors se produire, avec cette particularité toutefois que le sucre ne passe pas en dehors du vase, et que l'eau seule en traverse la paroi et y entre; or, le vase étant fermé, cette entrée de l'eau produit une pression, laquelle a été trouvée de 50,5 Mm. de mercure pour la solution indiquée, à 6°,8.

En même temps il a été prouvé qu'en dépassant la susdite pression dans l'intérieur du vase, l'eau va traverser la paroi en sens inverse. Voilà donc un changement de concentration réversible que l'on peut effectuer avec un corps dissous comme avec un gaz; dans le dernier cas le piston *P* se meut par une force qui équilibre la pression du eorps gazeux; dans le cas d'un corps dissous, on peut se figurer le cylindre et le piston construits en parois semi-perméables suffisamment résistantes, le tout plongé dans le dissolvant; alors aussi le piston pourra se mouvoir à l'aide d'une force équilibrant la pression que la solution exerce en vertu de l'attraction qui tend à produire l'osmose, pression qui pour cette raison s'appelle la pression osmotique; il est clair que chaque mouvement du piston sera accompagné du passage du dissolvant à travers la paroi.



II. La loi de Boyle dans les solutions diluées. Travail produit dans une transformation isothermique réversible.

Ce qui précède avait trait à l'état dissous, sans exception. Nous allons en profiter dans le cas spécial des solutions diluées.

Il est clair qu'un corps dissous, tout comme un corps gazeux, exercera une pression sur les parois du vase qu'il occupe et tendra à se dilater, pourvu qu'il soit enfermé dans un vase

semi-perméable et que ce vase soit plongé dans le dissolvant; c'est le cas de l'eau sucrée p. e. dans la protoplaste végétale ou dans la cellule artificielle de MM. Pfeffer et Traube, plongée dans l'eau.

Mais l'analogie entre les gaz et les solutions considérées dans ces circonstances, peut être poussée plus loin; en effet, l'on a, dans les deux cas, la même loi dite de Boyle, c'est-à-dire, proportionnalité entre la pression et la concentration à température constante, pourvu toutefois que la dilution soit suffisante.

Démonstration théorique de la loi de Boyle dans les solutions diluées. On peut concevoir a priori la nécessité de cette proportionnalité dans le cas des corps dissous comme dans celui des gaz; en effet, si les premiers sont suffisamment dilués, chacune des particules dissoutes exercera sur le dissolvant une attraction égale, indépendante de celle des autres, et l'attraction totale, qui se mesure dans la pression osmotique, sera par conséquent proportionnelle au nombre de particules dans l'unité de volume, c'est-à-dire à la concentration de la solution.

Démonstration expérimentale. Mesure directe de la pression osmotique pour des concentrations différentes. L'expérience justifie cette prévision. M. Pfeffer [1]) vit dans la cellule décrite les concentrations suivantes (C) d'une solution de sucre à 13,°5 — 16,°1 produire les pressions osmotiques (P) indiqués en regard:

C	P	$\frac{P}{C}$
1%	535 Mm.	535 Mm.
2 „	1016 „	508 „
2,74 „	1518 „	554 „
4 „	2082 „	521 „
6 „	3075 „	513 „

[1]) *l.c.*, p.81.

La constance satisfaisante des valeurs $\frac{P}{C}$ montre qu'il y a proportionnalité entre la concentration et la pression.

Comparaison des pressions osmotiques par voie physiologique. M. de Vries [1]) mesura les pressions osmotiques à l'aide de la protoplaste végétale, qui commence à se contracter aussitôt que la cellule est plongée dans une solution à pression osmotique supérieure à celle du contenu de la protoplaste. En opérant ainsi avec des liqueurs de concentration différente, on parvient à déterminer la concentration qui produit une pression égale à celle qui sert comme terme de comparaison; ce résultat peut être obtenu pour un corps dissous quelconque, et l'on obtient ainsi plusieurs liqueurs, dites isotoniques, qui produisent une pression égale à celle du liquide que contient la protoplaste, et qui par conséquent sont encore égales entre elles sous ce rapport.

En opérant ainsi avec des tissus cellulaires qui offrent une force osmotique différente, il est clair qu'on peut obtenir plusieurs séries de liqueurs isotoniques; or, ce qui est important pour notre but, c'est que M. de Vries [2]) trouva le même rapport des concentrations dans les séries différentes. Je cite la grandeur absolue de la concentration, exprimée en quantités moléculaires ($H = 1$ gramme) par litre, et à côté les rapports entre ces concentrations, en prenant celle du salpêtre comme unité dans les séries différentes:

Série.	NO_3K	$C_{12}H_{22}O_{11}$	SO_4K_2	$NO_3K = 1$	$C_{12}H_{22}O_{11}$	SO_4K_2
I	0,12	——	0,09	1	——	0,75
II	0,13	0,2	0,10	1	1,54	0,77
III	0,195	0,3	0,15	1	1,54	0,77
IV	0,26	0,4	——	1	1,54	——

[1]) *Eine methode zur Analyse der Turgorkraft*, Pringsheim's *Jahrbücher*, XIV.
[2]) *l.c.*, p.475.

Cette proportionnalité confirme la loi qui vient d'être signalée, et il en est de même d'autres expériences du même auteur [1]) sur des solutions de plusieurs corps mélangés, où la pression osmotique revient toujours à celle qu'on obtient en admettant cette pression proportionnelle à la concentration de chacun des corps dissous.

La proportionnalité entre la pression et la concentration à température constante, sur laquelle je viens d'insister, permet d'évaluer le travail effectué à température constante, lorsqu'un changement de volume se produit d'une manière réversible, par conséquent sous un piston dans un cylindre à paroi semi-perméable, plongé dans le dissolvant, le piston équilibrant juste au la pression osmotique dans toutes les phases de son mouvement. Supposons que la quantité de corps dissous que l'on considère exerce, si elle se trouve dans l'unité de volume (1 mètre cube), une pression osmotique de P kilogrammes par mètre carré; la pression P_v exercée si le volume occupé est de V mètres cubes se déduit alors d'après la relation suivante:

$$P_v \ V = P.$$

Or, le travail dont il s'agit s'exprimant par:

$$\int_{V_1}^{V_2} P_v \, d. \, V = \int_{V_1}^{V_2} P \ \frac{d. \, V}{V} = P \, l. \, \frac{V_2}{V_1} \, ,$$

on obtient, en substituant au rapport des volumes le rapport invers des concentrations, qui lui est égal, l'expression $P \, l. \, \frac{C_1}{C_2}$, qui sera d'un usage fréquent dans la suite.

---

1) *l.c.*, p. 479.

III. La loi de Gay-Lussac dans les solutions diluées.

Tandis que la proportionnalité entre la pression et la concentration à température constante (loi de Boyle) est une propriété à laquelle on s'attendait chez les solutions diluées, il en est autrement pour ce qui regarde la proportionnalité entre cette pression et la température absolue à concentration constante (loi de Gay-Lussac). Pourtant on peut prouver la nécessité de cette dernière relation en tant qu'elle se déduit des principes de thermodynamique, et l'on verra que les résultats de l'expérience, quoique insuffisants à eux seuls pour la démonstration, sont en accord avec le résultat théorique.

Démonstration théorique de la loi de Gay-Lussac dans les solutions diluées. Supposons, en vue de la déduction théorique, une solution assez diluée pour que l'action mutuelle des particules dissoutes soit négligeable.

Effectuons avec cette solution un cycle de transformations réversibles, comme il a été décrit p. 243; elle se trouvera à cet effet dans un cylindre à paroi sémi-perméable, fermé par un piston, le tout plongé dans le dissolvant.

On arrive ainsi, absolument de la manière citée, à la relation (5):

$$A\left(\frac{\partial . P}{\partial . T}\right)_V = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial . Q}{\partial . V}\right)_T ,$$

dans laquelle $\left(\frac{\partial . P}{\partial . T}\right)_V$ désigne le rapport entre l'accroissement de la pression osmotique et celui de la température à volume ou à concentration constant. La valeur $\left(\frac{\partial . Q}{\partial . V}\right)_T$ indique la chaleur absorbée lorsque, à température constante, le volume augmente de l'unité; or, si la solution est tellement diluée que l'action mutuelle des particules dissoutes soit négligeable, le travail intérieur, qui accompagne la dilution dont il s'agit ici, devient également négligeable, de sorte que la

chaleur absorbée se retrouve en totalité dans le travail extérieur qu'effectue le piston quand le volume augmente d'un métre cube; on obtient ainsi:

$$\left(\frac{\partial. Q}{\partial. V}\right)_T = A P,$$

ce qui conduit à:

$$\left(\frac{\partial. P}{\partial. T}\right)_V = \frac{P}{T},$$

dont résulte, en intégrant, si le volume ou la concentration est supposé invariable:

$$\frac{P}{T} = \text{constante},$$

ce qui est l'expression de la loi de Gay-Lussac: la pression est proportionnelle à la température absolue, si la concentration ne varie pas.

Démonstration expérimentale. Mesure directe de la pression osmotique à des températures différentes. Pour contrôler le résultat théorique par les données expérimentales, il y a d'abord les expériences de M. Pfeffer qui méritent l'attention. En effet, cet auteur trouve, sans exception, que l'élévation de la température fait augmenter la pression osmotique; il y a plus, quoique les expériences ne soient pas assez minutieuses pour permettre d'évaluer au juste la grandeur de cette augmentation, on verra pourtant qu'elle se rapproche sensiblement de ce qu'exige la loi signalée. Calculons à cet effet, d'après l'auteur (p. 114, 115), l'accroissement (a) qu'éprouve la pression (P) par une élévation d'un degré, suivant la relation:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{a + t_1}{a + t_2}.$$

Corps	t_1	P_1	t_2	P_2	a	
Sucre de canne	14,°15	510	32°	544	254	235
» » »	15,° 5	520,5	36°	567	215	
Tartrate de soude	13,° 3	1431.6	36°,6	1564	239	259
» » »	13,° 3	908	37°,3	983	277	

On trouve ainsi, en valeur moyenne, $a = {}^1/_{237}$; la loi de Gay-Lussac exigeant $a = {}^1/_{273}$, on peut dire qu'il y a une coïncidence satisfaisante.

Expériences de M. Soret. [1]) Le phénomène observé par M. Soret est très-propre à illustrer l'analogie entre les gaz et les solutions, lorsqu'il s'agit de l'influence de la température. En effet, dans un gaz, s'il y a inégalité de température, la partie la plus chaude sera la moins concentrée, et il en est de même pour la solution, quand l'équilibre s'y est établi; la seule différence est, dans ce dernier cas, l'extrême lenteur de l'action, plus d'un mois étant nécessaire avant que l'état final soit atteint. Néanmoins M. Soret, après avoir chauffé longtemps la partie supérieure d'un tube vertical assez long et rempli en entier d'une solution, vit régulièrement la concentration des couches supérieures diminuer au profit de celles qui étaient plus basses. Cela était à prévoir d'après ce qui précède; en effet, la force osmotique augmentant par l'élévation de la température, le dissolvant doit se déplacer vers les parties les plus chaudes.

Ce n'est pas seulement au point de vue qualitatif que le phénomène de M. Soret vient à l'appui de ce que nous avons exposé, mais il y a aussi, du moins dans les dernières expériences de l'auteur, un rapprochement très-satisfaisant sous le rapport quantitatif. Calculons en effet, à l'aide des concentrations (C'_1 et C'_2) que M. Soret trouve correspondre, au bout d'un temps suffisamment prolongé, aux températures t_1 et t_2, la valeur de a, suivant la relation

$$C_2 : C_1 = a + t_1 : a + t_2\ ;$$

on obtient:

	t_1	C_1	t_1	C_2	a	
Sulfate de cuivre	20°	17,332	80°	14,039	236	228
„ „ „	„	29,867	„	23,871	219	

[1]) *Archives de Sciences phys. et nat.* (3) II, 48; *Ann. de Chim. et de Phys.* (5) XXII, 293.

ce chiffre (228) se rapproche sensiblement de la valeur théorique (273); à la vérité, les données antérieures de M. Soret offrent des déviations plus fortes, qui toutefois, vu la difficulté des expériences, ne me paraissent pas constituer une objection sérieuse.

Expériences physiologiques. Comme la loi de Gay-Lussac exige que, différents gaz ayant à une température donnée une pression égale, cette égalité se maintienne même quand la température varie, cette loi exige aussi, de solutions différentes, isotoniques à une température donnée, que cette isotonie se conserve même si la température change. C'est en effet ce que MM. Donders et Hamburger [1]) ont prouvé en expérimentant d'une manière analogue à celle de M. de Vries, seulement cette fois sur des cellules animales (globules du sang); ils trouvent, aux températures de 0° et de 34°, qu'il y a égalité dans la pression osmotique du contenu de ces cellules et des solutions suivantes aux concentrations indiquées à côté [2]):

Corps	Température 0°	Température 34°
KNO_3	1,052 — 1,03 °/₀	1,052 — 1,03 °/₀
$NaCl$	0,62 — 0,609 „	0,62 — 0,608 „
$C_{12}H_{22}O_{11}$	5,48 — 5,38 „	5,48 — 5,39 „

On peut donc dire que ces expériences encore sont favorables à la loi en question.

[1]) *Onderzoekingen gedaan in het physiologisch Laboratorium der Utrechtsche Hoogeschool* (3), IX, 26.

[2]) *l.c.*, p.36.

IV. Expression des lois de Boyle et de Gay-Lussac combinées pour les solutions diluées. Simplification qui résulte si l'on considère la quantité moléculaire. Pression d'un système de corps à l'unité de concentration.

L'expression connue, qui s'applique aux gaz:

$$P V = R T,$$

dans laquelle P est la pression, V le volume, T la température absolue, et R une grandeur dépendant de la nature et de la quantité du gaz dont il s'agit, s'applique dès à-présent aux solutions diluées, considérées, dans les circonstances décrites. En effet, l'équation citée n'est autre chose qu'une expression algébrique des lois de Boyle et de Gay-Lussac combinées. Seulement, la même réserve nécessaire dans l'application en cas de corps gazeux convient encore ici, et l'analogie qu'offrent ces deux états de la matière est telle que l'origine de la restriction est absolument la même dans les deux cas. Aussitôt que la concentration, soit dans les gaz soit dans les corps dissous, est telle que l'action mutuelle des particules n'est plus négligeable, on sait que dans le premier cas des déviations se font sentir, et de même le raisonnement sur lequel se basent, pour la solution, les lois déduites, ne peut plus être accepté dans ces circonstances.

Ajoutons que, pour les solutions, un phénomène facile à produire trahit l'existence de l'action mutuelle des particules dissoutes; ces actions donnent lieu à des travaux intérieurs, qui se manifestent par leur équivalent thermique dans l'acte de la dilution; par conséquent, les lois exposées s'appliquent à des solutions tellement diluées que la chaleur de dilution devienne négligeable. Il est clair que par là on n'a pas introduit une limite précise, indiquant le domaine de ces lois; en effet une telle limite n'existe pas, ni pour les gaz ni pour les dissolutions; il ne s'agit que d'un état limite, dont les solutions

de plus en plus diluées approchent sans jamais l'atteindre; ce n'est que dans cet état idéal, que nous appellerons dans la suite „la solution idéale", que les relations déduites et celles qui seront obtenues ont une exactitude rigoureuse.

Pour l'usage ultérieur de la relation citée il y a une simplification [1]) à introduire, en considérant les différents corps dans des quantités moléculaires en kilogrammes, c'est-à-dire 2 kilogrammes d'hydrogène, 58,5 kilogrammes de sel marin.

Lorsqu'il s'agit de corps gazeux, la simplification ainsi introduite revient à ce que la valeur de R dans l'expression:

$$P\,V = R\,T$$

est alors égale dans tous les cas, parce que les quantités moléculaires des différents corps occupent à l'état gazeux le même volume, sous pression et à température égales.

Cette valeur de R revient à 845 environ, si l'on exprime P en kilogrammes par mètre carré, V en mètres cubes; en la déterminant p. e. à l'aide de 2 kilogrammes d'hydrogène à 0° C et sous la pression atmosphérique, on a:

$$P = 10333 \quad V = \frac{2}{0{,}08958} \quad T = 273 \quad R = 845{,}05.$$

Il en résulte que la pression d'un gaz quelconque revient à 845 T, si la quantité moléculaire en kilogrammes se trouve par mètre cube; dès lors il est simple d'évaluer cette pression quand il s'agit d'un système de corps gazeux mélangés, dont la quantité indiquée par la formule chimique en kilogrammes se trouve par mètre cube, concentration que nous admettrons dans la suite comme unité.

En effet, si la formule chimique est la suivante:

$$a'\,\mathrm{M}' + a''\,\mathrm{M}'' + \text{etc. (p. e. dans un cas spécial } 4\,H\,Cl + O_2),$$

la pression revient à $R\,T\,\Sigma\,a = n\,R\,T$, n étant le nombre des

[1]) Horstmann, *Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft*, XIV, 1243.

molécules fonctionnant dans l'expression chimique (5 dans le cas spécial).

S'il s'agit d'une solution au lieu d'un gaz, on peut mettre à profit les mêmes simplifications, en évaluant la pression osmotique d'un système de corps dissous. Seulement, on aura pour la quantité moléculaire une valeur de R différente en général selon le cas considéré, mais se rapprochant toutefois de la valeur de R pour les gaz et souvent égale à elle ; c'est pour cela que nous nous servirons dans ce cas-ci de l'expression :

$$P V = i R T,$$

R étant la grandeur introduite précédemment (845,05), i une valeur peu différente de l'unité et dépendant du cas que l'on considère. Il est clair maintenant que la pression osmotique d'un corps à l'unité de concentration revient à $i R T$, et que celle d'un système de corps dissous, comme le représente la formule chimique citée plus haut, s'exprime par $R T \Sigma ai$. On voit que cette expression revient à celle obtenue pour un système gazeux en y substituant $i = 1$. Il y a donc parallélisme complet.

V. Loi de l'équilibre à température constante dans l'état dilué.

Ainsi que je l'ai fait observer dès le commencement, la loi qui dans l'état gazeux régit l'équilibre à température constante est connue. L'expérience, la thermodynamique et la théorie kinétique conduisent, indépendamment l'une de l'autre, à la relation :

$$\frac{C_{,,}^{\,n_{,,}}}{C_{,}^{\,n_{,}}} = K,$$

dans laquelle $C_{,,}$ et $C_{,}$ indiquent la concentration des deux systèmes, $n_{,,}$ et $n_{,}$ le nombre de molécules pour les corps non

condensés, K une constante. Cette loi s'applique également aux équilibres homogènes et hétérogènes.

L'état de choses est différent pour ce qui regarde l'équilibre dans les solutions diluées; ni à l'aide de la thermodynamique, ni au moyen de la théorie kinétique, les lois qui régissent l'équilibre dans ces conditions n'ont été déduites. Quelques chimistes se sont contentés d'appliquer aux solutions les relations trouvées d'une manière rigoureuse pour les gaz, et en effet dans plusieurs cas les résultats obtenus avec des solutions aqueuses sont favorables à cette généralisation; mais, comme on le verra par la suite, il y a sous ce rapport des objections sérieuses.

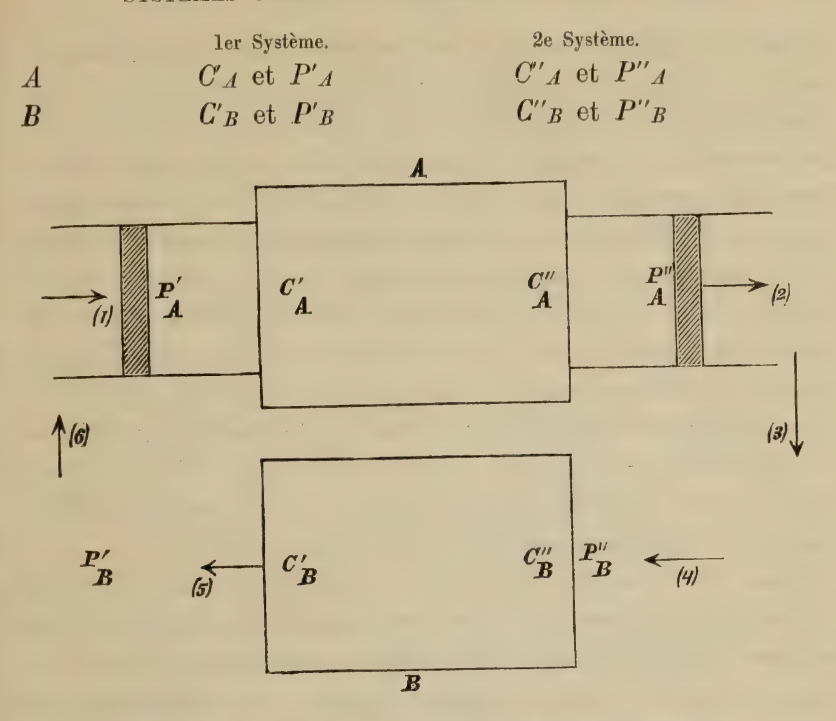
Les considérations sur l'état dissous dilué, qui viennent d'être exposées, permettent d'aborder dans toute son étendue le problème de l'équilibre relatif à ces circonstances et de le résoudre, à l'aide de la thermodynamique, pour les équilibres hétérogènes et homogènes, dans les solutions diluées quelconques.

Nous nous servirons à cet effet de la déduction suivante, qui s'applique également à l'état dilué, soit gazeux soit dissous, pour les équilibres tant homogènes qu'hétérogènes.

Supposons que les deux systèmes qui s'équilibrent exercent les pressions $P_{,}$ et $P_{,,}$ kilogrammes par mètre carré s'il y a unité de concentration, c'est-à-dire si la quantité exprimée par la formule chimique en kilogrammes se trouve par mètre cube. S'il s'agit de corps gazeux, la pression est prise dans son acception ordinaire; tandis que dans l'état dissous c'est de la pression osmotique qu'il sera question.

Dans deux cuvettes A et B l'équilibre se trouvera établi à la même température, les concentrations et les pressions des deux systèmes étant:

	1er Système.	2e Système.
A	C'_A et P'_A	C''_A et P''_A
B	C'_B et P'_B	C''_B et P''_B



On effectuera maintenant un cycle de transformations réversibles à température constante :

A travers la paroi gauche, supposée perméable pour le premier système seulement, on fera entrer dans A, à l'aide d'un cylindre à piston, la quantité moléculaire en kilogrammes de ce système à concentration C'_A. S'il s'agit de corps dissous, le cylindre est plongé dans l'eau, pour laquelle sa paroi est supposée perméable. On peut faire entrer séparément et en même temps les différents corps dont le premier système se compose, si l'on objecte qu'il est impossible de réaliser la présence de ce système lui-même, parce qu'il y aurait de suite transformation. L'entrée du premier système dans A y va produire transformation avec production du second système ; or ce système est supposé quitter la cuvette à travers la paroi droite, qui est perméable pour le second système seulement ; ce changement est rendu réversible à l'aide d'un deuxième cylindre à piston. Le jeu des deux cylindres est réglé de manière

à laisser inaltéré l'état des choses dans A pendant qu'on fait sortir, sous forme de second système à concentration C''_A la quantité moléculaire qui a été introduite sous forme de premier système à concentration C'_A. C'est alors que, d'une manière réversible toujours, on fait varier le volume de la quantité moléculaire du second système qu'on vient d'obtenir, de façon que la concentration primitive C''_A change jusqu'à devenir C''_B. Un jeu de cylindres à piston, semblable à celui qui a été mis en action tout à l'heure, produit ensuite l'entrée de la quantité moléculaire en kilogrammes du second système à la concentration C''_B dans la cuvette B, d'où elle sort sous forme de premier système à la concentration C'_B. Reste enfin à rétablir l'état primitif par un changement de volume conduisant à la concentration C'_A qu'il y avait d'abord.

Comme il s'est agi d'un cycle de transformations réversibles à température constante, les principes de thermodynamique exigent que la somme des travaux extérieurs soit zéro, ce qu'on exprime d'une manière abrégée, en numérotant les travaux d'après l'ordre cité, par:

$$(1) + (2) + (3) + (4) + (5) + (6) = 0.$$

Or, en observant que (1) et (5) sont des changements en sens opposé du même système, en même quantité, à la même température T et à concentration constante, on a:

$$(1) + (5) = 0;$$

une observation analogue conduit à:

$$(2) + (4) = 0,$$

de sorte qu'on obtient:

$$(3) + (6) = 0,$$

ce qui en réalité n'est autre chose que la loi connue de l'équilibre. En effet, le travail produit à la température T dans le changement réversible d'une certaine quantité d'un

système gazeux ou dissous dont la concentration C_1 devient C_2, a été trouvé égal à $P\, l\, \frac{C_1}{C_2}$, où P est la pression exercée si la quantité de matière considérée occupe en volume un mètre cube; cette pression étant respectivement $P_{\prime}$ et $P_{\prime\prime}$ pour les deux systèmes, on a:

$$(3) = P_{\prime\prime}\, l.\, \frac{C''_A}{C''_B} \text{ et } (6) = P_{\prime}\, l.\, \frac{C'_B}{C'_A},$$

par conséquent:

$$P_{\prime\prime}\, l\, \frac{C''_A}{C''_B} + P_{\prime}\, l.\, \frac{C'_B}{C'_A} = 0, \text{ d'où } \left(\frac{C''_A}{C''_B}\right)^{P_{\prime\prime}} = \left(\frac{C'_A}{C'_B}\right)^{P_{\prime}},$$

donc:

$$\frac{C''_A{}^{P_{\prime\prime}}}{C'_A{}^{P_{\prime}}} = \frac{C''_B{}^{P_{\prime\prime}}}{C'_B{}^{P_{\prime}}};$$

si l'on avait fait usage, dans une autre cuvette, de concentrations quelconques $C_{\prime\prime}$ et $C_{\prime}$, on trouverait toujours la même valeur $\frac{C_{\prime\prime}{}^{P_{\prime\prime}}}{C_{\prime}{}^{P_{\prime}}}$, ce qui s'exprime par:

$$\frac{C_{\prime\prime}{}^{P_{\prime\prime}}}{C_{\prime}{}^{P_{\prime}}} = \text{Const.}$$

Voilà donc la loi générale applicable également aux équilibres homogènes des systèmes dilués gazeux et dissous. Dans l'équilibre hétérogene elle s'applique encore, mais $P_{\prime\prime}$ et $P_{\prime}$ indiquent alors la pression, non des systèmes en entier, mais des corps non condensés dont ils se composent; pour le prouver, il n'y a qu'à effectuer le même cycle, en ayant soin d'introduire auparavant dans les cylindres (1) et (5) les corps condensés du premier système et dans les cylindres (2) et (4) ceux du second. Il y a alors saturation ou tension maxima de ces corps dans toutes les parties de l'appareil, et le travail qu'ils effectuent dans le cycle s'élimine.

Nous allons maintenant substituer à $P_{\prime\prime}$ et $P_{\prime}$ d'autres valeurs, et à cet effet nous rappelons qu'il s'agit de la pression des

deux systèmes à l'unité de concentration, bien entendu des corps non condensés dont ils se composent. Cette substitution introduira quelque divergence entre les équilibres gazeux et liquides, raison pour laquelle ces deux cas seront traités séparément.

1. Pour l'*équilibre gazeux*, soit p. e.:

$$2\,Cl_2 + 2\,H_2O \rightleftarrows 4\,Cl\,H + O_2\,,$$

ou, en général:

$$a'_{,} M'_{,} + a_{,}'' M_{,}'' + \text{etc.} \rightleftarrows a_{,,}' M_{,,}' + a_{,,}'' M_{,,}'' + \text{etc.},$$

les pressions $P_{,}$ et $P_{,,}$ des deux systèmes reviennent à:

$$P_{,} = R\,T\,\Sigma\,a_{,} = n_{,}\,R\,T \text{ et } P_{,,} = R\,T\,\Sigma\,a_{,,} = n_{,,}\,R\,T,$$

$n_{,}$ et $n_{,,}$ étant les nombres de quantités moléculaires dont les deux systèmes se composent, soit 4 et 5 dans l'exemple choisi.

En substituant ces valeurs dans l'expression primitive:

$$\frac{C_{,,}{}^{P_{,,}}}{C_{,}{}^{P_{,}}} = \text{Const.},$$

on obtient:

$$\frac{C_{,,}{}^{n_{,,}RT}}{C_{,}{}^{n_{,}RT}} = \text{Const.},$$

d'où:

$$\frac{C_{,,}{}^{n_{,,}}}{C_{,}{}^{n_{,}}} = \sqrt[RT]{\text{Const.}} = K,$$

c'est-à-dire l'expression connue.

2. S'il s'agit d'*équilibres de corps dissous*, comme par exemple:

$$SO_4\,H_2 + 2\,NO_3\,K \rightleftarrows SO_4\,K_2 + 2\,NO_3H,$$

les valeurs qu'on peut substituer à $P_{,}$ et $P_{,,}$ sont:

$$P_{,} = R\,T\,\Sigma\,a_{,}\,i_{,} \text{ et } P_{,,} = R\,T\,\Sigma\,a_{,,}\,i_{,,}\,,$$

où i indique la valeur décrite pour chacun des corps, a le nombre de molécules avec lequel ce corps fonctionne dans

le symbole d'équilibre. On obtient ainsi:

$$\frac{C_{\prime\prime}^{\,RT\Sigma a_{\prime\prime} i_{\prime\prime}}}{C_{\prime}^{\,RT\Sigma a_{\prime} i_{\prime}}} = \text{Const.},$$

d'où:

$$\frac{C_{\prime\prime}^{\,\Sigma a_{\prime\prime} i_{\prime\prime}}}{C_{\prime}^{\,\Sigma a_{\prime} i_{\prime}}} = \sqrt[RT]{\text{Const.}} = K.$$

Observons que cette dernière expression renferme celle qui a été déduite pour l'état gazeux; on n'a qu'à y substituer $i = 1$ pour l'application à ce cas spécial.

Tandis que les conséquences spéciales et le contrôle expérimental seront présentés dans le chapitre VIII, nous déduirons ici les conséquences générales de la relation obtenue, parce qu'elles sont de nature à inspirer de suite une certaine confiance dans son exactitude.

A cet effet, reprenons la relation dans sa forme primitive:

$$\frac{C_{\prime\prime}^{\,P_{\prime\prime}}}{C_{\prime}^{\,P_{\prime}}} = \text{Const.},$$

où $P_{\prime}$ et $P_{\prime\prime}$ représentent les pressions des deux systèmes à l'unité de concentration, avec cette particularité toutefois que pour l'état dissous il s'agit de la pression osmotique.

1. Il y a d'abord la réciprocité à observer entre l'influence de la pression sur le déplacement de l'équilibre et celle du déplacement de l'équilibre sur la pression:

„*Si le déplacement d'équilibre influe sur la pression, cette dernière influera aussi sur le premier, tandis qu'il n'en sera pas ainsi si la première condition n'est pas satisfaite*".

C'est ce qu'on reconnaît de suite en considérant le cas où le changement de la pression extérieure n'influe pas sur l'équilibre; ce cas se présente lorsque $P_{\prime\prime} = P_{\prime}$, car alors:

$$\frac{C_{\prime\prime}}{C_{\prime}} = \sqrt[P_{\prime}]{\text{Const.}} = \text{Const.},$$

or c'est justement par cette égalité de $P_{\prime\prime}$ et $P_{\prime}$, que le

déplacement de l'équilibre est sans influence sur la pression. Observons que la pression extérieure, dont il s'agit, est celle qui équilibre la pression dans son acception ordinaire en cas dc corps gazeux, et que son augmentation revient par conséquent à une simple diminution de volume; dans le cas des corps dissous, c'est la pression osmotique dont il s'agit, et l'augmentation revient alors à la diminution de volume qui résulte de l'enlèvement de dissolvant, et non de la compression de ce dernier. Cet enlèvement n'influera donc pas sur l'équilibre, si la pression osmotique des deux systèmes est égale.

2. Il y a ensuite coïncidence complète avec l'énoncé général de M. Le Chatelier sur l'équilibre chimique [1]):

„*L'équilibre se déplace, par une augmentation de la pression, du côté du système à pression inférieure*".

Supposons en effet $P_{,} > P_{,,}$, et écrivons la relation obtenue dans la forme suivante:

$$\left(\frac{C_{,,}}{C_{,}}\right)^{P_{,,}} = C_{,}^{\,P_{,} - P_{,,}} \text{Const.}$$

On voit alors que, si la pression et par conséquent la concentration augmente, $\frac{C_{,,}}{C_{,}}$ augmentera aussi, c'est-à-dire que le second système à la pression inférieure $P_{,,}$ grandira aux dépens du premier.

3. Il y a une troisième observation à ajouter. Lorsqu'il s'agit de corps dissous, les pressions $P_{,}$ et $P_{,,}$ mesurent l'attraction qu'exerce sur le dissolvant la même quantité de matière dissoute dans les deux formes appelées premier et second système. Par conséquent, la relation obtenue indique que le déplacement de l'équilibre dans l'état dissous, lorsqu'on fait varier la quantité du dissolvant, dépend, comme on devait s'y attendre, de l'attraction qu'exerce sur ce dissolvant la matière dissoute dans ses deux formes, de sorte que l'*addition de*

[1]) *Comptes rendus*, XCIX, 786.

dissolvant tournera au profit de celui des deux systèmes dont l'attraction osmotique est supérieure. Cela résulte de ce qui vient d'être démontré, que la diminution de pression augmente le système à pression supérieure.

VI. Loi de l'équilibre à température variable dans l'état dilué.

Il y a une grande simplicité dans l'expression qui résume l'influence de la température sur les équilibres hétérogènes et homogènes dans l'état dilué gazeux ou dissous. En effet, la loi de l'équilibre à température constante étant représentée, comme nous l'avons vu, par l'expression

$$\frac{C_{\prime\prime}^{\Sigma a_{\prime\prime} i_{\prime\prime}}}{C_{\prime}^{\Sigma a_{\prime} i_{\prime}}} = K,$$

qui reçoit pour l'état gazeux la forme simplifiée connue :

$$\frac{C_{\prime\prime}^{a_{\prime\prime}}}{C_{\prime}^{a_{\prime}}} = K,$$

la température n'affecte que la grandeur K, et elle le fait, n'importe le cas que l'on considère, d'après la relation suivante :

$$\frac{d.\,l.\,K}{d.\,T} = \frac{q}{2\,T^2},$$

dans laquelle q indique la chaleur dégagée, si à volume constant la quantité moléculaire en kilogrammes du second système se transforme dans le premier.

Cette relation se déduit de la manière suivante, tant pour l'état gazeux que dissous, et pour l'équilibre hétérogène et homogène :

Supposons un équilibre entre $(1 - x)$ quantités moléculaires en kilogrammes du premier et x du second système, le volume étant V et la température T, et effectuons un cycle de

transformations réversibles de la manière ordinaire, qui a été décrite p. 245; on obtient alors la relation (5):

$$A \left(\frac{\delta. P}{\delta. T}\right)_V = \frac{1}{T} \left(\frac{\delta. Q}{\delta. V}\right)_T$$

Il s'agit d'abord d'établir la relation entre les quantités de chaleur représentées par $\left(\frac{\delta. Q}{\delta. V}\right)_T$ et par q; la première est celle qui est absorbée si à la température T le volume qu'occupe la matière augmente d'une unité, tandis que q indique la chaleur absorbée si la quantité moléculaire du premier système se transforme à T dans le second, sans qu'il y ait de travail extérieur effectué. Donc, en diminuant $\left(\frac{\delta. Q}{\delta. V}\right)_T$ du travail extérieur, exprimé en calories, qui a été effectué dans l'augmentation de volume en question, c'est-à-dire de $A\,P$ (P étant la pression du mélange gazeux), on obtient la valeur q, ayant rapport à la quantité formée du second système pendant le changement de volume opéré, c'est-à-dire à $\left(\frac{\delta. x}{\delta. V}\right)_T$; par conséquent:

$$q \left(\frac{\delta. x}{\delta. V}\right)_T = \left(\frac{\delta. Q}{\delta. V}\right)_T - A\,P = A \left\{ T \left(\frac{\delta. P}{\delta. T}\right)_V - P \right\} =$$

$$= A\,T^2 \left(\frac{\delta. \frac{P}{T}}{\delta. T}\right)_V .$$

On introduit maintenant la relation entre la pression, le volume, la température, x et les nombres de molécules $n_{\prime}$ et $n_{\prime\prime}$ qui sont nécessaires dans la transformation du premier et du second système:

$$P\,V = R\,T \left\{ n_{\prime} (1 - x) + n_{\prime\prime}\,x \right\}, \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

d'où résulte:

$$\frac{P}{T} = \frac{R}{V} \left\{ n_{\prime} + x (n_{\prime\prime} - n_{\prime}) \right\} \text{ et } \left(\frac{\delta. \frac{P}{T}}{\delta. T}\right)_V = \frac{R}{V} (n_{\prime\prime} - n_{\prime}) \left(\frac{\delta. x}{\delta. T}\right)_V ,$$

ce qui conduit, par substitution dans la première relation, à:

$$q \left(\frac{\delta.\ x}{\delta.\ V}\right)_T = \frac{A\ R\ T^2}{V} (n_{\prime\prime} - n_\prime) \left(\frac{\delta.\ x}{\delta.\ T}\right)_V .$$

Il reste à éliminer x à l'aide de la loi d'équilibre à température constante:

$$\frac{C_{\prime\prime}^{\ n_{\prime\prime}}}{C_\prime^{\ n_\prime}} = K \text{ ou } \frac{\left(\frac{x}{V}\right)^{n_{\prime\prime}}}{\left(\frac{1-x}{V}\right)^{n_\prime}} = K, \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

d'où l'on déduit:

$$l.\ K + (n_{\prime\prime} - n_\prime)\ l.\ V = n_{\prime\prime}\ l.\ x - n_\prime\ l.\ (1 - x),$$

ce qui donne:

$$\left(\frac{\delta.\ x}{\delta.\ V}\right)_T = \frac{n_{\prime\prime} - n_\prime}{V\left(\frac{n_{\prime\prime}}{x} + \frac{n_\prime}{1-x}\right)} \text{ et } \left(\frac{\delta.\ x}{\delta.\ T}\right)_V = \frac{\frac{d.\ l.\ k}{d.\ T}}{\frac{n_{\prime\prime}}{x} + \frac{n_\prime}{1-x}};$$

en substituant ces valeurs, on obtient:

$$\frac{d.\ l.\ K}{d.\ T} = \frac{q}{A\ R\ T^2} = \frac{q}{2\ T^2} \quad (A = 1/423{,}55\ ,\ R = 845{,}05).$$

Voilà pour ce qui regarde les équilibres homogènes gazeux. S'il s'agit de l'équilibre hétérogène, comme p. e. de la décomposition partielle du calcaire chauffé, on peut observer que les équations (1) et (2) restent les mêmes, avec cette seule différence que $n_{\prime\prime}$ et $n_\prime$ ont rapport aux corps gazeux seulement; or, comme $n_{\prime\prime}$ et $n_\prime$ disparaissent dans l'expression finale, cette différence dans la signification de $n_{\prime\prime}$ et $n_\prime$ la laisse inaltérée.

Une observation analogue peut servir dans le cas des dissolutions; les équations (1) et (2) deviennent alors:

$$P\ V = R\ T\ \{ (1 - x)\ \Sigma\ a_\prime i_\prime + x\ \Sigma\ a_{\prime\prime}\ i_{\prime\prime} \}$$

et

$$\frac{\left(\frac{x}{V}\right)^{\Sigma a_{,,} i_{,,}}}{\left(\frac{1-x}{V}\right)^{\Sigma a_{,} i_{,}}} = K;$$

dans ce cas, $n_{,}$ et $n_{,,}$ sont donc remplacés respectivement pa $\Sigma a_{,} i_{,}$ et $\Sigma a_{,,} i_{,,}$. Il est clair que cela n'influera pas non plus sur le résultat final, où $n_{,}$ et $n_{,,}$ ont disparu.

VII. Détermination de la grandeur *i* pour les corps dissous dans l'eau.

Maintenant que les lois de l'équilibre dans l'état dilué ont été ramenées à une forme bien simple:

$$\frac{C_{,,}^{\Sigma a_{,,} i_{,,}}}{C_{,}^{\Sigma a_{,} i_{,}}} = K \text{ et } \frac{d.\,l.\,K}{d.\,T} = \frac{q}{2\,T^2},$$

il reste encore à déterminer les valeurs de la grandeur *i*.

Nous avons observé que pour les corps gazeux cette grandeur est égale à l'unité. Le chapitre présent sera consacré à la détermination de cette grandeur pour les solutions aqueuses, et l'on se servira à cet effet de quatre méthodes différentes, dont les résultats seront énumérés ensuite:

1ère *Méthode.* Détermination de *i* à l'aide de la loi de solubilité des corps gazeux.

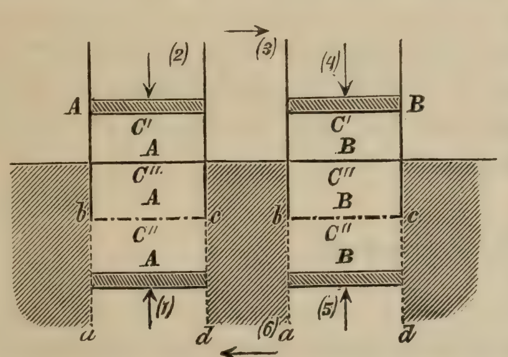
2ième *Méthode.* Détermination de *i* à l'aide de la tension de vapeur.

3ième *Méthode.* Détermination de *i* à l'aide de la pression osmotique.

4ième *Méthode.* Détermination de *i* à l'aide des points de congélation.

1. *Détermination de i à l'aide de la loi de solubilité des corps gazeux. La valeur de i est égale à l'unité pour les gaz dissous qui suivent la loi de Henry.*

On sait que, pour les gaz solubles dans l'eau, comme l'oxygène p. e., une certaine concentration dans l'état gazeux, soit $C_{,}$, correspond à une certaine concentration, soit $C_{,,}$, de la solution aqueuse à une température donnée. Or, d'après la thermodynamique, cette relation est en rapport intime avec la valeur de i pour l'oxygène dissous. Supposons, afin de le démontrer, deux cuvettes cylindriques A et B, remplies en partie d'oxygène et en partie d'une solution aqueuse de ce corps, dont les concentrations respectives sont indiquées par la figure; les parois bc sont supposées perméables pour l'oxygène seulement, les parois ab et cd pour l'eau; les cuvettes sont plongées dans l'eau. On opère maintenant le cycle suivant de transformations réversibles à température constante T. Le piston (1), sur lequel s'exerce la pression osmotique de l'oxygène dissous à concentration C''_A, s'élève, l'eau traverse les parois ab et cd, l'oxygène traverse bc; en même temps le piston (2) s'élève, et les deux mouvements simultanés se produisent de manière à laisser constantes C''_A et C'_A jusqu'à ce que la quantité moléculaire, soit 32 kilogrammes d'oxygène, soit déplacée. C'est alors qu'on produit avec cette quantité le changement de volume nécessaire (3) pour y établir la concentration C'_B; ensuite, une descente simultanée des pistons (4) et (5) fait rentrer l'oxygène en solution à concentration C''_B, et enfin un changement de volume (6) produit la concentration initiale C''_A. Des raisonnements identiques à ceux qu'on trouve p. 260—261 montrent que, la somme des travaux extérieurs étant égale à zéro, on obtient la relation suivante:



$$R\,T\,l.\frac{C'_A}{C'_B} + i\,R\,T\,l.\,\frac{C''_B}{C''_A} = 0\,,$$

ce qui conduit, après division par $R\,T$, comme précédemment, à:

$$\frac{C'}{C^i_{\prime\prime}} = \text{Constante}\,,$$

c'est-à-dire que, pour une température donnée, le rapport entre la concentration du gaz et celle de la solution aqueuse munie de l'exposant i est constante. Or, pour les gaz qui suivent en se dissolvant la loi de Henry, on a:

$$\frac{C_\prime}{C_{\prime\prime}} = \text{Constante}\,,$$

c'est-à-dire $i = 1$; par conséquent la valeur de i est égale à l'unité pour les solutions des corps gazeux qui obéissent à la loi de Henry.

2. *Détermination de i à l'aide de la tension de vapeur. La valeur de i est égale à* 5,6 *fois le poids moléculaire* (*m*) *du corps multiplié par la partie* (Δ) *dont sa présence* (1 : 100) *diminue la tension de vapeur de l'eau*: $i = 5{,}6\,m\,\Delta$.

La relation indiquée découle d'un cycle de transformations réversibles, effectué à température constante T et dans lequel on enlève d'abord à une solution (1 : 100) 18 kilogrammes d'eau sous forme de vapeur, qu'on comprime ensuite jusqu'à condensation complète, pour les faire rentrer enfin dans la solution à travers une paroi semi-perméable.

Le travail absorbé pendant la séparation de l'eau doit alors être égal à celui que produit sa rentrée dans la solution. Le travail dont il s'est agi d'abord revient à:

$$R\,T\,l.\,\frac{1}{1-\Delta}$$

vu que $\frac{1}{1-\Delta}$ est le rapport des tensions de l'eau et de la solution. Or, comme la valeur de Δ ne surpasse guère 0,006, on peut substituer à l'expression précédente celle qui suit:

$$R\,T\,\Delta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Le travail qu'effectue la rentrée de l'eau est égal au produit de son volume en mètres cubes et de la pression osmotique P par mètre carré en kilogrammes, soit:

$$\frac{18}{1000\,s}\;P$$

où s est le poids spécifique de l'eau, tandis que la valeur de P dépend de la relation:

$$P = \frac{i\,R\,T}{V},$$

V indiquant le volume de la solution en mètres cubes qui contient la quantité moléculaire (m) en kilogrammes du corps dissous. Observant que la solution dont il s'agit contient 1 kilogramme du corps dissous dans 101 kilogrammes de la solution, ce qui revient à $\frac{0{,}101}{s}$ mètres cubes (en négligeant la différence entre le poids spécifique de l'eau et celui de la solution), le volume V revient à $\frac{0{,}101}{s}$ m, de sorte que le travail qu'effectue la rentrée de l'eau devient:

$$\frac{18}{1000\,s}\;\frac{i\,R\,T\,s}{0{,}101\,\mathrm{m}} = \frac{i\,R\,T}{5{,}6\,\mathrm{m}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Par conséquent on a la relation:

$$\frac{i\,R\,T}{5{,}6\ \mathrm{m}} = R\,T\,\Delta$$

d'où résulte:

$$i = 5{,}6\ \mathrm{m}\ \Delta.$$

3. *Détermination de i à l'aide de la pression osmotique. La valeur de i est égale à la moitié du coëfficient isotonique.*

Comme la valeur de i répond à l'expression:

$$i = \frac{P\,V}{R\,T},$$

et comme R a été trouvé égal à 845, on a:

$$i = \frac{P\,V}{845\,T},$$

où P indique la pression osmotique en kilogrammes par mètre carré, V le volume en mètres cubes dans lequel se trouve la quantité moléculaire en kilogrammes.

Le sucre de canne étant un des corps pour lesquels la pression osmotique est le mieux connue, on calculera pour lui la valeur de i d'après les données de M. Pfeffer [1]), obtenues avec une solution contenant 1 partie de sucre sur 100 parties d'eau, ce qui conduit à:

$$V = \frac{342 \times 101}{1000} = 34{,}54 \; (342 = C_{12}\,H_{22}\,O_{11}).$$

Comme M. Pfeffer indique la pression en millimètres de mercure (p) et la température en degrés Celsius (t), on a:

$$P = \frac{p}{760}\,10333 = 13{,}6\,p \text{ et } T = t + 273,$$

par conséquent:

$$i = \frac{13{,}6\,p \times 34{,}54}{845\,(t + 273)} = \frac{0{,}556\,p}{t + 273}.$$

C'est ainsi qu'on a calculé i d'après les données suivantes:

t	p	$i = \frac{0{,}556\,p}{t + 273.}$
6,8	505	1
13,7	525	1,01
14,2	510	0 99
15,5	520	1
22	548	1,03
32	544	0,99
36	567	1,02

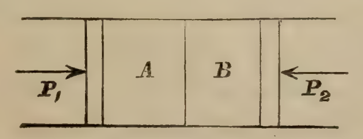
1) *l.c.*, p. 85.

Il en résulte que pour le sucre de canne la valeur de i est égale à l'unité.

Ce résultat devient d'une application étendue en vertu de la comparaison de la pression osmotique du sucre avec celle d'autres corps dissous par voie physiologique. Comme il a été dit, M. de Vries est parvenu à se procurer des solutions dites isotoniques, c'est-à-dire des solutions qui offrent une pression osmotique égale. La relation qui existe entre les concentrations de ces liquides a été exprimée par l'auteur d'une manière très-simple, au moyen du rapport des pressions osmotiques qu'ils pourraient produire à concentration moléculaire, c'est-à-dire s'ils contenaient, sous un même volume, des quantités proportionnelles aux poids moléculaires; cette pression a été exprimée par 2 pour le sucre de canne, et les valeurs obtenues de cette manière ont été appelées les coëfficients isotoniques. Il est clair dès lors que ces coëfficients sont proportionnels à ce que nous avons indiqué par i, et comme cette dernière valeur est égale à l'unité pour le sucre de canne, on entrevoit que i est la moitié des coëfficients isotoniques de M. de Vries, tels qu'ils ont été déterminés par cet auteur et par M. M. Donders et Hamburger.

4. *Détermination de i à l'aide des points de congélation. La valeur de i égale à l'abaissement moléculaire du point de congélation divisé par* 18,5.

D'après la thermodynamique, il est nécessaire que deux solutions offrant le même point de congélation produisent aussi la même pression osmotique. Le cycle suivant de transformations réversibles, effectué au point de congélation, à l'aide de deux solutions différentes, prouve cette nécessité.



On peut transporter à cette température, d'une manière réversible, l'eau de l'une des solutions A dans l'autre sous forme de glace, en la faisant congéler dans l'une et fondre dans l'autre; ensuite le transport en sens opposé peut se produire à travers

une paroi semi-perméable. Or, comme dans le premier changement il n'y a pas de travail effectué, il n'y en aura pas non plus dans le second, ce qui exige que les pressions osmotiques P_1 et P_2 soient égales, vu que le travail dont il s'agit revient à:

$$V(P_1 - P_2),$$

où V est le volume de l'eau déplacée.

Cette observation peut servir au calcul des valeurs de i pour les solutions aqueuses les plus diverses, à l'aide de la détermination de leurs points de congélation, executée par MM. Ruddorff, de Coppet et Raoult. Comme ce sont les recherches de ce dernier auteur qui ont été employées à cet effet, il s'agit de connaître l'expression qu'il a donnée à ses résultats en introduisant ce qu'il appelle l'abaissement moléculaire. Cette grandeur s'obtient en multipliant l'abaissement du point de congélation dans les solutions 1 : 100 par le poids moléculaire du corps dont il s'agit. En admettant la proportionnalité entre l'abaissement du point de congélation et la concentration, il résulte de ce qui précède que l'abaissement moléculaire est en raison directe de la pression osmotique des solutions qui contiennent la quantité moléculaire sous un même volume, et par conséquent en raison directe de la valeur de i.

Pour le sucre de canne, dont l'abaissement moléculaire revient à 18,5, la valeur de i a été trouvé égale à l'unité, ce qui justifie la conclusion que le dit abaissement, divisé par 18,5, donne la valeur de i.

Contrôle mutuel des méthodes employées.

D'après ce qui précède, il y a quatre méthodes pour obtenir la grandeur i, et nous commençons par présenter comme contrôle les cas dans lesquels, pour un même corps, i peut être déterminé à l'aide de deux données différentes. Comme la détermination du point de congélation a été effectuée pour un grand nombre de corps avec une grande précision les

valeurs de i déduites par cette voie serviront de termes de comparaison aux données obtenues par les trois autres méthodes successivement.

1. *Valeurs de i pour les corps qui suivent la loi de Henry.* Il a été prouvé que la valeur de i est égale à l'unité pour les gaz obéissant à la loi de Henry, et en effet M. Raoult trouve pour de pareils corps un abaissement moléculaire peu éloigné de 18,5, c'est-à-dire une valeur de i à peu près égale à l'unité:

Composés.	i d'après la loi de Henry.	i d'après l'abaissement moléculaire.
H_2S	1 environ	1,04
H_3N	1 „	1,03
SO_2	1 „	1,03

Observons que, pour les corps qui n'obéissent du tout à la loi de Henry, comme p. e. HCl et HBr, le point de congélation indique aussi une valeur de i bien différente de l'unité, savoir 1,98 et 2,03 dans les deux cas.

2. *Valeurs de i d'après la diminution de tension.*

Le tableau suivant indique les valeurs de i obtenues à l'aide de la diminution de tension (Δ) de la solution 1 : 100 des corps dont le poids moléculaire est m, d'après la relation $i = 5{,}6\, m\, \Delta$; à côté l'on a inscrit les valeurs de i que donne l'abaissement moléculaire; les données ont été obtenues par M. Raoult [1]), à l'exception de celles où il sera indiqué autrement:

[1]) *Comptes rendus*, LXXXVII, 167.

Composés.	Δ	$i = 5,6\, m\, \Delta$	i d'après l'abaissement moléculaire.
$Cl\,Na$	0,00604	1,98	1.89
$Cl\,K$	0,0045	1,88	1,82
$Cl\,NH_4$	0,00565	1,70	1,88
$Br\,K$	0,0031	2,07	1,90
$I\,K$	0,00225	2,09	1,90
$Hg\,Cl_2$	0,00087	1,22	1,11
$Hg\,Cy_2$	0,00058	0,87	0,95
$NO_3\,Na$	0,0038	1,81	1,82
$NO_3\,K$	0,0028	1,59	1,66
$NO_3\,NH_4$	0,00361	1,63	1,73
$NO_3\,Ag$	0,0016	1,54	1,60
$(NO_3)_2\,Ba$	0,00137	2,01	2,19
$(NO_3)_2\,Pb$	0,0011	2,05	2,02
$Cl\,O_3\,K$	0,0024	1,65	1,78
$SO_4\,Na_2$	0,00236 [1]	1,88	1,91
$SO_4\,K_2$	0,00201	1,97	2,11
$SO_4\,Zn$	0,00125 [2]	1,12	0,98
$SO_4\,Ca$	0,00114 [2]	1,02	0,98
$Cr\,O_4\,K_2$	0,00213	2,33	2,10

3. *Valeurs de i d'après les coëfficients isotoniques.*

Le tableau suivant contient les valeurs dont il s'agit; les coëfficients isotoniques ont été déterminés par M. de Vries, sauf où il a été indiqué autrement:

---

[1]) Wüllner, Jahresberichte, 1858, 46.

[2]) Helmholtz et Moser, *Berl. Acad. Ber.* 1878, 1868; 1877, 674 et 713.

Composés.	i d'après le coëfficient isotonique.	i d'après l'abaissement moléculaire.
Sucre de canne	1	1
„ interverti	1	1,04
Acide malique	1,05	1
„ tartrique	1,07	1,05
„ citrique	1,07	1,04
$Cl\,Na$	1,60 et 1,76 [1])	1,89
$Cl\,K$	1,60	1,82
$Cl\,NH_4$	1,60	1,88
$Br\,K$	1,77 [1])	1,90
$I\,K$	1,76 [1])	1,90
$NO_3\,Na$	1,60	1,82
$NO_3\,K$	1,76 [1])	1,66
$C_2\,H_3\,O_2\,K$	1,60 et 1,66 [1])	1,86
Citrate $C_6\,H_7\,K\,O_7$	1,60	1,45 ($C_6H_7NaO_7$)
„ $C_6\,H_6\,K_2\,O_7$	2,17	2,06($C_6H_6Na_2O_7$)
„ $C_6\,H_5\,K_3\,O_7$	2,66	2,60($C_3H_7Na_3O_7$)
$C_2\,O_4\,K_2$	2,09 et 2,36 [1])	2,43
$SO_4\,K_2$	2,08 et 2,73 [1])	2,11
$PO_4\,K_2H$	2,10	2 ($PO_4\,Na_2\,H$)
Tartrate $C_4H_4K_2O_6$	2,11	1,96
Malate $C_4H_4\,Mg\,O_5$	1	1,04
$Mg\,SO_4$	1,04	1,04
$Mg\,Cl_2$	2.30 et 2,24 [1])	2,64
$Ca\,Cl_2$	2,30	2,52
$Ba\,Cl_2$	2,34 [1])	2,62

En vue des applications, il m'a paru que les valeurs de i obtenues à l'aide du point de congélation méritent une première place; d'une part cette méthode présente une grande exactitude, d'autre part elle a été appliquée à un grand

[1]) Donders et Hamburger. *l.c.*

nombre de composés. Nous réunissons ces valeurs, en tant qu'il en sera fait usage, dans le tableau suivant:

Valeurs de i pour les solutions aqueuses.

Acides.		Carbonates.	
NO_3H	1,94	CO_3K_2	2,26
ClH	1,98	CO_3Na_2	2,18
$C_2O_4H_2$	1,25	$(CO_3H)_2Ba$	2,66
$C_6H_5.CO_2H$	0,93	$(CO_3H)_2Ca$	2,56
H_2S	1,04	$(CO_3H)_2Mg$	2,64
CO_2	1	Sulfates.	
BO_3H_3	1,11	SO_4K_2	2,11
Bases.		SO_4Na_2	1,91
BaO_2H_2	2,69	SO_4Zn	0,98
CaO_2H_2	2,59	$K_2Al_2(SO_4)_4$	4,45
$C_6H_5NH_2$	0,83	SO_4NaH	1,88
Chlorures.		SO_4Ca	1,04
$CaCl_2$	2,52	SO_4Hg	0,98
$HgCl_2$	1,11	Corps organ. etc.	
$ZnCl_2$	2,53	C_6H_5OH	0,84
Nitrates.		$C_5H_{11}OH$	0,93
NO_3Na	1,82	$C_6H_{14}O_6$	0,97
N_2O_6Ba	2,19	C_2O_4KH	1,84
N_2O_6Ca	2,02	$Cr_2O_7K_2$	2,36
		ClO_3K	1,78
		$B_4O_7Na_2$	3,57

Observons enfin que quelques-unes des valeurs de i ont été déterminées par analogie, et qu'il est nécessaire d'indiquer ici les raissonnements qui ont servi dans ces cas et qui ont été appliqués avec succès par M. de Vries au calcul des coëfficients isotoniques, et par M. Raoult à celui des abaissements moléculaires; voici ces valeurs, avec celles qui ont servi à les déterminer:

Pour $Ba(CHO_3)_2$ on a admis 2,66, parce que $Ba(CHO_2)_2 =$ 2,65 et $Ba(C_2H_3O_2)_2 = 2{,}66$;

„ Mg „ on a admis 2,64, parce que $Mg(C_2H_3O_2)_2 =$ 2.64;

„ Ca „ on a admis 2,56, parce que $Ba(CHO_3)_2$ est 2,66 et qu'il y a entre Ca et Ba une différence de 0,1 pour le chlorure et pour l'oxyde;

„ $C_2H_4(CO_2H)_2$ on a admis 1, comme pour l'acide malique;

„ $C_6H_5(CO_2H)$ et $C_5H_{12}O$ on a admis 0,93, comme pour la salicine et les alcools méthylique, éthylique et butylique;

„ $CaSO_4$ on a admis 1,04, comme pour $MgSO_4$;

„ $HgSO_4$ „ „ „ 0,98, „ „ $ZnSO_4$ et $CuSO_4$.

VIII. Applications. Equilibre dans les solutions aqueuses.

A. Equilibre à température constante.

La relation qui a été obtenue:

$$\frac{C_{\prime\prime}^{\Sigma a_{\prime\prime} i_{\prime\prime}}}{C_{\prime}^{\Sigma a_{\prime} i_{\prime}}} = K \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

peut être appliquée maintenant que l'on connaît les valeurs nécessaires de i pour la plupart des corps.

Seulement, il faut encore étendre cette équation au cas où les différents corps sont présents dans l'équilibre en rapport quelconque; en effet, l'équation obtenue ne s'applique qu'au cas où le rapport des différents corps est aussi celui dans lequel ils se transforment. Or cette extension se fera d'une manière analogue à celle qui a permis d'établir la relation primitive.

Supposons, pour éviter une complication superflue, un équilibre entre quatre corps, exprimé par le symbole suivant:

$$a_1 M_1 + a_2 M_2 \rightleftarrows a_3 M_3 + a_4 M_4 ,$$

les concentrations respectives étant C_1 C_2 C_3 et C_4 ; on peut effectuer alors le cycle réversible qui a conduit à l'équation [1]) et l'on obtiendra, d'une manière absolument analogue:

$$\frac{C_3^{a_3 i_3} \; C_4^{a_4 i_4}}{C_1^{a_1 i_1} \; C_2^{a_2 i_2}} = K, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

relation qui revient à celle établie primitivement lorsqu'on y introduit, ce qui était sous-entendu:

$$C_1 = C_2 \text{ et } C_3 = C_4.$$

Avant d'appliquer la relation en question; il me paraît nécessaire d'indiquer sous quel rapport elle diffère de celle qu'ont obtenue MM. Guldberg et Waage [1]); dans l'exposition la plus récente de leur théorie, ces auteurs admettent pour les solutions aqueuses la même relation que pour l'état gazeux, par conséquent:

$$\frac{C_{''}^{n_{''}}}{C_{'}^{n_{'}}} = K, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1^a)$$

ou, lorsqu'il s'agit de concentrations différentes pour les corps qui jouent un rôle dans l'équilibre:

$$\frac{C_3^{a_3} \; C_4^{a_4}}{C_1^{a_1} \; C_2^{a_2}} = K, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2^a)$$

c'est-à-dire que chaque concentration est affectée d'un exposant, égal au nombre de molécules par lequel ce corps participe à la transformation, nombre qui est souvent égal à

[1]) *Journal f. pr. Chem.* (2) XIX, 69.

l'unité, ce qui donne à la relation la forme simple que voici:

$$\frac{C_3 \, C_4}{C_1 \, C_2} = K.$$

Ajoutons que cette forme simple ne s'est pas présentée d'emblée à MM. Guldberg et Waage, mais que d'abord ils ont supposé l'exposant déterminé par la nature spécifique du corps dont il s'agit; seulement les expériences qu'ils ont exécutées amenèrent la simplification introduite.

Or, récemment, M. Lemoine [1]) a pris la défense de la supposition primitive de MM. Guldberg et Waage, en se fondant principalement sur les observations relatives à la solubilité du carbonate de chaux dans l'eau saturée d'acide carbonique à pressions différentes [2]); ce phénomène en effet ne s'exprime pas à l'aide des exposants simples, qui viennent d'être rappelés.

En vue de ces deux opinions contraires la théorie exposée dans ces pages me paraît d'abord présenter l'avantage de reposer sur une base aussi solide que les principes de la thermodynamique. Ensuite l'on verra découler de cette théorie, pour les cas étudiés par MM. Guldberg et Waage, l'expression simplifiée soutenue par ces auteurs. D'autre part, dans le phénomène qui a engagé M. Lemoine à s'écarter des expressions simples, on verra que cette simplification en effet ne se présente plus, et même que la relation obtenue dans ce cas par M. Schloesing résulte aussi de notre théorie.

1. Commençons par les *expériences de MM. Guldberg et Waage.* Les auteurs ont d'abord fixé leur attention sur l'équilibre qui se traduit par le symbole: [3])

$$CO_3 \, Ba + SO_4 \, K_2 \rightleftarrows SO_4 \, Ba + CO_3 \, K_2 \, ,$$

[1]) *Études sur les équilibres chimiques*, p. 266.

[2]) Schloesing, *Comptes rendus* LXXIV, 1552; LXXV, 70.

[3]) *Études sur les affinités chimiques*, p. 58.

et, si l'on indique les concentrations de CO_3K_2 et de SO_4K_2 par $C_{CO_3K_2}$ et $C_{SO_4K_2}$, ils trouvent que cet équilibre satisfait à la relation:

$$\frac{C_{CO_3K_2}}{C_{SO_4K_2}} = \text{Constante}.$$

Or, dans ce cas, notre théorie donne en effet un résultat très-analogue, en admettant $i_{SO_4K_2} = 2{,}11$ et $i_{CO_3K_2} = 2{,}26$:

$$\frac{C_{CO_3K_2}^{2,26}}{C_{SO_4K_2}^{2,11}} = K \quad \text{d'où} \quad \frac{C_{CO_3K_2}^{1,07}}{C_{SO_4K_2}} = \text{Constante}\cdot$$

Il y a qar conséquent presque identité dans le résultat, et, si l'on y regarde de plus près, il paraît même que la dernière relation est plus conforme aux expériences. Calculons en effet les constantes d'après les deux expressions. MM. Guldberg et Waage ont mis en présence:

$$Ba\,SO_4 + Q\,CO_3\,K_2 + Q_1\,SO_4\,K_2 + 500\,H_2O$$

et trouvent dans l'état final:

$$(1-x)BaSO_4 + (Q-x)CO_3K_2 + (Q_1+x)SO_4K_2 + 500H_2O\,;$$

par conséquent, les deux relations reviennent à:

$$\frac{Q-x}{Q_1+x} = \text{Constante} \quad \text{et} \quad \frac{(Q-x)^{1,07}}{Q_1+x} = \text{Constante}.$$

Voici le résultat:

Q	Q_1	x	$\frac{Q-x}{Q_1+x}$	$\frac{(Q-x)^{1,07}}{Q_1+x}$
3,5	0	0,719	3,87	4,16
2,5	0	0,5	4	4,20
2	0	0,395	4,07	4,20
1	0	0,176	4,68	4,62
2	0,25	0,2	4	4,17
2,5	0,25	0,3	4	4,23
3	0,25	0,408	3,94	4,21
3,8	0,25	0,593	3,80	4,13
2	0,5	0	4	4,20

Des expériences analogues ont été exécutées avec les sels de soude concernant l'équilibre:

$$CO_3\,Ba + SO_4\,Na_2 \rightleftarrows SO_4\,Ba + CO_3\,Na_2\,;$$

l'expression des auteurs est:

$$\frac{C_{CO_3\,Na_2}}{C_{SO_4\,Na_2}} = \text{Constante}$$

tandis que de la théorie exposée découle ($i_{SO_4 Na_2} = 1{,}91$, $i_{CO_3 Na_2} = 2{,}18$):

$$\frac{C^{1,14}_{CO_3\,Na_2}}{C_{SO_4\,Na_2}} = \text{Constante}\,;$$

il y a de nouveau des exposants presque égaux aux nombres de molécules.

2. Il en est autrement, sous ce rapport, pour le cas de *solubilité du carbonate de baryte et de chaux dans l'eau en présence de l'acide carbonique*, phénomène étudié par M. Schloesing, qui résume ses résultats dans les expressions suivantes:

$x^{0,38045} = k\,y$ pour le carbonate de baryte

$x^{0,37866} = k\,y$ » » » » »

x étant la pression de l'acide carbonique, y la quantité de carbonate dissous dans un volume déterminé d'eau, k une constante.

En admettant l'opinion reçue, que les carbonates se dissolvent dans ces conditions sous forme de bicarbonate, on a, pour la baryte p. e., le symbole d'équilibre que voici:

$$CO_3\,Ba + CO_2 + H_2O \rightleftarrows (CO_3\,H)_2\,Ba$$
$$(i_{CO_2} = 1\,,\quad i_{(CO_3 H)_2 Ba} = 2{,}66)\,,$$

d'où résulte la relation:

$$\frac{C^{2,66}_{(CO_3\,H)_2 Ba}}{C_{(CO_2)}} = K\,,$$

donc:
$$\frac{C_{(CO_3H)_2Ba}}{C_{(CO_2)}^{0,376}} = \text{Const.}$$

or, comme $C_{(CO_2)}$ est en proportion directe de la pression de l'acide carbonique x, nous obtenons en substituant y à $C_{(CO_3H)_2Ba}$:

$$x^{0,376} = k\,y$$

résultat qui offre avec la valeur ci-desus une coïncidence frappante; tandis que pour le calcaire on obtient de la même manière en admettant $i_{(CO_3H)_2Ca} = 2,56$:

$$x^{0,39} = k\,y$$

ce qui est encore assez rapproché de la relation trouvée.

Il est prouvé par là que la théorie exposéee s'applique également, d'une part aux phénomènes qui ont conduit MM. Guldberg et Waage à admettre les exposants simples, dépendant seulement du nombre de molécules, et d'autre part aux phénomènes qui ont amené M. Lemoine à introduire des exposants complexes, dépendant de la nature du corps.

Il nous reste maintenant à fixer l'attention sur les recherches qui, depuis, ont servi à établir les lois d'équilibre dans les solutions diluées.

1. Il y a d'abord les *recherches thermiques de M. Thomsen* [1]) *sur l'équilibre qui s'établit quand on ajoute l'acide sulfurique à la solution diluée du nitrate de soude;* l'auteur y voit une justification de la théorie de MM. Guldberg et Waage; or c'est là encore un des cas où cette théorie coïncide avec les conséquences de ce qui précède.

Supposons que l'équilibre réalisé s'exprime par le symbole:

$$Na_2SO_4 + HNO_3 \rightleftarrows NaHSO_4 + NaNO_3\,;$$

[1]) *Thermochemische Untersuchungen*, I, p. 119.

selon MM. Guldberg et Waage on a alors:

$$\frac{C_{Na\,HSO_4}\;C_{Na\,NO_3}}{C_{Na_2\,SO_4}\;C_{H\,NO_3}} = \text{Constante},$$

et d'après nous on obtient, en admmettant $i_{NaHSO_4} = 1{,}88$, $i_{NaNO_3} = 1{,}82$, $i_{Na_2\,SO_4} = 1{,}91$, $i_{HNO_3} = 1{,}94$:

$$\frac{C_{Na\,HSO_4}^{\;1,88}\;C_{Na\,NO_3}^{\;1,82}}{C_{Na_2\,SO_4}^{\;1,91}\;C_{H\,NO_3}^{\;1,94}} = K,$$

par conséquent:

$$\frac{C_{Na\,HSO_4}^{\;1,03}\;C_{Na\,NO_3}}{C_{Na_2\,SO_4}^{\;1,05}\;C_{H\,NO_3}^{\;1,05}} = \text{Constante},$$

ce qui ne s'éloigne que peu de la relation précédente.

Lorsqu'on suppose que l'équilibre répond à:

$$Na_2\,SO_4 + 2\,H\,NO_3 \rightleftarrows A_2\,SO_4 + 2\,Na\,NO_3$$

il y a le même rapprochement, si l'on observe que pour H_2SO_4 la valeur de i est 2,06.

2. Il y a ensuite les *recherches de M. Ostwald* [1]) *concernant l'équilibre qui s'établit lorsqu'on ajoute au sulfure de zinc les acides chlorhydrique et sulfurique*, équilibre qui s'exprime, dans le premier cas, par le symbole:

$$Zn\,S + 2\,H\,Cl \rightleftarrows H_2\,S + Zn\,Cl_2.$$

M. Ostwald détermina l'hydrogène sulfuré formé, et par conséquent la quantité d'acide chlorhydrique inaltéré, qu'il indiqua par $1 - x$, en prenant pour unité la quantité primitivement ajoutée. Ces expériences furent exécutées avec des liqueurs contenant 36,36 grammes H Cl sur V litres, et don-

[1]) *Journal für pr. Chemie*, XIX, p. 480.

nèrent les résultats suivants:

V	x
$V = 1$	$x = 0{,}0411$
2	0,038
4	0,0345
8	0,0317

Or notre théorie indique pour ce cas, en admettant $i_{H\,Cl} = 1{,}93$; $i_{H_2\,S} = 1{,}04$; $i_{Zn\,Cl_2} = 2{,}03$, la relation :

$$\frac{C_{H_2\,S}^{1{,}04} \; C_{Zn\,Cl_2}^{2{,}53}}{C_{H\,Cl}^{3{,}96}} = K,$$

par conséquent :

$$\left(\frac{x}{V}\right)^{3{,}57} = \text{const.} \left(\frac{1-x}{V}\right)^{3{,}96},$$

ou :

$$\frac{x}{(1-x)^{1{,}11}} \quad V^{0{,}11} = \text{const.},$$

tandis que les expériences citées répondent à la relation :

$$\frac{x}{(1-x)^{1{,}11}} \quad V^{0{,}13} = \text{const.},$$

La théorie de MM. Guldberg et Waage donne l'équation suivante :

$$\frac{C_{H_2\,S}\, C_{Zn\,Cl_2}}{C_{H\,Cl}} = K,$$

par conséquent $\frac{x^2}{(1-x)^2} = \text{const.}$, d'où x = constante. A cette théorie échappe donc l'influence du volume, qui résulte de la nôtre et que traduisent les expériences.

Pour le cas analogue avec l'acide sulfurique :

$$Zn\,S + H_2\,S\,O_4 \rightleftarrows H_2\,S + S\,O_4\,Zn\,,$$

on a trouvé :

$V = 2$	$x = 2{,}38$
4	2,37
8	2,40
16	2,41

la théorie indique ($i_{SO_4H_2} = 2{,}06$) :

$$\frac{C_{H_2S}^{1,04}\;C_{ZnSO_4}^{0,98}}{C_{H_2SO_4}^{2,06}} = K\,,$$

par conséquent :

$$\left(\frac{x}{V}\right)^{2,02} = \text{const.}\left(\frac{1-x}{V}\right)^{2,06}\,,$$

ou :

$$\frac{x}{(1-x)^{1,02}}\quad V^{0,02} = \text{const.}$$

Comme on le voit, l'influence du volume doit être très-petite dans ce cas ; en effet, les expériences indiquent qu'elle n'est pas sensible.

D'après MM. Guldberg et Waage l'on aurait :

$$\frac{C_{H_2S}\;C_{SO_4Zn}}{C_{H_2SO_4}} = K\,,$$

par conséquent :

$$\frac{x^2}{(1-x)\;V} = \text{constante},$$

c'est-à-dire que, d'après leur théorie, le volume aurait une influence très-marquée.

3. Nous avons ensuite les expériences analogues de M. Ostwald [1]) relatives à *l'équilibre qui s'établit dans l'action de l'oxalate de chaux sur divers acides.* Avant d'entrer dans les détails, je ferai observer qu'il me paraît que ce cas, simple au premier abord, entraîne dans son étude plusieurs complications, parmi lesquelles je cite le rôle que peuvent jouer la formation d'oxalate acide et la solubilité dans l'eau de l'oxalate étudié. C'est probablement à cause de cela que les lignes représentant la relation entre l'oxalate décomposé (x) et le volume (V) occupé par la quantité moléculaire de l'acide offrent en général une double courbure; il y a d'abord, lorsque les valeurs de V ne sont pas trop élevées, selon le cas dont il s'agit, une diminution ou une augmentation très-frappante de x accompagnant l'augmentation de V; mais, au-delà, il y a partout dans x une tendance marquée à augmenter avec V. On verra que ce premier phénomène, qui paraît de nature spécifique, parce qu'il est différent selon le cas étudié, rentre dans notre théorie, dont le résultat peut recevoir dans les différents cas la forme suivante:

$$\frac{x}{(1-x)^{1+b}} V^{b} = \text{Constante.}$$

Les valeurs de b ont été déterminées de la manière suivante dans un exemple spécial:

$$C_2\,O_4\,Ca + 2\,NO_3\,\mathrm{H} \rightleftarrows C_2\,O_4\,H_2 + Ca\,N_2\,O_6.$$

On obtient, en admettant $i_{C_2O_4H_2} = 1{,}25$, $i_{NO_3H} = 1{,}94$, $i_{CaN_2O_6} = 2{,}02$:

$$\frac{C_{C_2O_4H_2}^{\;1,25}\; C_{CaN_2O_6}^{\;2,02}}{C_{NO_3H}^{\;3,88}} = K,$$

ce qui conduit à:

$$\left(\frac{x}{V}\right)^{3,27} = K\left(\frac{1-x}{V}\right)^{3,88}, \text{ donc } \frac{x}{(1-x)^{1,18}} V^{0,18} = \text{Const},$$

par conséquent $b = 0{,}18$.

[1]) *Journal für pr. Chemie*, (2) XXIII, 517.

Pour comparer l'expérience avec le calcul, je citerai les valeurs de x qui corrrespondent aux valeurs extrêmes de V à 0° :

Acide.	V.	x.	b.
NO_3H	0,2 8	0,0833 0,0512	+ 0,18
HCl	0,2 8	0,0517 0,049	+ 0,06
H_2SO_4	2 16	0,035 0,0457	— 0,1

On constate ici un rapprochement assez frappant, quoique de nature qualitative seulement. En effet, chez les acides nitrique et chlorhydrique, b ayant une valeur positive, on voit diminuer x à mesure que V s'accroît, tandis que pour l'acide sulfurique, b étant négatif, le contraire a lieu; il y a plus, la diminution dont il s'agit est la plus marquée chez l'acide nitrique, où la valeur de b est bien supérieure aussi. Ces particularités échappent à la théorie de MM. Guldberg et Waage.

4. Il y a ensuite les recherches de M. Engel [1]) sur la *solubilité du carbonate de magnésie* (y) *dans l'eau saturée d'acide carbonique à pression* (x) *donnée*, recherches dont il exprime le résultat par la relation suivante:

$$x^{0,37} = k\,y.$$

On obtient pour ce cas, d'après notre théorie, en admettant $i_{CO_2} = 1$, $i_{Mg(CO_3H)_2} = 2,64$:

$$\frac{C_{Mg(CO_3H)_2}^{2,64}}{C_{CO_2}} = K,$$

[1]) *Comptes rendus*. C, 352, 444.

par conséquent :

$$x^{0,379} = k\ y.$$

MM. Guldberg et Waage obtiendraient $x = k\,y$.

5. Enfin il y a les recherches de M. Le Châtelier [1]) sur l'*équilibre qui s'établit entre le sulfate basique de mercure et l'acide sulfurique* d'après le symbole :

$$Hg_3\ SO_6 + 2\ SO_4\ H_2 \rightleftarrows 3\ SO_4\ Hg + 2H_2O\ ;$$

on obtient ici, d'après notre théorie, en admettant $i_{SO_4H_2} = 2{,}06$, $i_{Hg\,SO_4} = 0{,}98$:

$$\frac{C_{SO_4Hg}^{\ 3 \times 0,98}}{C_{SO_4H_2}^{\ 2 \times 2,06}} = K$$

par conséquent, si avec l'auteur on appelle A la quantité d'acide sulfurique, S celle du sulfate mercurique présent dans un volume donné :

$$A^{\ 1,4} = k\ S,$$

tandis que l'auteur trouve :

$$A^{\ 1,58} = k\,S.$$

En appliquant dans ce cas encore la théorie de MM. Guldberg et Waage, on obtiendrait $A^{\ 0,67} = k\,S$.

En résumé nous avons examiné douze cas d'équilibre en solution aqueuse, et il me paraît qu'il y a partout concordance satisfaisante entre les données de l'expérience et la théorie proposée.

B. Equilibre à température variable.

Les lois générales de l'équilibre dans la solution aqueuse, exprimées par les formules :

$$\frac{C_{\prime\prime}^{\ \Sigma a_{\prime\prime} i_{\prime\prime}}}{C_{\prime}^{\ \Sigma a_{\prime} i_{\prime}}} = K \quad \text{et} \quad \frac{d.\,l.\,K}{d.\,T} = \frac{q}{2\ T^2}\ ,$$

[1]) *Comptes rendus*, C, 737.

ne s'appliquent pas seulement aux équilibres chimiques, mais encore aux équilibres physiques dans les circonstances de dilution citées; c'est ainsi que les *lois de solubilité* y trouvent aussi leur expression.

On a alors affaire à l'équilibre simple qu'indique le symbole suivant :

$$\text{Corps non-dissous} \rightleftarrows \text{Corps dissous};$$

par conséquent $\Sigma a_{\prime} i_{\prime}$, ayant rapport aux corps dissous du premier système, devient zéro de sorte qu'on a $C_{\prime}^{\Sigma a_{\prime} i_{\prime}} = 1$, tandis que $C_{\prime\prime}$ indique la concentration (C) du corps dissous et $\Sigma a_{\prime\prime} i_{\prime\prime}$ la valeur i qui lui appartient. On obtient ainsi pour la première formule :

$$C^{i} = K,$$

c'est-à-dire que la concentration d'un corps dissous est constante, aussitôt qu'il y a excès de ce corps dans l'état non-dissous. En substituant ensuite cette première relation dans la seconde, on obtient :

$$\frac{d.\,l.\ C^{i}}{d.\,T} = \frac{q}{2\,T^{2}} \text{ ou } \frac{d.\,l.\,C}{d.T} = \frac{q}{2\,i\,T^{2}},$$

équation qui relie la variation de C (de la solubilité) par la température à la chaleur q développée lorsque la quantité moléculaire en kilogrammes du corps dissous se dépose de sa solution, c'est-à-dire à la chaleur absorbée pendant la solution de cette quantité.

Avant d'aborder le côté quantitatif de cette relation, il faut observer qu'elle indique, ce qui a déjà été remarqué plus d'une fois, que *le signe du phénomène calorique* (q) *accompagnant l'acte de dissolution, détermine celui de la variation de la solubilité par la température* $\left(\frac{d.\,l.\,C}{d.T}\right)$; s'il y a de la chaleur absorbée, cas général pour les solides, il y a augmentation de la solubilité par l'élévation de la température; dans le cas contraire, général pour les corps gazeux, il y a diminution;

enfin, si la chaleur de dissolution est zéro, la solubilité sera invariable. Quelques cas curieux méritent d'être cités spécialement ici, en confirmation de cette conclusion :

1. M. Pauchon [1]) observa que la diminution de la solubilité du sulfate de soude au-dessus de 33° correspond à la chaleur que dégage pendant sa solution le sel anhydre (ou $SO_4\ Na_2.H_2O$) qui se dépose à ces températures.

2. M. Alexéjeff [2]) observa la diminution de solubilité de l'alcool butylique et celle de l'éther acétique en élévant la température; en effet, d'après M. Berthelot [3]), ces corps se dissolvent en dégageant de la la chaleur.

3. M. Le Châtelier [4]) observa les mêmes coïncidences pour le brome, l'éther, le sulfure de carbone et la nicotine, qui tous ont une solubilité diminuant par l'échauffement.

4. Enfin, la coïncidence $q = 0$ et la non-variation de la solubilité fut établie par M. Alexéjeff [5]) pour l'alcool isobutylique, dont la valeur de q, variable avec la température, est négative à 0°, mais devient positive à des températures plus élevées; or, en effet, là où cette chaleur est zéro la solubilité ne varie pas avec la température, tandis qu'à des températures plus basses et plus élevés cette variation change de signe. M. Le Châtelier [4]) indiqua que la même chose environ résultait des expériences faites avec le sulfate de chaux; d'une part, d'après les données de M. Berthelot, la valeur de q y change de signe à 24° en passant par zéro; d'autre part, d'après les expériences de M. Marignac, la solubilité du corps cité offre une valeur minimum à 35°.

D'après la relation donnée plus haut, le côté qualitatif du phénomène n'est pas le seul qui soit abordable ; on peut calculer q au moyen des données de solubilité, comme il résulte des exemples suivants, où la solubilité est indiquée en °/₀ :

---

1) *Comptes rendus*, XCVII, 1555.

2) *Berl. Ber.*, IX, 1442.

3) *Mécan. Chim.*, I, p. 515.

4) *Comptes rendus*, C, 442.

5) *Bull. de la Soc. chim.*, XLI, 393.

Corps.	Température.	Solubilité.	i	$q/_{1000}$ calculé.	$q/_{1000}$ trouvé.
Acide oxalique [1]	0	5,2	1,25	8,2	8,5 [2]
	10	8			
Bioxalale de potasse [1]	0	2,2	1,84	9,8	9,6 [3]
	10	3,1			
Acide succinique [4]	0	2,88	1	6,9	6,7 [2]
	8,5	4.22			
„ salicique [5]	12,5	0,16	0,93	8,4	8,5 [2]
	81	2,44			
„ benzoïque [6]	4,5	0,1823	„	6,3	6,5 [2]
	75	2,1931			
Bichromate de potasse [1]	0	4,6	2,36	17,3	17 [8]
	10	7,4			
Alcool amylique [9]	0	4,23	0,93	— 3,1	— 2,8 [8]
	18	2,99			
Aniline [11]	16	3,11	0,83	0,6	0,1 [8]
	55	3,58			
Phénol [11]	1	7,12	0,84	1,2	2,1 [8]
	45	10,2			
Baryte [10]	0	1,5	2,69	16,3	15,2 [12]
	10	2,22			
Chaux [13]	15,6	0.129	2,59	— 2,8	— 2,8 [14]
	54,4	0,103			
Nitrate de baryte [15]	0	5,2	2,19	8,8	9,4 [4]
	9				
Alun potassique [15]	0	3	4,45	21,9	20,2 [8]
	9,375 { 8,25	4 { 4,05			
	10,5	4,1			
Mannite [16]	17,5 { 16,5	16,07 { 15,835	0,97	4,8	4,6 [8]
	18,5	15,6			
	23	18,5			
Chlorure mercurique [15]	10	6,57	1,11	3	3 [8]
	50	11,84			
Chlorate de potasse [15]	0	3,3	1,78	11	10 [8]
	15,37	6,03			
Acide borique [7]	0	1,947	1,11	5,8	5,6 [8]
	12	2,92			
Borax [15]	0	2,83	3,57	27,4	25,8 [8]
	10	4,65			

1) Alluard, (*Jahresber.*, 1864, 94).
2) Berthelot, *Méc. chim.*, I, 526.
3) *Méc. chim.*, 539.
4) Bourgoin, *S.C.*, XXI, 110.
5) Alexejeff, *S.C.*, XXXVIII, 147.
6) Bourgoin, *S.C.*, XXXI, 62.
7) *Comptes rend.*, LXXXV, 1069.
8) *Méc. chim.* I, 534.
9) Alexejeff, *B.B.*, X, 412.
10) Gmelin—Kraut 260.
11) Alexejeff *B.B.*, XVI, 2273.
12) Thomson, *Therm. Unters.*, III, 263.
13) Dalton, Gmelin—Kraut.
14) Thomson, *Therm. Unters.*, III, 249.
15) Mulder, *Bijdragen tot de Geschiedenis van het scheikundig gebonden water.*
16) Beilstein, *Org. Chemie*, 554.

Quant aux *équilibres chimiques en solution aqueuse dans leur déplacement par la température*, il me paraît que jusqu'ici il y a deux cas suffisamment étudiés pour qu'on puisse y appliquer notre théorie:

1. *L'équilibre entre les acides nitrique, sulfurique et chlorhydrique en présence de la soude* [1]).

Dans l'équilibre qu'expriment les symboles:

$$SO_4\,Na_2 + 2\,NO_3H \rightleftarrows 2\,NO_3\,Na + SO_4\,H_2 \text{ et}$$
$$SO_4\,Na_2 + 2\;Cl\;H \rightleftarrows 2\;Cl\;Na + SO_4\,H_2,$$

M. Ostwald détermina l'avidité relative des acides nitrique et sulfurique d'une part, et celle des acides chlorhydrique et sulfurique d'autre part, c'est-à-dire le rapport des concentrations des systèmes ($C_{\prime\prime} : C_{\prime}$) dans les deux cas; il obtint les résultats suivants:

Température.	Av. $NO_3H : SO_4H_2$	Av. $HCl : SO_4H_2$
0°	1,9	1,93
60°	2,37	2,37

Or, en introduisant:

$$i_{NO_3\,Na} = 1{,}82 \quad i_{SO_4H_2} = 2{,}06 \quad i_{NO_3\,H} = 1{,}94 \quad i_{SO_4\,Na_2} = 1{,}91$$
$$i_{Cl\,Na} = 1{,}89 \quad i_{Cl\,H} = 1{,}98,$$

notre théorie donne dans le premier cas:

$$\frac{C_{\prime\prime}^{\;5,7}}{C_{\prime}^{\;5,79}} = K, \text{ approximativement } \left(\frac{C_{\prime\prime}}{C_{\prime}}\right)^{5,745} = K,$$

dans le second cas:

$$\frac{C_{\prime\prime}^{\;5,84}}{C_{\prime}^{\;5,87}} = K, \text{ approximativement } \left(\frac{C_{\prime\prime}}{C_{\prime}}\right)^{5,855} = K.$$

[1]) *Journ, für pr Chemie*, (2) XVI, 419.

Il résulte alors de la relation:

$$\frac{d.\,l.\,K}{d.\,T} = \frac{q}{2\,T^2}$$

$\dfrac{d.\,l.\,\dfrac{C_{\prime\prime}}{C_{\prime}}}{d.T.} = \dfrac{q}{11{,}49\,T^2}$ pour le premier et $\dfrac{q}{11{,}71\,T^2}$ pour le second cas. Après intégration l'on obtient:

$$11{,}49 \text{ et } 11{,}71 \left\{ l.\left(\frac{C_{\prime\prime}}{C_{\prime}}\right)_{T_1} - l.\left(\frac{C_{\prime\prime}}{C_{\prime}}\right)_{T_2} \right\} = q\left\{\left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}\right)\right\}.$$

En y substituant:

$$T_1 = 333,\ T_2 = 273,\ \left(\frac{C_{\prime\prime}}{C_{\prime}}\right)_{T_1} = 2{,}37$$

et, selon le cas:

$$\left(\frac{C_{\prime\prime}}{C_{\prime}}\right)_{T_2} = 1{,}9 \text{ ou } 1{,}93,$$

on obtient:

$$11{,}49(l.2{,}37 - l.1{,}9) = \frac{60\,q}{273 \times 333} \text{ et } 11{,}71(l.2{,}37 - l.1{,}93) = \frac{60\,q}{273 \times 333}$$

$$q = 3848 \qquad\qquad q = 3644.$$

Or, la neutralisation de 80 kilogrammes de soude, en solution diluée, produisant 31700 cal. pour l'acide sulfurique et 27400 cal. pour les acides chlorhydrique et nitrique, on obtient 31700 — 27400 = 4300 pour la valeur de q.

Observons que la formation de sels acides entraîne des complications dont le calcul n'a pu tenir compte.

2. Il y a à considérer ensuite *la décomposition par l'eau du sel double* $PbI_2 \,.\, 2\,KI \,.\, 2\,H_2O$, étudiée par M. Ditte [1]): cette décomposition est prévenue par la présence dans l'eau d'une quantité suffisante d'iodure de potassium, quantité qui varie avec la température; la voici en grammes par litre d'eau:

[1]) *Comptes rendus*, XCII, 1341.

Température.	IK en grammes par litre d'eau (p).	$q = 7{,}6\ T^2 \dfrac{d.\,l.\,p}{d.\ T}$	
5	140		
10	160	15970	
14	175	13830	
20	204	16330	
28	251	17370	15130
39	300	11570	
59	503	20340	
67	560	11510	
85	738	14150	

L'équilibre ainsi étudié se traduit par le symbole :

$$PbI_2 . 2\,KI . 2\,H_2\,O \rightleftarrows PbI_2 + 2\,KI + 2\,H_2\,O\,,$$

et pour appliquer les relations:

$$K = \frac{C_{\prime\prime}^{\ \Sigma a_{\prime\prime} i_{\prime\prime}}}{C_{\prime}^{\ \Sigma a_{\prime} i_{\prime}}} \quad \text{et} \quad \frac{d.\ l.\ K}{d.\ T} = \frac{q}{2\ T^2}$$

on a $\Sigma a_{\prime} i_{\prime} = 0$ et $\Sigma a_{\prime\prime} i_{\prime\prime} = 2 \times 1{,}9$, la valeur de i pour l'iodure de potassium ayant été trouvée égale à 1,9; par conséquent :

$$\frac{3,8\ d.\ l.\ C_{\prime\prime}}{d.\ T.} = \frac{q}{2\ T^2}\ ;$$

$C_{\prime\prime}$ étant proportionnelle à p, on a $d.\ l.\ C_{\prime\prime} = d.\ l.\ p$, et par suite :

$$q = 7{,}6\ T^2\ \frac{d.\ l.\ p}{d.\ T}\,,$$

relation qui donne pour q la valeur calculée 15130.

Il y a ici une coïncidence frappante : la formation de PbI_2. $2\,KI . 2\,H_2\,O$, en partant des iodures solides, dégage 4620

calories [2]); tandis que la dissolution dans l'eau de $2\,IK$ absorbe 2×5300 ou 2×5000 calories, selon MM. Berthelot et Thomson [1]); par conséquent q a été trouvée égale à 4620 + (10600 ou 10200) = 15220 ou 14820 cal., selon les différents observateurs.

IX. Relation entre la constante de l'équilibre K et le travail E que l'affinité peut produire.

Il y a, pour la mesure des forces chimiques qui tendent à produire une transformation, un principe très-simple et facile à appliquer. On n'a qu'à opposer à la transformation une force dont il soit possible de faire varier la grandeur d'une manière connue, et à en déterminer ensuite la grandeur nécessaire pour empêcher la réaction.

Ce principe, qui n'est autre chose que la voie à suivre dans la mesure des forces en général, devient en chimie d'une application très-facile si l'on se sert de l'électricité comme force qui s'oppose à la transformation; en effet, sachant qu'une combinaison comme le chlorure de potassium, dont la formation résulte de l'action des forces chimiques même les plus énergiques, est décomposable par un courant de force électromotrice suffisante, il est clair qu'il sera possible d'opposer à toute force chimique tendant à produire une transformation une force électromotrice juste assez grande pour en empêcher la réalisation. Cette force électromotrice est alors une mesure exacte de la force chimique dont elle empêche l'action.

Il y a une simplification à introduire dans ce qui précède, si l'on considère que la force électromotrice nécessaire pour prévenir une transformation est au juste égale à celle que la transformation peut produire lorsqu'elle s'accomplit dans un élément galvanique; par conséquent, cette dernière force mesure encore celle qui tend à produire la réaction.

---

1) *Méc. chim.*, I, 527.

2) *Berliner Ber.*, XV, 3084.

Il résulte de là une condition qui doit être remplie s'il y a équilibre dans la présence simultanée de deux systèmes, comme cela arrive dans le cas de l'équilibre homogène et hétérogène; la force qui tend à produire la transformation doit être zéro dans ces circonstances, sans cela il y aurait déplacement de l'équilibre du côté de l'un ou de l'autre des deux systèmes; évidemment, la force électromotrice que cette transformation produirait en s'accomplissant dans un élément galvanique, serait alors également zéro. C'est la condition électrique dont il s'agit de déduire les conséquences.

Désignons à cet effet par E la force électromotrice, exprimée en calories, que produit la transformation du second système dans le premier; E n'indique alors rien autre chose que le travail produit, sous forme d'électricité, si la transformation décrite s'accomplit sur la quantité moléculaire en kilogrammes qu'exprime le symbole chimique. Dans l'équilibre:

$$Cl\,H + NO_3\,Na \rightleftarrows Cl\,Na + NO_3H$$

E représente par conséquent en calories le travail électrique que produit la transformation de 58,5 kilogrammes de $Cl\,Na$ et 63 kilogrammes d'acide nitrique en 36,5 kilogrammes d'acide chlorhydrique et 85 kilogrammes de NO_3Na. Seulement, comme cette force électromotrice dépend de la concentration de ce qui se transforme et de ce qui prend naissance, il est nécessaire d'observer que dans l'emploi ultérieur de E il s'agira de l'unité de concentration, c'est-à-dire de la présence dans le mètre cube de la quantité indiquée des deux systèmes.

Cela établi, il est facile de déduire les lois de l'équilibre qui sont le sujet de ce qui précède, et de relier la constante K qui y fonctionne à la grandeur E nouvellement introduite; il n'y a qu'à effectuer le cycle suivant de transformations réversibles à température constante.

D'abord, la quantité moléculaire du second système en kilogrammes à l'unité de concentration se transformera dans

Concentration.

1er Système.		2nd Système.
1	$\overleftarrow{E}$	1
(1) ↓		↑ (2)
$C_{,}$	$\overrightarrow{X}$	$C_{,,}$

le premier à concentration égale, transformation qui est supposée avoir lieu dans un élément galvanique produisant la force électromotrice E, et par conséquent réversible. Ensuite, le premier système change de volume, d'une manière réversible aussi, soit dans un cylindre à paroi semi-perméable, plongé dans le dissolvant s'il s'agit d'une solution ; ce changement y produira la concentration $C_{,}$ et effectuera un certain travail, indiqué par (1) dans la figure. Une troisième phase consiste dans la réproduction du second système, à la concentration $C_{,,}$ cette fois ; le changement est supposé avoir lieu dans un élément galvanique d'une manière réversible avec production d'une force électromotrice X. Enfin l'état primitif s'établit de nouveau par un changement réversible dans la concentration du second système, produisant un travail, indiqué par (2) dans la figure.

Ce cycle de transformations réversibles, effectuées à température constante, conduit, parce que la somme des travaux accomplis y doit être zéro, à la relation suivante :

$$E + (1) + X + (2) = 0,$$

relation où l'on peut introduire maintenant la condition d'équilibre, énoncée plus haut. Cette condition consiste en ce que la transformation de deux systèmes en équilibre ne peut effectuer du travail ; et que par conséquent, si $C_{,}$ et $C_{,,}$ sont les concentrations qui répondent à l'état d'équilibre, le travail électrique X doit être zéro, ce qui conduit à l'équation :

$$E + (1) + (2) = 0.$$

Il ne reste qu'à introduire la valeur des travaux désignés par (1) et (2) et exprimés en calories ; ils reviennent, d'après ce qui précède, à :

$$(1) = A\,P_{,}\,l.\frac{1}{C_{,}} \quad \text{et} \quad (2) = A\,P_{,,}\,l.\,C_{,,},$$

où $P_{,}$ et $P_{,,}$ indiquent la pression des deux systèmes à l'unité de concentration, pression ordinaire s'il s'agit de mélanges gazeux, pression osmotique en cas de dissolutions. En introduisant ces valeurs on est conduit à la relation:

$$E + A\,P_{,}\,l.\frac{1}{C_{,}} + A\,P_{,,}\,l.\,C_{,,} = 0\,,$$

qui peut recevoir fa forme modifiée:

$$E + A\,l.\frac{C_{,,}^{\,P_{,,}}}{C_{,}^{\,P'}} = 0\,,$$

et en observant que pour une température déterminée E répond à une valeur donnée, on obtient l'expression:

$$\frac{C_{,,}^{\,P_{,,}}}{C_{,}^{\,P_{,}}} = \text{Const.}$$

comme loi de l'équilibre à température invariable.

C'est donc ainsi que l'on retrouve la loi de l'équilibre qui a déjà été établie par ce qui précède, applicable également aux équilibres homogène et hétérogène, à l'état dissous ou gazeux dilué.

On peut effectuer encore les substitions connues:

1°. Pour l'état gazeux:

$$P_{,} = n_{,}\,R\,T \quad \text{et} \quad P_{,,} = n_{,,}\,R\,T,$$

2°. Pour l'état dissous:

$$P_{,} = R\,T\,\Sigma\,a_{,}\,i_{,} \quad \text{et} \quad P_{,,} = R\,T\,\Sigma\,a_{,,}\,i_{,,}\,,$$

ce qui produit dans les deux cas:

$$l.\,\frac{C_{,,}^{\,n_{,,}}}{C_{,}^{\,n_{,}}} \text{ ou } l.\frac{C_{,,}^{\,\Sigma a_{,,}i_{,,}}}{C_{,}^{\,\Sigma a_{,}i_{,}}} = -\frac{E}{A\,R\,T} = -\frac{E}{2\,T}\,.$$

Le grand avantage de ce qui vient d'être exposé n'est pas seulement que, par une voie différente et très-simple, les relations obtenues ont été retrouvées et par là confirmées; il y a plus, chaque phénomène d'équilibre est maintenant relié d'une manière rigoureuse à la force électromotrice, c'est-à-dire au travail que la transformation dont il s'agit peut produire.

Chaque donnée d'équilibre devient dès lors une détermination du travail de l'affinité ou de la force électromotrice que la transformation peut mettre en jeu, et, ce qui plus est, chaque détermination de force électromotrice, dans des circonstances bien définies, est une donnée précieuse pour la connaissance de l'équilibre que tend à produire la transformation dont la force électromotrice a été étudiée.

Il me reste à déduire de ce qui précède une relation entre les données obtenues dans l'étude d'équilibres différentes, relation que l'expérience a justifiée. Pour nous en tenir à un exemple spécial, il s'agit d'établir une relation nécessaire entre les phénomènes d'équilibre que présente dans les trois cas suivants le partage de l'acide chlorhydrique :

1° Sur la quinine (*Qu*) et la codéine (*Cd*) ;
2° Sur la codéine et la brucine (*Br*) ;
3° Sur la brucine et la quinine.

La relation qui se produit ne peut recevoir son expression simple et rigoureuse que si l'on se sert des constantes d'équilibre qui ont été introduites et indiquées par K. Or il s'agit ici de trois équilibres, correspondant à trois valeurs de K différentes :

$$1° \quad Qu + Cd.\,H\,Cl \rightleftarrows Qu.\,H\,Cl + Cd \;\ldots\ldots\; K_1$$
$$2° \quad Cd + Br.\,H\,Cl \rightleftarrows Cd.\,H\,Cl + Br \;\ldots\ldots\; K_2$$
$$3° \quad Br + Qu.\,H\,Cl \rightleftarrows Br.\,H\,Cl + Qu \;\ldots\ldots\; K_3.$$

D'après ce qui précède, les trois valeurs de K sont reliées à trois forces électromotrices E_1, E_2 et E_3, produites dans les trois cas par la transformation du second système dans le premier :

$$l.\,K_1 = -\frac{E_1}{2\,T},\ l.\,K_2 = -\frac{E_2}{2\,T}\ \text{et}\ l.K_3 = -\frac{E_3}{2\,T}.$$

Or, la somme des trois forces électromotrices étant zéro, parce que le résultat des trois transformations auxquelles elles se rapportent est nul, on a :

$$l.\,K_1 + l.\,K_2 + l.\,K_3 = -\frac{E_1 + E_2 + E_3}{2\,T} = 0,$$

par conséquent :

$$K_1 . K_2 . K_3 = 1 ,$$

ou, pour s'exprimer d'une manière générale, en termes qu'on entend sans explication : *„Le produit des constantes dans un cycle d'équilibres est égal à l'unité''.*

Ceci a été prouvé en effet par M. Jellet, [1]) qui étudia les trois équilibres dont il a été question. Seulement, l'auteur n'exprima pas son résultat en faisant usage de K, mais observa que le produit des rapports entre les sels présents dans les trois équilibres est égal à l'unité. Voici les données obtenues :

1° *Qu.* H *Cl* : *Cd. H Cl* = 2,03
2° *Cd.* H *Cl* : *Br. H Cl* = 1,58
3° *Br.* H *Cl* : *Qu. H Cl* = 0,32

produit = 1,026.

En effet, dans ce cas spécial, la relation trouvée conduit à ce résultat, si l'on applique la relation :

$$K = \frac{C_{\prime\prime}^{\Sigma a_{\prime\prime} i_{\prime\prime}}}{C_{\prime}^{\Sigma a_{\prime} i_{\prime}}}$$

et qu'on observe, vu l'analogie des trois cas dont il s'agit, que les valeurs Σai ne différeront que très-peu, de sorte qu'on peut admettre, en vertu de :

$$K_1 . K_2 . K_3 = 1 ,$$

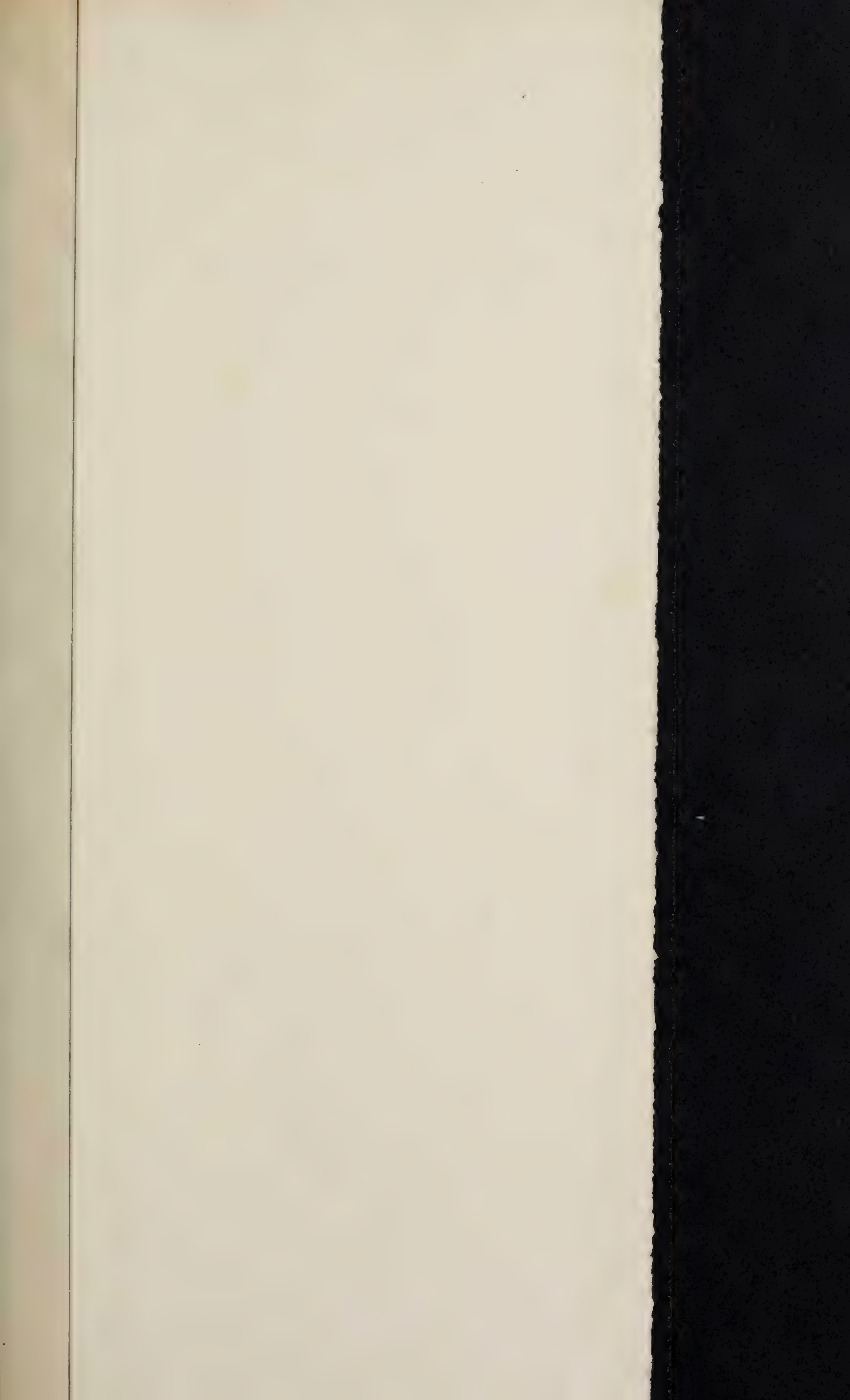
la relation :

$$\left(\frac{C_{\prime\prime}}{C_{\prime}}\right)_1 \times \left(\frac{C_{\prime\prime}}{C_{\prime}}\right)_2 \times \left(\frac{C_{\prime\prime}}{C_{\prime}}\right)_3 = 1 ,$$

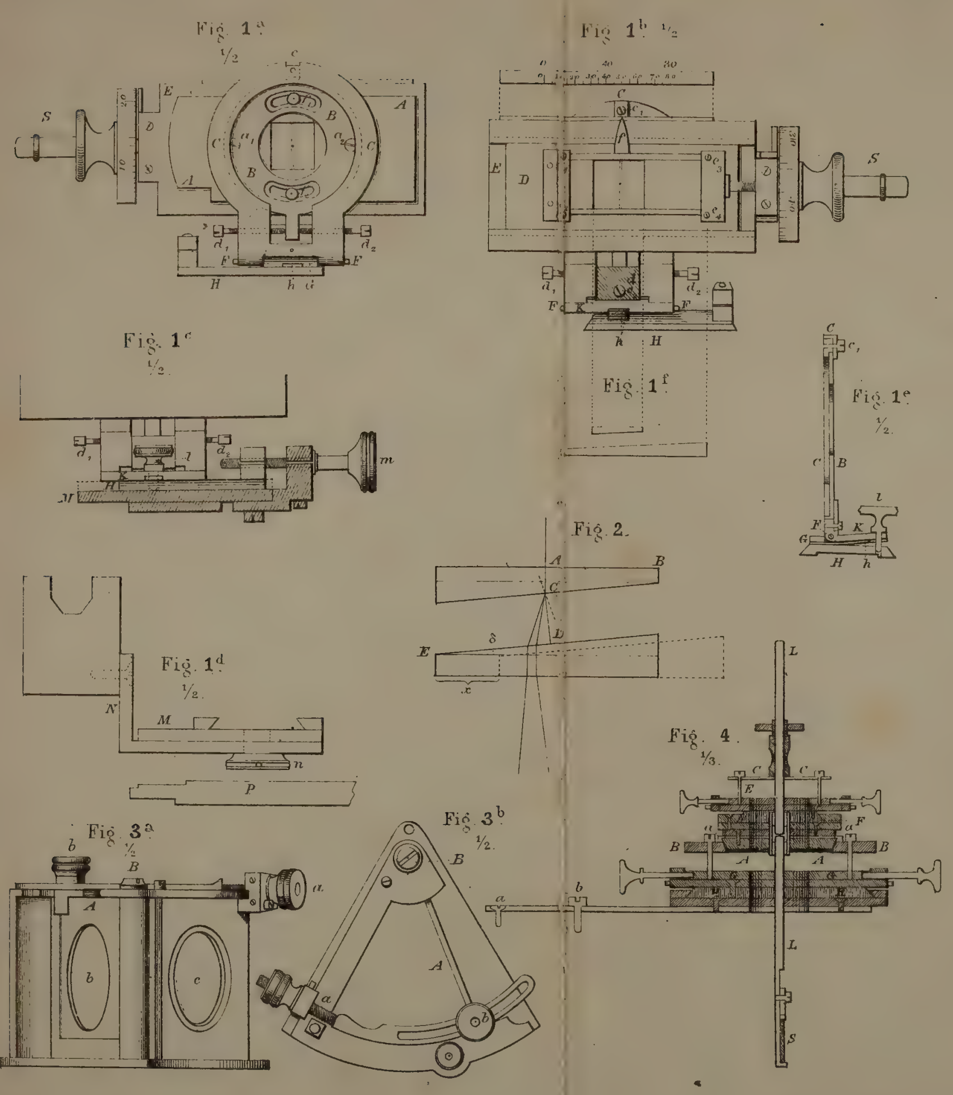
qui est celle découverte par M. Jellet.

---

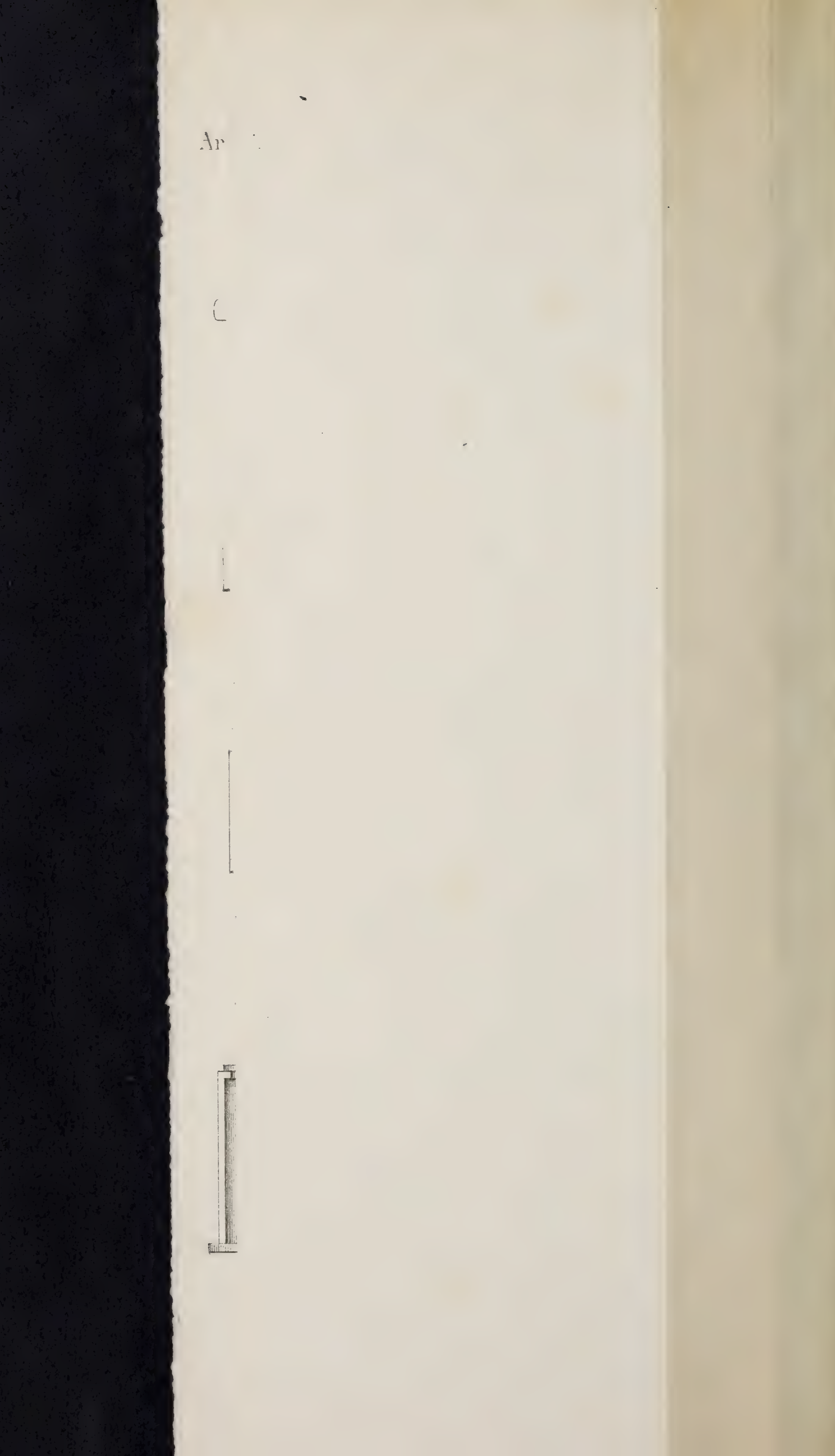
[1]) *Tansact. Royal Irish Academy*, XXV, 371.







Wendel, del. et sculps.



TOME XX. 4me Livraison.

ARCHIVES NÉERLANDAISES

DES

SCIENCES

EXACTES ET NATURELLES

PUBLIÉES PAR

LA SOCIÉTÉ HOLLANDAISE DES SCIENCES À HARLEM,

ET RÉDIGÉES PAR

le Secrétaire de la Société,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. **D. Bierens de Haan, C. A. J. A. Oudemans, W. Koster, C. H. D. Buijs Ballot, C. K. Hoffmann et J. M. van Bemmelen.**

HARLEM
LES HÉRITIERS LOOSJES.
1886.

PARIS
GAUTHIER-VILLARS.

LEIPSIG
G. E. SCHULZE.

ARCHIVES NÉERLANDAISES

DES

Sciences exactes et naturelles.

LES OSCILLATIONS

DE LA

PRESSION SANGUINE ARTÉRIELLE LORS DE LA RESPIRATION PAR SOUFFLET ET DE LA RESPIRATION

DANS

L'AIR CONDENSÉ OU RARÉFIÉ,

PAR

S. DE JAGER.

Lorsque les nerfs vago-sympathiques sont coupés et les cavités thoracique et abdominale ouvertes, on voit apparaître dans la pression sanguine artérielle, synchroniquement avec les mouvements respiratoires artificiels (entretenus au moyen du soufflet), des oscillations, indubitablement dues aux changements qui, à chacun de ces mouvements respiratoires, se produisent dans la circulation pulmonaire.

Bien que M. Traube [1]) ait déjà donné des détails circonstanciés sur les différentes formes que présentent ces oscillations de la pression sanguine en cas de respiration par soufflet, son travail, comme le remarque avec raison M. Kowalewsky [2]), ne contient pas d'indications exactes concernant la coïncidence des phases respiratoires avec chacune des parties de la courbe de la pression.

Après M. Traube, plusieurs autres physiologistes, MM. Mosso [3]), Mayer [4]) et Cyon [5]), ont également traité, avec

[1]) *Ges. Beitr. z. Pathol. u. Physiol.*, Berlin, 1871.

[2]) *Arch. f. Physiol.*, 1877.

[3]) *Centralbl. f. d. Med. Wissensch.*, 1872.

[4]) *Sitzgber. d. k. Akad. d. Wissensch. z. Wien*, Bd. LXXIV, 1876.

[5]) Pflüger's *Arch. f. d. ges. Physiol.*, Bd. IX, 1874.

plus ou moins de développements, de ces oscillations respiratoires. M. Kuhn [1]) et M. Kowalewsky se sont occupés, les premiers, des actions mécaniques des poumons, qui peuvent être la cause de ces oscillations. J'ai déjà donné antérieurcment [2]) un résumé des Mémoires de M. Kuhn et de M. Krowalewsky. Il suffira donc, pour le moment, de rappeler que ces deux expérimentateurs attachent beaucoup d'importance aux changements que la pression sanguine artérielle éprouve pendant les *suspensions* de la respiration, savoir: l'accroissement de la pression lorsque la suspension coïncide avec l'état d'affaissement des poumons, le décroissement lorsque la suspension correspond à l'état de gonflement. M. Kowalewsky donne à cet accroissement le nom d'onde fondamentale (*Grundwelle*), au décroissement celui d'onde négative (*negative Welle*). Or, suivant lui, l'onde fondamentale est due à ce que, par suite de la diminution de la résistance, le sang passe en plus grande quantité du cœur droit au cœur gauche; l'onde négative à ce que, par suite de l'augmentation de la résistance, ce passage est ralenti. Mais, outre ces changements de la résistance, il se produit aussi, lors de l'épanouissement et de l'affaissement des poumons, des changements dans la capacité des voies sanguines. La capacité devient plus petite lors de l'insufflation, plus grande lors de l'affaissement. De même que l'onde fondamentale et l'onde négative, les effets de ces changements de capacité se manifesteront dans la pression sanguine artériele. C'est ainsi que M. Kowalewsky explique, par les modifications de la circulation pulmonaire, les oscillations de la pression sanguine, en cas de respiration artificielle.

Les vues exposées par M. Kowalewsky, au sujet des variations de la circulation pulmonaire, ont été généralement adoptées. Après MM. Quincke et Pfeiffer [1]), qui, comme je

---

[1]) *De resp. schommelingen in de art. bloedsdr.*, Amsterdam, 1875.

[2]) Pflüger's *Archiv. f. d. ges. Physiol.*, Bd. XX.

[3]) Quincke *u.* Pfeiffer, *Ueber den Blutstrum in den Lungen*, dans *Archiv. f. Anat. u. Physiol.*, 1871.

l'ai dit dans une occasion antérieure, furent les premiers à faire une étude expérimentale approfondie du mouvement du sang dans les poumons, tous les expérimentateurs sont arrivés aux mêmes résultats par rapport aux changements de vitesse et de capacité qui se produisent dans le domaine vasculaire des poumons, lorsque ceux-ci sont dilatés par une pression positive exercée dans la trachée, puis retombent sur eux-mêmes. Nous pouvons donc regarder comme établi: 1° que la capacité des poumons diminue quand ils s'épanouissent sous l'influence de l'insufflation, tandis qu'elle augmente lorsqu'ils s'affaissent; 2° que dans l'état d'épanouissement par insufflation la vitesse du courant sanguin est plus petite que dans l'état d'affaissement.

Ces changements de la circulation pulmonaire rendent compte des oscillations qu'on observe dans la pression sanguine artérielle, lorsque la respiration est entretenue au moyen du soufflet, les cavités thoracique et abdominale étant ouvertes et les nerfs vago-sympathiques sectionnés. Aussi, pour expliquer ces oscillations, ai-je peu de chose à ajouter aux remarques si judicieuses de M. Kowalewsky. Sous un seul rapport, une légère modification, destinée à mettre de l'unité dans l'explication des phénomènes relatifs aux différents modes de respiration, me paraît nécessaire. Antérieurement, en effet, j'ai déjà développé l'opinion que tous ceux des changements de la courbe de la pression sanguine artérielle, qui sont le résultat de changements de la vitesse avec laquelle le sang traverse les poumons, doivent être appelés *courbe de la vitesse circulatoire* (Stromgeschwindigkeitscurve), et que ceux qui proviennent de changements dans la capacité du domaine vasculaire des poumons doivent prendre le nom de *courbe de la capacité* (Capacitätscurve). Par la combinaison de ces deux courbes j'expliquais les oscillations qui se produisent pendant la respiration. J'indiquais aussi, dès lors [1]), que les courbes de l'„onde fondamentale" et de l'„onde négative" de M. Kowalewsky sont des courbes de la vitesse circulatoire. *La courbe*

[1]) Pflüger's *Arch. f. d. ges. Physiol.*, Bd. XXVII, p. 175.

de la pression sanguine artérielle, dans le cas de la respiration par soufflet, est donc, de même que la courbe due à la respiration ordinaire, la résultante des deux courbes susdites.

Si, au moyen du kymographion du Ludwig, on enregistre la pression du sang dans l'artère carotide ou crurale, — après avoir coupé les nerfs vago-sympathiques, ouvert le thorax et l'abdomen, curarisé l'animal pour prévenir les contractions musculaires, et relié latéralement à la trachée, à l'aide d'une pièce en T et d'un tube de caoutchouc, un tambour enregistreur, afin que les variations de la pression exercée dans la trachée puissent s'inscrire en même temps que celles de la pression du sang, — on voit se produire, *lors de l'insufflation des poumons, d'abord une élévation puis un abaissement de la pression sanguine, lors de l'affaissement, d'abord un abaissement puis une élévation.* Dans cette expérience, la respiration peut être entretenue au moyen d'un soufflet ordinaire; mais, pour avoir la facilité d'appliquer à la trachée une pression positive plus ou moins forte et de faire agir cette pression, à volonté, pendant un temps plus ou moins long, je me suis servi, en outre, d'une disposition qui sera décrite plus loin.

L'élévation initiale de la pression sanguine, qu'on observe lors de l'insufflation des poumons, est la courbe de la capacité, l'abaissement subséquent est la courbe de la vitesse circulatoire. Lors de l'insufflation, en effet, la capacité des vaisseaux pulmonaires diminue, et par suite une certaine quantité de sang sera chassée des poumons dans le cœur gauche et occasionnera un accroissement de la pression et de la vitesse du sang dans l'aorte. Mais, en même temps que la capacité diminue, la résistance que le sang éprouve dans les vaisseaux pulmonaires augmente, la vitesse circulatoire devient plus petite, et par conséquent une quantité moindre de sang se rendra au cœur gauche, d'où résultera l'abaissement de la pression et de la vitesse du sang dans l'aorte. Au moment de l'affaissement, l'action sera inverse; par suite, la courbe de la capacité se présentera comme abaissement, la courbe

de la vitesse circulatoire comme élévation de la pression sanguine.

De même que je l'ai remarqué précédemment à propos de la respiration ordinaire [1]), il peut aussi dans la respiration artificielle exister différentes circonstances, qui font prédominer soit la courbe de la capacité, soit la courbe de la vitesse circulatoire, et comme celles-ci agissent en sens opposé sur la pression sanguine moyenne, la courbe résultante peut, ici également, offrir un aspect très différent.

Naturellement, encore, les courbes de la vitesse circulatoire s'accusent le plus distinctement pendant les suspensions, (les „ondes fondamentale et négative'' de M. Kowalewsky). La fig. 1 (Pl. VIII) nous en montre un exemple. Elle représente la courbe de la pression du sang dans la carotide droite d'un chien (6 kilogr.) complètement curarisé, les nerfs vago-sympathiques coupés et les cavités thoracique et abdominale ouvertes. L'insufflation et l'affaissement avaient lieu de telle sorte que les mouvements pulmonaires s'exécutaient assez lentement, surtout le gonflement (l'affaissement était un peu plus rapide); chaque mouvement pulmonaire était suivi d'une suspension. Les courbes de la capacité, comme on le voit, sont simplement indiquées; dans les longues suspensions apparaissent les courbes de la vitesse circulatoire, descendantes dans la suspension du gonflement, ascendantes dans la suspension de l'affaissement.

Si l'on compare cette courbe avec une courbe obtenue pendant la respiration normale ordinaire (soit, par ex., Pflügers

---

1) Je m'empresse de faire amende honorable envers M. Gad de ce que j'ai écrit, au sujet de son Mémoire, dans Pflüger's *Archiv*, T. XXXIII, p. 28. J'y avais combattu son opinion, mais en ajoutant, dès lors, „si je comprends bien sa communication''. Or, des éclaircissements que M. Gad a donnés à cet égard dans le *Jahresbericht über die Leistungen und Fortschritte der gesammten Medicin*, Jahrg. XVIII, p. 202, en rendant compte de mon Mémoire, il résulte que j'avais mal saisi sa pensée, et que nous arrivons tous les deux au même résultat.

Arch., Bd. XXVII, Pl. IV, fig. 11, ou mieux encore Bd. XXXIII, Pl. I, fig. 2), on constate, en faisant pour un instant abstraction des phases respiratoires, une parfaite similitude de forme. Mais dès qu'on considère les oscillations dans leur rapport avec les différentes phases de la respiration, il devient manifeste que les deux cas sont diamétralement opposés l'un à l'autre. Tandis qu'ici lors de l'*insufflation* nous voyons d'abord une élévation puis un abaissement de la pression sanguine, dans la respiration ordinaire c'est précisément ce même rapport qu'on observe lors de l'*expiration*; de même, la courbe qui correspond à l'*affaissement* (après insufflation), d'abord abaissement, puis élévation, est de tout point semblable à celle que donne l'*inspiration* normale. Ce contraste s'explique naturellement, j'ai à peine besoin de le redire, par les changements opposés qui se produisent dans la circulation pulmonaire lors de la respiration artificielle et de la respiration normale.

Comment se modifie la forme de la courbe lorsqu'on fait croître la vitesse des phases respiratoires? La fig. 2 est la courbe de la pression sanguine du même chien, prise un peu plus tard que la fig. 1; les phases respiratoires sont ici beaucoup plus courtes, et les suspensions manquent. Lors de l'insufflation nous ne voyons qu'une élévation de la pression sanguine; lors de l'affaissement il y a essentiellement dépression, et ce n'est qu'à la fin de l'affaissement que la pression commence à se relever. Il est donc hors de doute que, lorsque les mouvements respiratoires s'opèrent avec cette rapidité, les courbes de la capacité prédominent beaucoup, et que les courbes de la vitesse circulatoire n'ont pas l'occasion de se faire valoir.

Néanmoins, la possibilité existe qu'une petite partie de l'élévation observée durant l'insufflation soit encore l'effet de l'affaissement précédent, donc courbe de la vitesse circulatoire; et de même, lors de l'affaissement, une partie de la dépression peut être due à la courbe de la vitesse circulatoire de l'insufflation qui a précédé. Cette possibilité, en effet, doit

toujours être admise, parce que le retard, sur lequel j'ai déjà antérieurement attiré l'attention dans le cas de la respiration normale, doit aussi exister dans le cas actuel. Ce retard provient de ce qu'une augmentation ou une diminution de l'apport de sang au ventricule gauche ne se fera sentir dans la carotide qu'au bout de quelque temps. Pendant la vie, ce retard, influencé par différentes circonstances, sera difficile à mesurer. Pourtant, je crois pouvoir affirmer qu'il doit être court. Jusqu'à un certain point, en effet, nous pouvons l'apprécier par la différence des temps où une même oscillation de la pression sanguine se manifeste dans la carotide et dans la crurale. En enregistrant la pression du sang dans l'une et l'autre de ces artères, on reconnaît, ainsi que je l'ai montré dans mon précédent Mémoire sur ce sujet, que les oscillations de la crurale arrivent très peu en arrière de celles de la carotide, et la différence dépend du temps nécessaire pour que l'augmentation ou la diminution de l'afflux du sang devienne perceptible sur une distance égale à la différence des distances de la crurale au cœur gauche et de la carotide au cœur gauche. Puisque, comme il vient d'être dit, l'écart entre les deux courbes en question est extrêmement faible, puisque, en d'autres termes, le temps nécessaire pour que le changement d'afflux sanguin se transmette sur la partie correspondante du système vasculaire est très court, — le temps nécessaire pour que ce changement se transmette du cœur gauche à la carotide sera également très court, incontestablement plus court qu'on ne pourrait l'inférer du moment d'apparition de la courbe de la capacité dans la fig 1. Sur cette figure, en effet, nous ne voyons pas, lors du gonflement, la courbe de la capacité (élévation de la pression sanguine) apparaître *immédiatement*, mais seulement quelque temps après le commencement de l'insufflation. Mais, si cette différence ne peut être attribuée tout entière au retard dont nous venons de parler, où faut-il donc en chercher la cause?

On ne saurait douter que ce phénomène ne soit en rapport

avec le mode d'épanouissement des poumons. L'expérience nous apprend en effet que, lorsque les poumons sont épanouis par insufflation, la capacité des vaisseaux pulmonaires devient plus petite. Ce changement de capacité est dû au changement qu'éprouve le lumen des vaisseaux, tant par l'épanouissement des poumons, considéré en lui-même, que par le changement de la pression intra-alvéolaire. Quant à ces deux facteurs, nous ne connaissons que le résultat de leur concours; on ne peut étudier séparément l'action de chacun d'eux, vu qu'on ne réussit pas à épanouir les poumons sans appliquer une pression positive dans la trachée, ou une pression négative sur la surface pleurale. Nous pouvons très bien nous figurer, toutefois, qu'au début de l'épanouissement l'extension des vaisseaux pulmonaires augmente leur capacité, et que cette augmentation soit à peu près égale à la diminution qui résulte de l'accroissement de la pression intra-alvéolaire produit par l'épanouissement; dans ce cas, les deux changements se compenseront, et il n'apparaîtra aucune courbe de capacité. Cette courbe ne se montrera qu'au bout de quelque temps, lorsque l'extension des vaisseaux pulmonaires sera devenue plus forte et que, surtout, la pression intra-alvéolaire sera assez élevée pour faire sentir son influence sur les vaisseaux alvéolaires. Telle est donc la raison pour laquelle la courbe de la capacité ne deviendra pas visible dès le début, mais seulement dans le cours du gonflement. Lors de l'affaissement, la relation sera inverse, et par conséquent la capacité changera le plus fortement à l'origine du changement de volume des poumons; voilà pourquoi, lors de l'affaissement, la courbe de la capacité doit apparaître beaucoup plus tôt, et c'est effectivement ce que confirme la fig. 1, où, lors du premier affaissement (en *a*), nous voyons la courbe de la capacité s'accuser directement dès le début du mouvement. Cela montre, en outre, que dans ce cas le retard dont il a été question plus haut n'est même pas perceptible.

Pour les autres affaissements représentés dans cette figure,

nous ne pouvons préciser le commencement de la courbe de la capacité, parce que l'abaissement dû à l'insufflation antecédente (courbe de la vitesse circulatoire) se continue ici, d'une manière graduelle, avec l'abaissement propre à l'affaissement (courbe de la capacité). Cette même remarque s'applique, en général, à toutes les oscillations de la pression sanguine. Fréquemment, en effet, il peut arriver que l'inclinaison sous laquelle se produit une courbe de la capacité soit égale à l'inclinaison de la courbe précédente de la vitesse circulatoire, ou réciproquement. Dans ces cas, les deux courbes passent l'une à l'autre d'une manière insensible, et on ne peut donc en indiquer le point de séparation. Cette distinction n'est possible que lorsque les deux courbes ont une inclinaison différente (Voir, par ex., mes courbes dans Pflüger's *Arch.*, T. XXVII et XXXIII).

L'influence que la rapidité des mouvements pulmonaires et la durée des suspensions exercent sur la forme des oscillations de la pression sanguine ressort clairement aussi de la fig. 3, qui a été prise du même chien que les deux précédentes, mais quelque temps après. Cette figure se compose de deux parties, *bc* et *cd*; la durée des phases respiratoires est différente dans les deux parties. Dans la première partie, *bc*, chaque insufflation est suivie d'une suspension; dans la seconde, *cd*, il n'y a de suspension qu'après l'affaissement; il en résulte que dans le premier cas la courbe de la vitesse circulatoire ne s'accuse convenablement que lors du gonflement, dans le second cas, lors de l'affaissement. Après tout ce que nous avons déjà dit du mode de constitution des oscillations, il est inutile d'insister sur l'explication des formes différentes des deux parties de la courbe fig. 3. Je ferai seulement remarquer la différence de pression sanguine *moyenne* dans ces deux parties; là où les suspensions ont lieu après l'insufflation (1e partie), la pression sanguine moyenne est plus faible que là où elles succèdent à l'affaissement (2e partie). Je me propose toutefois de revenir, plus tard, sur les rapports de la pression

moyenne du sang dans les différents modes de respiration.

Il est donc facile, surtout après les belles recherches de M. Kowalewsky, d'expliquer les oscillations de la pression sanguine qui se produisent en cas de respiration artificielle, lorsque les cavités thoracique et abdominale sont ouvertes et les nerfs vago-sympathiques coupés. L'état des choses devient un peu plus compliqué, si le thorax reste fermé. Dans ce cas, la respiration par soufflet ne peut être appliquée qu'après curarisation complète. Quant à la cavité abdominale, il est assez indifférent qu'elle soit ouverte ou fermée; dans ces expériences, en effet, j'ai de nouveau reconnu que l'ouverture de l'abdomen n'excerce pas d'influence appréciable sur les oscillations respiratoires de la pression du sang, à moins que, par suite de paralysie des vaisseaux de la cavité abdominale, la pression sanguine moyenne n'ait baissé, auquel cas les courbes de capacité entrent plus facilement en opposition avec les courbes de la vitesse circulatoire. Nous pouvons donc, en ce moment, négliger l'influence de la cavité abdominale; du reste, j'ai déjà parlé ailleurs [1]) de l'influence des variations de la pression intra-abdominale sur la circulation veineuse.

Lors de la respiration artificielle avec thorax fermé les phénomènes sont un peu plus complexes, parce qu'il entre alors plus de facteurs en jeu. Le cœur et les grands vaisseaux (afférents et efférents) des poumons éprouvent dans ce cas l'influence des variations de la pression intra-thoracique déterminées par l'insufflation et l'affaissement, et la possibilité doit être supposée que cette influence réagisse périodiquement sur la pression du sang dans l'aorte. Il est évident qu'ici encore la circulation pulmonaire subira périodiquement, lors de l'insufflation et de l'affaissement, des changements, qui se feront sentir sur la pression aortique; mais ces changements de la circulation pulmonaire se produiront, en cas de thorax

---

1) Pflüger's *Arch.*, Bd. XXXIII.

fermé, sous une forme un peu différente de celle qu'ils présentent lorsque le thorax est ouvert. C'est ce que montrent, effectivement, les courbes de la pression du sang dans la carotide.

La fig. 4 est une courbe de la pression carotidienne prise chez le même chien qui a fourni les courbes précédentes, mais prise à un moment où le thorax était encore fermé, toutes les autres circonstances étant d'ailleurs les mêmes. Entre cette courbe et celle de la fig. 1 l'accord est évident, on reconnaît de suite que toutes les deux présentent une même forme fondamentale; seulement, dans la fig. 4, les courbes de la capacité et de la vitesse circulatoire sont plus fortement accusées que dans la fig. 1, l'amplitude des oscillations est plus grande. Ces mêmes différences nous les retrouvons en comparant la fig. 5, obtenue du même chien pendant que les mouvements pulmonaires étaient produits plus rapidement, avec la fig. 2.

L'influence de la circulation pulmonaire n'en est pas moins évidente, bien qu'elle se traduise sous une forme un peu modifiée, parce que la circulation pulmonaire subit elle-même des changements sous l'action des pressions variables auxquelles sont soumis les vaisseaux afférents et efférents. De la comparaison des courbes obtenues avec thorax ouvert et avec thorax fermé il résulte aussi, toutefois, que les pressions variables exercées sur la face externe du cœur — facteur entièrement nouveau — n'ont pas grande influence sur la pression sanguine artérielle, au moins si l'on ne donne pas à la pression trachéale, employée à gonfler les poumons, des valeurs par trop fortes. M. Kuhn avait déjà remarqué que la forme de la courbe des pressions sanguines n'éprouve guère de changement quand on ouvre le thorax. La même observation a été faite par M. Kowalewsky, qui trouva seulement qu'en cas de thorax ouvert les oscillations étaient un peu moins étendues qu'en cas de thorax fermé. Si cette influence exercée sur le cœur, et par suite sur son activité, ne peut être niée complètement,

il ressort suffisamment, de ce qui précède, que pour les oscillations de la pression sanguine artérielle cette influence doit être faible.

Reste donc à examiner l'influence des variations de la pression intra-thoracique sur les vaisseaux afférents et efférents des poumons. Je n'ai pas besoin de reproduire les raisons, déjà développées dans des Mémoires antérieurs, pour lesquelles cette influence sera plus grande sur les veines pulmonaires (vaisseaux efférents) que sur l'artère pulmonaire (vaisseau afférent); je n'ai pas non plus à répéter pourquoi, lorsqu'on veut étudier la capacité et la vitesse circulatoire pulmonaires en particulier, dans des circonstances se rapprochant le plus possible de celles qui nous occupent, la circulation artificielle à travers les poumons doit être effectuée par gonflement et affaissement alternatifs, le vaisseau afférent restant sous la pression atmosphérique, le vaisseau efférent se trouvant sous l'influence de la pression positive qu'occasionne l'insufflation. Les circonstances ne me permettaient que très difficilement d'exécuter ces expériences, qui d'ailleurs, après toutes les recherches auxquelles je me suis déjà livré sur la circulation pulmonaire, ne me paraissaient pas absolument nécessaires pour autoriser à tirer des conclusions.

En ce qui concerne la capacité, j'ai fait voir antérieurement que, lorsque les poumons sont suspendus dans un flacon: *a* la capacité des vaisseaux pulmonaires augmente, lors de l'épanouissement par aspiration, si les vaisseaux afférent et efférents restent sous la pression atmosphérique; *b* la capacité diminue, si les vaisseaux afférent et efférents se trouvent sous la pression aspiratrice; *c* le changement de capacité est intermédiaire entre les deux précédents, si le vaisseau afférent est soumis à la pression atmosphérique, le vaisseau efférent à la pression aspiratrice. Ordinairement, dans ce dernier cas, on pouvait encore observer une légère augmentation de la capacité. J'ai aussi, en traitant de ce sujet, nommé les facteurs dont dépend la capacité des vaisseaux pulmonaires. Ce sont: 1° l'élargis-

sement des vaisseaux pulmonaires par la pression du sang dans les vaisseaux afférent et efférents; 2° la pression de l'air sur les vaisseaux des vésicules pulmonaires, pression qui tend à diminuer la capacité de ces vaisseaux; 3° l'extension que les vaisseaux pulmonaires éprouvent, tant dans la direction longitudinale que dans la direction perpendiculaire à l'axe, lors de l'épanouissement par aspiration. La diminution de capacité, à laquelle l'épanouissement par aspiration donne lieu lorsque les vaisseaux afférent et efférents se trouvent sous la pression aspiratrice, dépend du facteur 1; celui-ci agit, dans ces circonstances, en sens contraire du facteur 3, tandis que le facteur 2 ne change pas et est donc sans influence. Le facteur 1 réduit la capacité, le facteur 3 l'agrandit, mais, comme le montre l'expérience, c'est le facteur 3 qui a le dessus. Lorsqu'on ne laisse agir la pression aspiratrice que sur le vaisseau afférent, le facteur 1 intervient, lors de l'épanouissement, beaucoup moins que dans le cas précédent, et par suite le facteur 3 peut mieux faire sentir son influence; il en résulte que parfois la capacité ne subit aucun changement, en d'autres termes qu'il y a compensation complète entre 1 et 3, mais que généralement, l'expérience nous l'apprend, le facteur 3 prédomine tant soit peu. J'ai montré en outre, dans mes communications antérieures, que *durante vita* on peut admettre, lors de l'inspiration, un certain accroissement de capacité.

Suivons maintenant ce même raisonnement dans le cas où l'épanouissement a lieu par insufflation. Deux facteurs entrent alors en jeu pour déterminer la capacité lors du gonflement et de l'affaissement; ces facteurs sont: I° l'élargissement des vaisseaux pulmonaires par la pression du sang dans les vaisseaux afférent et efférents, II° le rétrécissement des vaisseaux pulmonaires lors de l'épanouissement par une pression positive exercée dans la trachée. Le second facteur est, à proprement parler, composé de deux parties différentes, savoir, la pression de l'air sur les vaisseaux alvéolaires et le changement de diamètre des vaisseaux par l'épanouissement des poumons con-

sidéré en lui-même. Mais, comme nous ne sommes pas en état de faire épanouir les poumons sans changer, ou bien la pression de l'air sur les vaisseaux alvéolaires (insufflation), ou bien la pression sur la surface de la plèvre (aspiration), il est impossible d'étudier séparément, par voie expérimentale, les deux éléments du facteur II.

Le facteur I tendra à agrandir la capacité des vaisseaux pulmonaires, le facteur II (d'après l'expérience) à la réduire. Les deux facteurs agissent donc en sens contraire, et ce serait à l'expérience de décider quel changement de capacité se produit lors de l'épanouissement par insufflation, quand la pression positive de l'insufflation agit en même temps sur les vaisseaux afférent et efférents. L'expérience appendrait probablement, je crois pouvoir l'induire par analogie, que dans ces conditions la capacité augmenterait, ce qui est exactement le contraire du changement, savoir diminution de capacité, qui se produit lorsque l'épanouissement a lieu par insufflation, mais que les vaisseaux afférent et efférents restent sous la pression atmosphérique; il se manifesterait donc ici la même opposition que nous avons trouvée antérieurement dans le cas de l'épanouissement par aspiration.

Si le vaisseau afférent est soumis à la pression atmosphérique, le vaisseau efférent à la pression positive de l'insufflation, le changement de capacité sera encore intermédiaire entre les deux changements dont nous venons de parler; en d'autres termes, il pourra être nul, mais le plus souvent il y aura une petite *diminution* de capacité, de même que nous avons vu antérieurement, dans le cas de l'épanouissement par aspiration, se produire en général une certaine *augmentation* de capacité. Or, les susdites conditions se rapprochant le plus de celles qui existent lorsque le thorax est fermé et que les poumons sont épanouis par insufflation, je crois pouvoir hardiment conclure à une certaine *diminution* de capacité lors de cet épanouissement, de même que j'ai conclu, antérieurement, à une certaine *augmentation* de capacité lors de l'in-

spiration naturelle. Lors de l'affaissement après insufflation il se produira donc une certaine *augmentation* de capacité.

En ce qui concerne la vitesse circulatoire, j'ai trouvé antérieurement, par la voie expérimentale, que, pour l'épanouissement par aspiration, cette vitesse était maximum dans l'état épanoui, lorsque le vaisseau afférent se trouvait sous la pression atmosphérique, le vaisseau efférent sous l'influence de l'aspiration. Dans le cas de l'insufflation, je crois donc pouvoir de nouveau admettre, par analogie, que la vitesse circulatoire sera minimum dans l'état épanoui, lorsque le vaisseau afférent sera soumis à la pression atmosphérique, le vaisseau efférent à la pression de l'insufflation. Après les développements présentés ci-dessus, à propos du changement de capacité, il sera inutile de reproduire des raisonnements analogues pour le changement de la vitesse circulatoire.

La conclusion de tout ce qui précède, c'est que durant la vie, lorsque les poumons sont épanouis par insufflation, — le thorax étant fermé, l'animal curarisé et les nerfs vago-sympathiques coupés, — la capacité des vaisseaux pulmonaires devient un peu plus petite, tandis que la vitesse circulatoire est, dans l'état d'épanouissement des poumons, beaucoup moindre que dans l'état d'affaissement. Il semblerait en résulter que, en cas de thorax fermé, les courbes de la vitesse circulatoire doivent être plus prononcées, les courbes de la capacité moins prononcées, qu'en cas de thorax ouvert.

Mais il faut encore tenir compte d'un autre facteur, par l'intervention duquel les courbes de la capacité acquerront, elles aussi, plus de force que lorsque le thorax est ouvert. Si l'on compare les deux cas d'épanouissement par insufflation à thorax ouvert et à thorax fermé, il est évident que dans le premier cas la pression intérieure des poumons, par conséquent la pression qui règne sur les vaisseaux alvéolaires, variera beaucoup moins, lors du gonflement et de l'affaissement, que dans le second cas. En effet, pour amener les poumons seuls, donc en cas de thorax ouvert, à un certain degré d'épanouissement,

il faut une certaine pression trachéale positive, laquelle est égale à l'action des forces élastiques des poumons dans l'état d'extension supposé. Si le thorax est encore fermé, et qu'on veuille produire le même degré d'épanouissement, on devra exercer une pression trachéale beaucoup plus forte, car il s'agira non-seulement de vaincre les forces élastiques des poumons, mais aussi de mouvoir toute la paroi thoracique, diaphragme, côtes, etc. (au moins si l'épanouissement va jusqu'à un degré où le thorax est dérangé de son état d'équilibre, ce qui arrive très vite). Par cette pression positive les poumons seront en quelque sorte refoulés contre la paroi thoracique, et les vaisseaux alvéolaires seront donc comprimés, contre cette paroi, par la pression intra-alvéolaire. Il est clair que la pression négative entre les feuillets de la plèvre a alors disparu et s'est changée en pression positive. Abstraction faite de la différence de pression produite entre l'artère pulmonaire et les veines pulmonaires (différence dont nous avons ci-dessus examiné l'influence), cette haute pression intra-alvéolaire modifiera fortement la cavité des vaisseaux alvéolaires, et par suite, lors de l'épanouisement à thorax fermé, la capacité subira, aussi bien que la vitesse circulatoire, des changements plus considérables que lors de l'épanouissement à thorax ouvert.

Ainsi, à thorax fermé comme à thorax ouvert, la capacité des vaisseaux pulmonaires et la vitesse circulatoire diminuent lors de l'insufflation, augmentent lors de l'affaissement; en outre, de même que je l'ai remarqué antérieurement pour la respiration ordinaire, les changements que la cavité du ventricule gauche éprouve sous l'influence des variations de la pression intrathoracique s'ajouteront aux changements de capacité des vaisseaux pulmonaires et contribueront donc à amplifier les courbes de la capacité. Il est aussi possible que, lorsque la pression sanguine moyenne est basse dans le système aortique, l'aorte thoracique changera de diamètre et concourra également à agrandir la courbe de la capacité. Dans

les circonstances ordinaires toutefois, c'est-à-dire quand la pression moyenne du sang artériel est normale et que les pressions trachéales positives n'ont pas des valeurs par trop fortes, la capacité du tronc aortique ne variera sans doute, pour des raisons que j'ai développées ailleurs, que dans une faible proportion.

Nous voyons donc que *les oscillations qu'on observe dans la pression sanguine artérielle, tant à thorax fermé qu'à thorax ouvert, doivent être expliquées par les modifications de la circulation pulmonaire qui se produisent dans ces circonstances, et que ces oscillations, dans les deux cas, peuvent affecter des formes différentes.*

Maintenant que nous avons appris à connaître de plus près les oscillations de la pression sanguine dans le cas de la respiration artificielle, il n'est pas sans intérêt de les comparer un instant avec les oscillations auxquelles donne lieu la respiration ordinaire. Dans les circonstances les plus normales, c'est-à-dire pour la valeur ordinaire de la pression sanguine moyenne et pour une respiration régulière et pas trop rapide (toujours après section des nerfs vago-sympathiques), les formes des oscillations en cas de respiration ordinaire et de respiration par soufflet sont, ainsi que je l'ai déjà montré antérieurement et ainsi qu'il résulte de la comparaison des courbes du Mémoire actuel avec celles de mes Mémoires précédents, directement opposées l'une à l'autre; par exemple:

en cas d'inspiration ordinaire........	d'abord	abaissement	puis	élévation	de la pression du sang
„ „ d'insufflation.................	„	élévation	„	abaissement	„ „ „ „ „
„ „ d'expiration ordinaire.........	„	élévation	„	abaissement	„ „ „ „ „
„ „ d'affaissement (après insufflation)	„	abaissement	„	élévation	„ „ „ „ „

et cela, parce que la capacité et la vitesse circulatoire se comportent d'une manière inverse dans les deux modes de respiration, et que, dans les circonstances ci-dessus spécifiées, les courbes résultantes, courbe de la capacité et courbe de la vitesse circulatoire, apparaissent toutes les deux.

Si, par suite de circonstances particulières, la courbe de la capacité acquiert la prépondérance dans l'un des cas, la courbe

de la vitesse circulatoire dans l'autre, il peut arriver que les formes des courbes, pour les deux modes de respiration, se rapprochent l'une de l'autre; ainsi:

en cas d'inspiration ordinaire lente.... ..seulement élévation de la pression sang (donc absence de la courbe de la capacité).
„ „ d'insufflation plus rapide......... „ élévation de la pression sang (donc absence de la courbe de la vitesse circulatoire).
„ „ d'expiration ordinaire lente.......seulement abaissement de la pression sang (donc absence de la courbe de la capacité).
„ „ d'affaissement plus rapide (après insufflation)„ abaissement de la pression sang (donc absence de la courbe de la vitesse circulatoire).

On pourrait citer encore d'autres exemples dans lesquels l'oscillation de la pression sanguine, en cas de respiration par aspiration, devient de même forme, pour ce qui concerne l'élévation et l'abaissement de la pression, que l'oscillation en cas de respiration par insufflation; mais nous savons maintenant que, si la forme est semblable, la cause qui lui donne naissance est toute différente dans les deux cas.

Après l'étude que nous avons faite antérieurement des oscillations respiratoires de la pression sanguine en cas de respiration normale, et celle à laquelle nous venons de nous livrer pour le cas de la respiration par soufflet, il sera plus facile d'expliquer les oscillations qui se produisent lors de la respiration d'air condensé ou raréfié.

MM. Vivenot [1]), Panum [2]), Jacobson et Lazarus [3]), et P. Bert [4]) ont examiné l'influence que la condensation ou la raréfaction de l'air exercent sur l'organisme total, ou sur la circulation, lorsque l'animal ou l'homme sont plongés tout entiers dans l'air condensé ou raréfié. Comme les résultats de ces travaux n'ont pas de rapports directs avec l'objet du présent Mémoire, je puis les passer sous silence. Les premières

1) *Arch. f. pathol. Anat*, Bd. XIX, 1860.
2) *Arch. f. d. ges. Physiol.*, Bd. I, 1868.
3) *Centr. f. d. medic. Wissensch.*, 1877.
4) *La pression barométrique*

recherches qui visent plus directement le but que nous nous proposons, sont celles de M. Einbrodt [1]). Ayant appliqué à des animaux une pression respiratoire positive (+ *P R*), M. Einbrodt vit la pression sanguine s'élever tant que cette + *P R* augmentait. Quand cette + *P R* était maintenue, la pression du sang artériel commençait à baisser. Il pense que + *P R* entrave l'afflux du sang au cœur droit, diminue l'effet utile du cœur, et par suite fait baisser la tension dans l'aorte. Lorsqu'on appliquait une + *P R* très forte, la courbe de la pression du sang dans la carotide devenait après l'abaissement une ligne droite, bien que les pulsations du cœur continuassent, comme le montrait une aiguille enfoncée dans cet organe. Une pression respiratoire négative (— *P R*) agit d'une double manière sur la pression sanguine, en accélérant l'action du cœur et en remplissant cet organe d'un excès de sang; la pression artérielle moyenne s'élève. M. Einbrodt se servit des résultats de l'application de + *P R* et de — *P R* pour expliquer les oscillations respiratoires ordinaires.

M. Grehant [2]) vit, chez un chien curarisé, la pression s'abaisser fortement dans l'artère fémorale lorsqu'il amenait l'air dans les poumons sous une pression de 15 cm de mercure, Les ondes cardiaques devenaient de plus en plus petites et finissaient par disparaître complètement. Exécutée sur le lapin, l'expérience donna un résultat analogue. La section des nerfs vago-sympathiques n'excerce pas d'influence sur la manifestation des phénomènes. M. Gréhant conclut que l'air comprimé entrave la circulation dans les poumons, et il croit en trouver encore une preuve directe dans le fait que, simultanément, la pression s'élève fortement dans la veine cave.

M. Waldenburg [3]) expérimenta avec son appareil pneuma-

---

[1]) *Sitzungsber. d. k. Akad. d Wissensch. zu Wien*, Bd.XL, 1860.

[2]) *Comptes-Rend.*, T. XXIII, 1871.

[3]) *Die pneumatische Behandlung der Resp. u. Circ. Krankheiten etc.*, 1875, Berlin.

tique sur l'homme, et apprécia d'après les phénomènes du pouls l'influence que l'air comprimé ou raréfié excerce sur la circulation. Comme nous ne nous occupons pour le moment que des phénomènes mécaniques, je pourrais à la rigueur m'abstenir de parler de ces recherches de M. Waldenburg. Toutefois, il ne sera pas sans intérêt d'en mentionner brièvement les résultats, afin qu'on puisse les comparer avec ceux que j'espère communiquer bientôt moi-même.

M. Waldenburg distingue 4 cas. Lors de l'inspiration ordinaire la pression sanguine baisse, dit-il, parce que, la pression négative intrathoracique devenant plus grande, la systole du cœur s'opère plus difficilement. Quand on inspire de l'air comprimé, cette augmentation de pression de l'air favorise la systole, et la pression aortique croît; en même temps, l'écoulement du sang des veines dans le ventricule droit est rendu plus difficile. Autant la petite circulation perd de sang, autant la grande circulation en gagne. L'inspiration d'air comprimé alternant avec l'expiration libre, il semblerait que l'action de cette pression de l'air dût être, non pas continue, mais intermittente. On constate toutefois, d'après M. Waldenburg, qu'une pareille intermittence n'existe pas. Tous les phénomènes du cœur, du pouls et des vaisseaux persistent pendant l'expiration libre subséquente; parfois, il est vrai, on observe des différences d'intensité, mais elles ne sont jamais de nature à faire supposer une inversion d'action. Le surcroît de tension du pouls se conserve encore quelque temps après la cessation de l'expérience; quand l'action de l'air comprimé a été prolongée suffisamment, l'effet est même encore appréciable au bout de plusieurs semaines, preuve évidente, dit M. Waldenburg, que les phénomènes ne dépendent pas directement de causes mécaniques.

Quand on expire de l'air comprimé, la pression intrathoracique peut même, de négative, devenir positive. Toutes les réactions sur le cœur et sur la circulation doivent alors être encore plus fortes; la pression aortique est surélevée,

l'écoulement du sang des veines dans le ventricule droit est entravé. Dans ce cas non plus, il n'y a intermittence d'effet.

L'air raréfié exerce sur l'appareil circulatoire une action précisément inverse de celle de l'air comprimé. La pression négative intrathoracique s'élève. Lors de l'inspiration d'air raréfié, la systole du cœur se fait plus difficilement, et par suite la pression aortique s'abaisse. Lorsque la raréfaction est très forte, la systole ne peut plus du tout s'accomplir. Le passage du sang des veines dans le cœur droit est facilité. L'appareil de la petite circulation contient un excès de sang, lequel est enlevé à la grande circulation. Lors de l'expiration d'air raréfié, on observe dans l'appareil circulatoire les mêmes phénomènes que lors de l'inspiration d'air raréfié, mais à un moindre degré. Dans ces deux cas, l'action de l'air raréfié persiste aussi pendant les respirations suivantes.

L'appareil de M. Waldenburg a aussi servi aux expériences de MM. Drosdoff et Botschetscharoff [1]). Ceux-ci relièrent cet appareil, au moyen d'un tube, à la trachée d'un animal. Entre l'appareil et la trachée se trouvait un robinet, qu'on manœuvrait à la main et qui agissait de telle sorte que l'animal inspirait, par exemple, dans l'air comprimé et expirait dans l'atmosphère ordinaire. Dans ce cas ils voyaient directement, lors de l'inspiration, la pression s'abaisser dans la carotide et les oscillations de la pression artérielle devenir beaucoup plus grandes; l'abaissement se produisait aussi après la section des nerfs vago-sympathiques. M. Drosdoff explique cet abaissement de la pression sanguine par les entraves apportées à la circulation pulmonaire. Non-seulement en employant un accroissement de pression de $\frac{1}{22}$ d'atmosphère, mais aussi avec $\frac{1}{60}$ d'atmosphère, et même avec toutes les pressions que l'appareil Waldenburg permet d'obtenir, on n'observa jamais une élévation de la pression artérielle, mais toujours un décroissement notable. Lors de l'inspiration

---

1) *Centralbl. f. med. Wissensch.*, 1875.

ordinaire, dit M. Drosdoff, la pression artérielle baisse à cause de l'augmentation de la pression négative dans le thorax. L'inspiration dans un air légèrement comprimé favorise l'accroissement d'élasticité du tissu pulmonaire, agrandit par suite la pression négative et en accélère la production, ce qui à son tour augmente l'abaissement de la pression artérielle pendant l'inspiration. Mais cela n'est le cas que pour de très faibles degrés de compression de l'air inspiré. Tous les degrés supérieurs diminuent l'effet de la pression négative; par suite de cette diminution de la force aspiratrice du thorax, l'afflux du sang au cœur droit est entravé, et un abaissement de la pression aortique en est la conséquence. La respiration dans un air raréfié ferait, d'après cela, croître la pression artérielle. Les résultats des expériences de MM. Drosdoff et Botschetscharoff se résument de la manière suivante: Inspiration dans l'air comprimé: 1° les oscillations respiratoires de la pression sanguine deviennent plus longues et plus profondes; 2° la pression du sang baisse dès que l'animal commence à respirer de l'air comprimé, et elle reste abaissée tant que dure l'inspiration d'air comprimé; après que la trachée a été séparée de l'appareil, la pression sanguine s'élève au-dessus de la valeur ordinaire, puis, au bout de peu de temps, redevient normale; 3° la pression sanguine baisse pour tous les degrés de compression qu'on peut donner à l'air au moyen de l'appareil Waldenburg; 4° le travail du cœur diminue, comme le montre la diminution de l'ascension systolique; 5° l'influence est de nature purement mécanique, car le même effet se produit lorsque, au lieu d'air, on emploie de l'hydrogène pur; 6° la pression veineuse est augmentée; 7° lorsqu'une petite portion de côte est reséquee, on voit, pendant l'inspiration d'air comprimé, le tissu pulmonaire devenir plus pâle. Expiration dans l'air raréfié; elle a un effet directement opposé au précédent: 1° la pression aortique s'élève, aussi bien dans les circonstances ordinaires qu'après la section des nerfs vago-sympathiques; 2° les ascensions systoliques deviennent plus

fortes; 3° on n'observe aucune augmentation de la pression veineuse. Les résultats de MM. Drosdoff et Botschetscharoff sont donc, pensent-ils, en complète opposition avec ceux de M. Waldenburg.

M. Zuntz [1]) distingue également plusieurs cas. Pour l'expiration dans l'air comprimé et l'inspiration dans l'air raréfié, il emploie les soupapes de Müller ou une combinaison de ces soupapes avec l'appareil Waldenburg. Lors de l'expiration dans l'air comprimé, il voit se produire de fortes oscillations de la pression sanguine, la pression moyenne devenant plus petite; cette expiration exagère l'effet de l'inspiration normale; ici encore, de fortes oscillations, mais une pression sanguine moyenne dépassant la valeur ordinaire. Pour l'inspiration dans l'air comprimé et l'expiration dans l'air raréfié, M. Zuntz a recours à des manœuvres de robinets. Dans le premier cas, il constate une élévation de la pression sanguine. Lorsque l'inspiration et l'expiration se font toutes les deux dans l'air comprimé, l'effet est beaucoup plus considérable; la pression moyenne s'abaisse. Lors de l'expiration dans l'air raréfié, la pression du sang augmente un peu. M. Zuntz attache beaucoup de valeur à l'influence des variations de la pression intrathoracique.

Puisque nous possédons encore, comme on le voit, si peu de données exactes et concordantes sur les formes des oscillations de la pression sanguine artérielle en cas de respiration dans l'air condensé ou raréfié, il me paraît en premier lieu nécessaire d'établir quelles sont ces formes et de déterminer avec soin les circonstances dont dépend leur différence. Dans ce cas aussi, je regarde comme essentiel de rechercher d'abord l'influence des conditions mécaniques, ce qui, j'en ai déjà fait la remarque, nous sera certainement plus facile maintenant que nous avons appris à connaître ces conditions dans

---

[1]) Pflüger's *Arch. f. d. ges. Physiol.*, Bd. XVII, 1878.

les divers modes de respiration. Mais, pour cela, il faut avant tout que les variations de l'action cardiaque, dues aux influences nerveuses, soient exclues, et que par conséquent les nerfs vago-sympathiques soient coupés dans toutes les expériences; en outre, on doit veiller à ce qu'en aucun cas il ne se produise de dyspnée.

Nous pouvons distinguer 8 cas différents:

1° inspiration dans l'air raréfié et expiration libre.
2° „ „ „ comprimé „ „ „
3° „ libre „ „ dans l'air raréfié.
4° „ „ „ „ „ „ comprimé.
5° „ dans l'air raréfié „ „ „ „ comprimé.
6° „ „ „ comprimé „ „ „ „ raréfié.
8° inspiration et expiration toutes les deux dans l'air raréfié.
8° „ „ „ „ „ „ „ „ comprimé.

Le point important est de faire agir ces différentes pressions d'air juste au moment opportun. Pour cela, l'emploi de robinets manœuvrés à la main me paraît peu convenable, vu qu'aucun chien ne respire avec une régularité telle qu'on soit assuré de tourner toujours le robinet au bon moment; or ce sont précisément les différentes formes de respiration qu'on rencontre chez un chien ne respirant pas régulièrement qui doivent être étudiées quant à leur influence sur la pression sanguine. Les soupapes de Müller ont l'inconvénient de mal se prêter à l'inspiration et l'expiration libres, car elles obligent toujours à vaincre une certaine pression; en outre, elles ne permettent pas de réaliser tous les 8 cas ci-dessus énumérés, même quand elles sont combinées avec un ou plusieurs appareils de Waldenburg. En conséquence, j'ai cherché dès l'origine à faire mouvoir les robinets par l'animal lui-même, ou du moins à lui faire exécuter des fermetures semblables à celles que donnent les robinets, et cela précisément à la fin de chaque phase respiratoire. La disposition de l'appareil, que j'ai employé à cet effet, est représentée dans la Planche IX.

A la carotide du chien est relié, de la manière ordinaire,

le manomètre H du kymographion de Ludwig. Dans la trachée, mise à découvert, on fixe une canule. A cette canule est adapté un tube T, d'où part bientôt, par l'intermédiaire d'une pièce en T, un tube latéral, muni à son extrémité d'un robinet p. Provisoirement, ce robinet reste fermé d'une manière permanente. Cette partie du tube est en effet destinée à d'autres expériences, décrites plus loin, dans lesquelles on y adapte un soufflet pour la respiration artificielle. De cette partie du tube (en avant du robinet) se détache, de nouveau au moyen d'une pièce en T, un tube $t_{,}$, qui est relié à un tambour enregistreur $T_{,}$. Le levier de ce tambour inscrira sur le papier sans fin du kymographion de Ludwig toutes les variations de pression qui se produisent dans la trachée. Le tube T lui-même se divise bientôt en deux branches a et $a_{,}$. Ces tubes a et $a_{,}$ sont en caoutchouc et d'une bonne largeur. Ils se terminent par des tubes de verre, qui, après avoir traversé des lièges fermant hermétiquement, débouchent à la partie supérieure, occupée par de l'air, de deux flacons tubulés F et $F_{,}$, dont le reste de la capacité est rempli d'eau. Les tubulures de ces flacons communiquent respectivement, par de longs tubes en caoutchouc, avec les flacons f et $f_{,}$, qui sont suspendus et peuvent, au moyen de poulies, être élevés ou abaissés à volonté. Les tubes a et $a_{,}$ passent respectivement sur les forts électro-aimants M et $M_{,}$; au-dessus de chacun de ces électro-aimants se trouve un morceau de fer doux, qui est maintenu par un ressort énergique au-dessus du tube de caoutchouc, de manière à ne pas le comprimer (ce ressort n'est pas dessiné dans la figure). Dès qu'un courant galvanique traverse le fil de l'électro-aimant, le morceau de fer doux est attiré, et le tube, placé dessous, est comprimé et fermé. Quand le courant s'arrête, l'action du ressort et l'élasticité du tube de caoutchouc, lequel tendra sans cesse à reprendre sa forme cylindrique, relèvent le fer doux, et par suite la cavité du tube redevient libre. Les électro-aimants dont je me suis servi étaient énergiques, et lorsque le courant de deux éléments de

Grove (la figure, vu l'insuffance de l'espace, ne représente qu'un seul élément pour chaque électro-aimant) passait par le circuit, le fer doux était attiré avec tant de force qu'immédiatement la cavité du tube disparaissait complètement en ce point, et que le tube y était complètement fermé. Il ne s'agit plus que de faire agir alternativement, à la fin de chaque phase respiratoire, l'un des électro-aimants.

A cet effet, je plaçai sur le thorax de l'animal, à côté du sternum, un coussin pneumatique ordinaire L, assujetti au moyen d'un ruban entourant le thorax. Le coussin pneumatique est relié par le tube l au robinet k; de ce tube l se détachent latéralement, par des pièces en T, deux tubes i et e. Le tube i va au tambour de l'appareil I, le tube e à celui de l'appareil E. Ces deux appareils consistent chacun en un tambour ordinaire, muni d'un levier. A l'extrémité du levier se trouve une pointe en platine, à laquelle est relié, par une spirale très lâche, un fil conducteur. Le fil de I se rend à l'électro-aimant M, le fil de E à $M_{,}$; de chaque électro-aimant le fil se dirige vers deux éléments de Grove (dont un seul, C et $C_{,}$, est représenté dans la figure), et de ces élements chaque fil retourne à une petite lame de platine, laquelle en I est placée au-dessus et en E au-dessous de la pointe en platine dont il a été question ci-dessus. Dans le circuit de C à I est en outre intercalé un électro-aimant $I_{,,}$ qui actionne une aiguille pouvant inscrire sur le papier sans fin.

Le fonctionnement de cet appareil est facile à comprendre. En supposant le robinet k fermé, à chaque inspiration le coussin à air L sera comprimé, et par suite les leviers des tambours I et E s'élèveront, pour s'abaisser à l'expiration suivante. Si maintenant le robinet k est ouvert d'une quantité convenable, à déterminer par tâtonnement, chaque inspiration produira bien un accroissement de pression dans le système des tubes du coussin à air L et fera donc s'élever les leviers I et E, mais cette élévation ne persistera que tant que la pression augmente dans les tubes, c'est-à-dire

tant que dure le *mouvement* d'inspiration ; dès que ce mouvement cesse, dès que le thorax reprend une forme constante, l'air, qui dans les tubes en question se trouve sous une pression supérieure à celle de l'atmosphère, pourra s'échapper par k. A la fin de chaque inspiration les deux leviers reviennent donc à leur position horizontale. Réciproquement, à chaque expiration les deux leviers s'abaisseront, et cela aussi longtemps que durera le mouvement expiratoire, à la fin duquel ils reprendront leur position horizontale. Or, lorsque les leviers occupent la position horizontale (position du zéro), aucune des deux pointes de platine n'est en contact avec la lame de platine correspondante, et aucun des deux circuits électriques n'est donc fermé. Aussitôt que l'inspiration commence, un minimum d'élévation du levier de I suffira pour établir le contact entre la pointe et la lame de platine de I, l'électro-aimant M attirera le fer doux w, et le tube a sera fermé. Réciproquement, dès le début de l'expiration, dès le premier abaissement des leviers, le contact sera établi entre la pointe et la lame de E, l'électro-aimant $M_{,}$ attirera le fer doux $w_{,}$, le tube $a_{,}$ sera fermé et l'animal devra expirer par a. Un électro-aimant $I_{,}$ ayant encore été intercalé dans le circuit de I, chaque clôture et rupture du courant sera inscrite par $I_{,}$, et nous trouverons donc marqués sur le papier les instants où le tube a a été fermé et ouvert.

Enfin, un second coussin à air B, placé sur le thorax à l'autre côté du sternum, est relié au tambour $B_{,}$, dont le levier inscrira par conséquent tous les mouvements respiratoires du thorax, tandis qu'un second électro-aimant S, en rapport avec une pendule, enregistre le temps.

Il est clair qu'avec cet appareil on peut étudier chacun des 8 cas distingués plus haut. Il suffit, en effet, d'élever ou d'abaisser les flacons f et $f_{,}$, pour produire dans les espaces F et $F_{,}$ toutes les pressions voulues; l'animal inspirera sous la pression qui règne dans $F_{,}$ et expirera sous celle qui existe dans F. Pour les cas où l'on veut qu'une des phases de la

respiration ait lieu librement (dans l'atmosphère), on détache le tube a ou $a_,$ directement derrière l'électro-aimaint M ou $M_,$. Par $a_,$ l'inspiration sera libre, par a ce sera l'expiration.

Sur le papier on obtient 5 courbes: 1° la courbe de la pression du sang dans la carotide, par le manomètre H; 2° celle des mouvements respiratoires du thorax, par $B_,$; 3° celle des variations de la pression dans la trachée, par $T_,$; 4° celle des moments de fermeture et d'ouverture du tube a, par $I_,$; 5° celle du temps, par S. L'inscription simultanée de de ces divers éléments fournit, par elle-même, un bon contrôle de tout ce qui arrive. Si, par l'une ou l'autre circonstance, la fermeture ou l'ouverture de a (et l'ouverture de a coïncide avec la fermeture de $a_,$ lorsque l'expiration succède directement à l'inspiration, ce qui est le cas ordinaire) ne se fait pas juste à l'instant voulu, de sorte que les pressions produites dans les flacons n'agissent pas au moment opportun, savoir au commencement d'une phase respiratoire, les courbes l'accusent immédiatement.

Dans toutes mes expériences, le tube T ne restait attaché à la caule trachéale qu'aussi longtemps qu'il y avait de l'air dans les flacons; lorsque l'eau était passée d'un flacon dans l'autre, et que la provision d'air était donc pour ainsi dire épuisée, je laissais l'animal respirer tout à fait librement, en détachant le tube T de la canule. Cela était d'ailleurs nécessaire aussi parce que dans ces expériences l'animal était narcotisé par le chloroforme, et qu'il fallait donc, entre les différentes parties de l'expérience, lui administrer une nouvelle dose de narcotique. Cet intervalle de temps était utilisé en outre pour remettre les flacons à la hauteur voulue.

Avec l'appareil qui vient d'être décrit j'ai expérimenté sur différents chiens, après section des nerfs vago-sympathiques et production du narcotisme par la morphine et le chloroforme. Lorsque les deux premières expériences m'eurent mis entre les mains une assez longue série de courbes, il si trouva que les oscillations de la pression sanguine artérielle différaient

tant les unes des autres, présentaient des variations si nombreuses, qu'au premier abord je ne vis aucun moyen de les interpréter exactement. Provisoirement je modifiai donc la disposition de l'expérience, et ce n'est que plus tard que je revins au mode d'exécution ci-dessus décrit. Les courbes obtenues m'avaient déjà appris, en effet, que la forme des oscillations ne dépend pas seulement de l'épanouissement et de l'affaissement des poumons pendant l'inspiration et l'expiration et de l'action de l'air condensé ou raréfié, mais aussi, à un haut degré, de la vitesse avec laquelle cet air condensé ou raréfié agissait, comparativement à la vitesse de l'inspiration et de l'expiration. Lorsque l'animal respire lui-même, on ne peut régler à volonté la vitesse des mouvements respiratoires; tantôt la respiration s'accélère, tantôt elle se ralentit [1]), et dans ces deux cas la condensation ou la raréfaction de l'air n'agira pas de la même manière, surtout au point de vue des phénomènes de l'appareil circulatoire. Supposons, par exemple, que le mouvement d'inspiration ait lieu avec une certaine vitesse, et que les flacons de notre appareil soient placés de manière qu'en $F_{,}$ il y ait de l'air condensé; abstraction faite de l'influence du mouvement inspiratoire, et sous la seule action de la colonne d'eau des flacons, l'air s'écoulera alors avec une certaine vitesse par le tube T. Mais, en outre, l'air contenu dans ce tube sera, lors du mouvement d'inspiration, aspiré avec une certaine vitesse par les poumons. Or, si la vitesse ainsi communiquée à l'air par aspiration est grande,

[1]) L'irrégularité de la respiration du chien ne peut jamais être un motif de rejeter, ou de regarder comme inutilisables, les courbes de la pression sanguine obtenues en pareil cas; seulement, il faut connaître les facteurs qui entrent alors en jeu. Quelles que soient les conditions dans lesquelles la respiration s'exécute, il est nécessaire d'étudier l'influence des différences de vitesse des mouvements respiratoires. Le chien, qui tantôt respire rapidement et tantôt lentement, tantôt légèrement et tantôt profondément, même après que les nerfs vago-sympathiques ont été coupés, est, précisément à cause de cela, un excellent sujet d'expérimentation pour les recherches de ce genre.

parce que l'inspiration se fait rapidement, il peut arriver que cette vitesse surpasse celle avec laquelle l'air est poussé à travers le tube T sous l'influence de la colonne d'eau; le résultat sera que, dans ce cas, l'animal ne respirera pas de l'air condensé. Pour que, malgré cette vitesse d'inspiration, il y ait encore condensation, l'air devra être chassé avec plus de force à travers le tube T, en d'autres termes, le flacon $f_,$ devra être placé plus haut. Mais alors, si une inspiration suivante se fait de nouveau plus lentement, l'action de l'air condensé, sous l'influence de cette colonne d'eau plus haute, serait trop forte: bref, l'inégalité de vitesse des respirations de l'animal détermine tant de conditions diverses, réagissant à des degrés différents sur la circulation, qu'il est impossible d'expliquer toutes les oscillations qui apparaissent dans la pression sanguine artérielle, à moins de commencer par étudier séparément l'influence de chacune des conditions dont il s'agit

J'étais ainsi conduit, par la nature même des choses, à disposer les expériences de façon qu'on pût régler à volonté les mouvements respiratoires de l'animal et faire agir, suivant la vitesse de ces mouvements, telles pressions d'air qu'on jugeait convenables. La respiration propre devait donc être supprimée, l'animal devait être curarisé. Voici comment je m'y pris. Dans l'appareil ci-dessus décrit, les coussins à air, placés sur le thorax, furent enlevés, de même que les appareils I et E. Au tube latéral de T, près du robinet p, fut fixé un soufflet. Entre le soufflet et le robinet p se trouvait encore un dispositif conduisant à un réservoir d'oxygène, ce qui permettait d'introduire de temps en temps, au moyen du soufflet, de l'air riche en oxygène dans les poumons de l'animal. Les fils conducteurs, qui avaient été reliés aux appareils I et E, furent maintenant rattachés à un manipulateur télégraphique ordinaire, de telle sorte qu'en pressant sur le bouton du manipulateur on produisait la clôture d'un des deux circuits, celui de C par exemple, tandis que, lorsque le bouton se relevait, l'autre circuit, celui de $C_{,,}$ était fermé. Si l'on prend

donc le bouton dans la main, qu'on l'abaisse, puis le relève, les circuits C et $C_{\prime}$ seront alternativement fermés et ouverts, et par conséquent les fers doux w et w' seront alternativement attirés, les tubes a et a' alternativement occlus. Comme l'électro-aimant $I_{\prime}$ était conservé, l'occlusion et l'ouverture de a inscrivaient de nouveau sur le papier. Chez le chien, la cavité abdominale était ouverte et l'un des bras d'un levier était appliqué sur le diaphragme. L'autre bras de ce levier était en rapport avec un coussin à air, lequel communiquait avec le tambour $B_{\prime}$. En introduisant la main dans la cavité abdominale et serrant entre les doigts un pli du diaphragme, on pouvait, ainsi que je l'ai décrit antérieurement, imiter les respirations ordinaires, et tous ces mouvements étaient transportés sur le papier par le levier appliqué au diaphragme,

L'expérience fut disposée de manière que dans les pauses, qui en séparaient les différentes parties, l'animal était maintenu en vie au moyen de la respiration par soufflet ordinaire. Lorsque tout était préparé pour une partie d'expérience, on ouvrait le robinet du réservoir d'O et l'animal était amené dans l'état d'apnée. Ensuite on fermait le robinet p, de sorte que le soufflet était séparé de l'appareil. J'effectuais alors directement les mouvements respiratoires, en agissant avec la main sur le diaphragme. Dans l'autre main je tenais le bouton du manipulateur. J'étais donc complètement maître de donner aux mouvements respiratoires telle vitesse et telle forme que je désirais, et je pouvais aussi, à l'aide du bouton du manipulateur, faire agir les différentes pressions de l'air à tout moment voulu. Pour citer un exemple, je pouvais, en plaçant le flacon $f_{\prime}$ à une certaine hauteur, faire respirer l'animal dans de l'air condensé sous une certaine pression, puis, en mouvant le diaphragme plus ou moins rapidement, donner, pour cette même condensation, une vitesse plus ou moins grande au mouvement inspiratoire. Or, le style $B_{\prime}$ trace sur le papier la courbe des mouvements du diaphragme, le style $T_{\prime}$ celle des variations de la pression dans la trachée,

et la comparaison de ces deux courbes fera donc connaître à quelle vitesse d'inspiration il y a encore eu condensation réelle, à quelle autre vitesse cette condensation n'a plus existé. Le rapport entre les divers modes de respiration et les variations des oscillations de la pression sanguine se dévoile alors. Sur le papier nous obtenons 5 courbes: 1° celle de la pression du sang dans la carotide, par H; 2° celle des variations de la pression dans dans la trachée, par $T_,$; 3° celle des mouvements du diaphragme, par $B_,$; 4° celle des occlusions et des ouvertures du tube a, par $I_,$; 5° celle du temps, par S. J'ai expérimenté de cette manière sur 4 chiens différents, ce qui m'a donné une grande quantité de courbes, dont je pus interpréter exactement la forme dans chaque cas particulier, puisque les circonstances de ce cas avaient été choisies par moi-même. Mais les variations ainsi observées dans les oscillations sont trop nombreuses pour qu'il soit possible de les décrire toutes dans un Mémoire. Cela aurait d'ailleurs peu d'utilité, car, lorsque j'aurai communiqué les résultats généraux de mes expériences et analysé les circonstances qui occasionnèrent ces résultats, chaque cas particulier s'en déduira, en quelque sorte, de lui-même. Je me suis donc borné à partager en 3 groupes les différentes formes des oscillations de la pression sanguine, considérées dans leur rapport avec les 8 cas de respiration qui ont été distingués plus haut.

Avant de parler de ces groupes, toutefois, je noterai que l'appareil, tel qu'il vient d'être décrit, m'a aussi servi pour les expériences de respiration artificielle, dont les résultats ont été exposés dans la première partie de ce Memoire. Ainsi que je le disais à cet endroit, on ne peut que difficilement faire usage du soufflet ordinaire pour produire les différentes formes de gonflement et d'affaissement. L'appareil ci-dessus décrit, au contraire, donne le moyen de faire agir comme insufflations des pressions de degré quelconque et de déterminer à volonté des suspensions, soit pendant l'insufflation, soit pendant l'affaissement. Pour l'usage en question,

on n'a pas besoin du levier appliqué au diaphragme, dont il a été parlé ci-dessus, ni de la courbe correspondante. Le flacon $f_{,}$ est placé haut et le tube a détaché derrière M. On n'a qu'à presser sur le bouton du manipulateur télégraphique pour faire agir l'air condensé de $F_{,}$, c'est-à-dire pour faire gonfler les poumons, et lorsque ensuite le bouton sera relevé, l'affaissement se produira librement par le tube a. Il est inutile, je crois, d'entrer à ce sujet dans plus de détails.

Le trois groupes que je distingue sont les suivants:

Groupe I.

1° inspiration dans l'air raréfié et expiration libre
4° „ libre „ „ dans l'air condensé
5° „ dans l'air raréfié „ „ „ „ „

Groupe II.

2° inspiration dans l'air condensé et expiration libre
3° „ libre „ „ dans l'air raréfié
6° „ dans l'air condensé „ „ „ „ „

Groupe III.

7° inspiration et expiration dans l'air raréfié
8° „ „ „ „ „ condensé.

Dans le groupe I, les conditions, à l'intérieur du thorax sont qualitativement les mêmes que dans la respiration ordinaire; sous le rapport quantitatif seulement il y a des différences entre ces modes de respiration. Dans les circonstances ordinaires, en effet, la pression intrapulmonaire devient négative pendant le mouvement inspiratoire; si l'inspiration a lieu dans l'air raréfié, cette pression négative sera plus grande, et d'autant plus grande que la raréfaction est plus forte. Par suite, la pression intrathoracique (la pression négative sur la surface pleurale) sera aussi, dans cet état, plus grande que dans l'inspiration ordinaire. Pendant l'expiration ordinaire, la pression intrapulmonaire devient positive, et par suite, la pression intrathoracique devient moins négative; la même

chose aura lieu, à un degré plus haut, lors de l'expiration dans l'air condensé, de sorte que la pression intrathoracique pourra même devenir positive. Le facteur de l'action élastique des poumons, qui dépend du degré d'épanouissement de ces organes, influera de la manière ordinaire sur la grandeur de la pression intrathoracique, aussi bien dans les deux cas dont il vient d'être question que dans la respiration normale. Or, la circulation pulmonaire dépendant, comme nous le savons, du degré d'épanouissement produit par l'aspiration, de la pression intrapulmonaire (la pression sur les vaisseaux alvéolaires) et de la pression dans les vaisseaux afférents et efférents, on voit que les mêmes facteurs qui sont en jeu lors de la respiration ordinaire agiront aussi, dans le même sens, mais à un degré plus fort, dans les trois cas du groupe I; dans le cas n°. 1 ils agiront plus fortement à l'inspiration, dans le n°. 2 plus fortement à l'expiration, et dans le n°. 3 plus fortement tant à l'inspiration qu'à l'expiration [1]).

Effectivement, la courbe de la pression sanguine artérielle nous montre la forme ordinaire des oscillations respiratoires; celles-ci ont seulement, dans les trois cas du groupe I, plus d'amplitude que dans le cas de la respiration normale. On y trouve, de même que dans ce dernier cas, les courbes de la capacité et de la vitesse circulatoire, la première comme

---

[1]) Je négligerai de nouveau l'influence des pressions plus ou moins élevées sur la surface extérieure du cœur, vu que les condensations et raréfactions employées n'étaient pas fortes, au moins pour le groupe I, où, sauf par exception, elles ne dépassèrent pas 10—20 mm de mercure, tant dans le sens positif que dans le sens négatif. Dans les cas de ce groupe I, l'animal peut difficilement réagir sur des pressions supérieures. Dans les cas du groupe II, il les supporte mieux; aussi ai-je alors appliqué plus d'une fois, soit comme condensation, soit comme raréfaction, des pressions de 20—30 mm, ou même plus fortes. L'influence de ces variations de pressions sur l'oreillette gauche du cœur se manifestera, dans la courbe de la pression sanguine, de la manière ordinaire, c'est-à-dire comme courbe de la capacité, et elle s'ajoutera donc simplement à la courbe de la capacité des vaisseaux pulmonaires.

abaissement à l'inspiration et élévation à l'expiration, la seconde comme élévation à l'inspiration et abaissement à l'expiration. Ces oscillations sont, ainsi que je viens de le dire, plus étendues que lors de la respiration ordinaire, même quand une des phases respiratoires s'accomplit librement dans l'atmosphère (nos. 1 et 4). Le fait que, même dans cette phase libre, l'oscillation présente une amplitude plus grande, est une conséquence naturelle de l'état de la phase précédente, et nullement, comme le pense M. Waldenburg, la preuve que l'influence de l'air raréfié, exercée pendant l'inspiration, par exemple, se fait sentir encore pendant l'expiration libre subséquente. Aussi, lorsque après cette expiration libre les respirations suivantes restent libres dans leur totalité, à l'inspiration comme à l'expiration, la pression sanguine ne montre plus trace de l'influence de la respiration antérieure dans l'air raréfié ou condensé; la raison en est, tout simplement, que les modifications produites dans la pression sanguine étaient d'origine mécanique, et qu'elles devaient donc cesser dès que ces conditions mécaniques particulières avaient disparu. M. Waldenburg, toutefois, expérimentait sur l'homme, chez qui entrent aussi en jeu des influences nerveuses. C'est donc à celles-ci que doit être attribuée la persistance d'action observée dans ce cas.

Quant à la circonstance qu'une phase respiratoire libre, succédant à une phase accomplie dans l'air raréfié ou condensé, donne encore, elle-même, une oscillation plus forte que celle déterminée par la respiration ordinaire, cette circonstance, comme nous l'avons dit, est toute naturelle. En effet, lorsqu'une inspiration dans l'air raréfié a produit un plus fort agrandissement de la capacité, et par suite une plus forte courbe de la capacité dans la courbe de la pression sanguine, la diminution de la capacité lors de l'expiration libre subséquente sera également plus grande qu'à l'ordinaire, parce que, à partir de l'agrandissement anormal déterminé par l'inspiration dans l'air raréfié, la capacité doit fortement

changer pour revenir à sa valeur normale lors de l'expiration ordinaire. Il en sera de même lorsqu'à une expiration dans l'air condensé succède une inspiration libre. Et ce qui vient d'être dit des changements de la capacité s'applique aussi aux changements de la vitesse circulatoire.

Si une inspiration dans l'air raréfié est suivie d'une expiration dans l'air condensé, les changements de la circulation pulmonaire, lors du passage d'une phase respiratoire à l'autre, seront naturellement encore plus considérables, et les oscillations de la pression sanguine présenteront, par suite, encore plus d'amplitude.

Enfin, dans ce groupe I, la forme des oscillations reste soumise aux influences dont nous avons parlé antérieurement à propos de la respiration normale, savoir l'influence de la pression sanguine moyenne, celle de la vitesse des phases respiratoires, etc.

Tout autres sont les conditions qui existent dans le groupe II. Ici, deux groupes opposés de facteurs agissent à l'encontre l'un de l'autre.

En effet, si l'inspiration dans l'air condensé et l'expiration dans l'air raréfié sont pour un instant envisagés au seul point de vue de la condensation ou de la raréfaction, les choses se passeront comme si, lors de l'inspiration, les poumons étaient insufflés, et, lors de l'expiration, s'affaissaient sous l'influence d'une aspiration intrapulmonaire. En ce qui concerne le facteur en question, la circulation pulmonaire devra donc éprouver les mêmes changements que nous avons, au commencement de ce Mémoire, vus apparaître lorsque, le thorax étant fermé, les poumons sont épanoui par insufflation, puis s'affaissent librement; la seule différence, c'est que les effets de l'affaissement seront plus prononcés, à cause de l'aspiration intrapulmonaire.

Mais, dans le cas actuel, il y a en outre inspiration et expiration ordinaires (c'est-à-dire, épanouissement par aspiration

sur la surface pleurale), et, de ce chef, la circulation pulmonaire subira les changements qui ont lieu lors de la respiration normale, et dont j'ai déjà traité amplement dans des Mémoires antérieurs.

Or, nous savons que les changements de la circulation pulmonaire, et par conséquent aussi leurs effets sur la pression artérielle, sont, dans les deux cas (épanouissement par insufflation et par aspiration), directement opposés les uns aux autres. Lorsque les deux groupes de facteurs agissent simultanément, comme il arrive dans les 3 cas du groupe II, la résultante dépendra donc de la grandeur de l'action de chacun des groupes. Si l'on considère, en outre, que dans chaque groupe les facteurs particuliers n'agissent pas toujours avec la même force, mais que le degré de leur action dépend, comme nous l'avons vu, d'une série de circonstances, on pourra se faire une idée du grand nombre des variations dont est susceptible, dans ces cas, la forme des oscillations de la pression sanguine.

Donnons au premier groupe de facteurs le nom de facteurs de l'insufflation, au second celui de facteurs de la respiration normale. Le résultat de l'inspiration dans l'air condensé, ou de l'expiration dans l'air raréfié, ou des deux à la fois, dépendra principalement de la vitesse avec laquelle s'opère le mouvement respiratoire, comparée à la vitesse d'action de l'air condensé ou raréfié. Si la vitesse du mouvement respiratoire l'emporte, les facteurs de la respiration normale l'emporteront, et nous obtiendrons pour la pression sanguine une courbe dont la forme se rapprochera le plus de celle qui correspond à la respiration ordinaire. La vitesse du mouvement respiratoire est-elle au contraire plus faible, de sorte que la pression intrapulmonaire devient directement positive à l'inspiration, directement négative à l'expiration, alors la courbe de la pression sanguine ressemblera le plus à celle que nous obtenons par l'insufflation et l'affaissement des poumons en cas de thorax fermé. Remarquons encore que, lorsqu'à la phase respira-

toire dans l'air condensé ou raréfié succède une phase libre, l'oscillation de la pression sanguine dans cette phase libre sera produite par les facteurs de la respiration normale, avec cette différence, toutefois, que si, par exemple, une inspiration dans l'air condensé, où les facteurs de l'insufflation ont eu le dessus, est suivie d'une expiration libre, la circulation pulmonaire doit d'abord revenir à l'état ordinaire de l'expiration, avant que les facteurs de la respiration normale puissent se faire valoir de la manière ordinaire. Au commencement de la phase libre les effets de ce retour se feront donc sentir sur la pression artérielle, et plus tard seulement pourra s'accuser l'oscillation ordinaire de la respiration libre. Jusqu'à un certain point les phases libres éprouvent donc, dans le groupe II aussi, les conséquences de la condensation ou de la raréfaction de la phase précédente.

Outre les deux états extrêmes, qui ont été décrits ci-dessus, tous les états intermédiaires sont possibles. Quelques-uns des facteurs des deux groupes peuvent, par exemple, se neutraliser, ou bien les circonstances sont telles que, des facteurs d'un groupe, un petit nombre seulement peuvent se manifester.

Un exemple, parmi beaucoup d'autres, éclaircira ce qui précède. L'appareil étant disposé pour l'aspiration dans l'air condensé, effectuons, par une traction rapide sur le diaphragme, une inspiration rapide, avec suspension subséquente. La courbe de la pression trachéale montre alors que, malgré la condensation, la pression dans la trachée devient négative pendant le mouvement respiratoire, et ce n'est qu'à la fin du mouvement, ou durant la suspension, que cette pression négative se change en pression positive. Quant à la pression sanguine artérielle, nous la voyons d'abord baisser (courbe de la capacité de l'inspiration normale); puis se produit un relèvement, qui pendant la suspension devient plus fort (pour une partie, courbe de la vitesse circulatoire de l'inspiration normale, pour la dernière et plus forte partie, courbe de la capacité due à l'action de la condensation, donc insufflation;

cette dernière partie commence, en effet, au moment où la pression trachéale devient positive): ensuite, toujours pendant la suspension, il y a de nouveau un fort abaissement de la pression sanguine (courbe de la vitesse circulatoire de la condensation, donc insufflation). Sous une forme inverse, nous pouvons observer ces mêmes variations lors de l'expiration dans l'air raréfié, toutes les autres circonstances restant d'ailleurs les mêmes. Je pourrais multiplier les exemples de ce genre en indiquant chaque fois la forme de la courbe et les circonstances qui l'ont occasionnée; mais cela me paraît inutile, car je retomberais nécessairement dans de continuelles répétitions.

Avant de passer au groupe III, je dirai quelques mots des oscillations qu'on obtient pour les groupes I et II lorsque l'animal respire lui-même et qu'il n'est donc pas curarisé. Maintenant que nous avons appris, en réglant nous-mêmes les facteurs actifs, à connaître leur influence sur la pression artérielle, il nous sera facile d'interpréter les courbes qui se produisent quand l'animal respire lui-même, de l'une des 6 manières examinées jusqu'ici.

Dans ce cas nous retrouvons encore, pour le groupe I, les oscillations respiratoires ordinaires, dans leurs différentes formes, mais avec plus d'amplitude. Comme exemple, nous pouvons prendre la dernière partie, *bc*, de la fig. 6 (Pl. VIII). Cette partie provient d'un chien narcotisé par la morphine et le chloroforme et ayant les nerfs vago-sympathiques coupés; l'inspiration avait lieu dans l'air raréfié, l'expiration dans l'air condensé (n° 5 du groupe I). Nous voyons la forme ordinaire des oscillations respiratoires, mais elles sont plus fortement accentuées que celles qui avaient été observées chez le même chien pendant la respiration normale. A cela près, elles montrent de nouveau pendant l'inspiration, d'abord abaissement puis élévation de la pression sanguine, et, à la fin d'une longue inspiration, persistance à la même hauteur après élévation; pendant l'expiration, d'abord élévation puis abaissement de la

pression sanguine. Précédemment, en traitant des oscillations respiratoires ordinaires, j'ai remarqué que, à la fin d'une longue inspiration, la pression sanguine, après l'élévation (courbe de la vitesse circulatoire), peut rester à cette hauteur, ou même présenter de nouveau une tendance à l'abaissement; cela arrive lorsque, à la fin de cette inspiration, un nouvel état d'équilibre s'est établi dans la circulation pulmonaire, et que l'afflux du sang des veines caves au cœur droit est redevenu constant. C'est pour cette même raison que, dans le cas actuel (fig. 6), à la fin d'une longue inspiration dans l'air raréfié, nous voyons la pressson sanguine, après l'élévation (courbe de la vitesse circulatoire), se maintenir à la même hauteur, rester constante par conséquent.

Dans le groupe II, les oscillations de la pression sanguine varient à l'infini, mais les 4 courbes superposées sur la papier sans fin, courbes dont il a déja été question plus haut, nous donnent, maintenant que nous connaissons les facteurs actifs et leur influence, l'explication de toutes les variations. On voit clairement, de nouveau, comment, toutes choses égales d'ailleurs, la prédominance, soit des facteurs de la respiration normale, soit des facteurs de l'insufflation, détermine la forme des oscillations. La première partie, *ab*, de la fig. 6, fournie par le même chien, immédiatement avant la partie *bc*, offre un exemple du cas n° 6 du groupe II; l'inspiration avait lieu dans l'air condensé, l'expiration dans l'air raréfié. Au commencement de chaque phase les mouvements respiratoires s'exécutaient rapidement, de sorte que, comme l'indiquait la pression trachéale, la condensation ne se produisait que dans le cours de l'inspiration, la raréfaction dans le cours de l'expiration. Pendant l'inspiration, nous voyons d'abord un léger abaissement de la pression sanguine (courbe de la capacité de l'inspiration normale), ensuite une forte élévation (courbe de la capacité de la condensation), puis de nouveau un abaissement plus lent (courbe de la vitesse circulatoire de la condensation); pendant l'expiration, c'est l'inverse: d'abord

une légère élévation, ensuite un grand abaissement, puis de nouveau une lente élévation de la pression sanguine. Si l'on compare la partie *ab* avec la partie *bc*, la différence est frappante.

Il nous reste maintenant à considérer les cas du groupe III. Dans ces cas, où les deux phases de la respiration s'accomplissent soit dans l'air condensé, soit dans l'air raréfié, les oscillations de la pression sanguine sont étendues, mais ne présentent rien de particulier quant à leur forme. Ce sont les oscillations de la respiration ordinaire. La raison en est facile à saisir. Pour les changements périodiques de la circulation pulmonaire il est indifférent (dans une certaine mesure) sous quelle pression se trouve l'air dans lequel l'animal respire. Les variations des pressions intrathoracique et intrapulmonaire, avec leurs conséquences, se produiront toujours dans le même sens, quelle que soit la pression moyenne absolue à l'intérieur des poumons. Supposons, par exemple, que l'animal inspire et expire dans de l'air assez fortement condensé pour que, pendant la suspension expiratoire (donc pendant l'arrêt du thorax), la pression négative sur la surface pleurale soit changée en pression positive; s'il se produit alors une inspiration, cette pression intrathoracique ne deviendra peut-être pas négative, mais sa valeur positive diminuera pourtant, et c'est précisément cette diminution de la pression positive, parfaitement équivalente à une aspiration, qui détermine l'épanouissement des poumons; lors de l'expiration, la pression intrathoracique positive croîtra de nouveau; les mêmes variations se produiront dans la pression intrapulmonaire. Que la pression constante de l'air soit plus ou moins forte, cela est donc, jusqu'à une certaine limite, indifférent pour les oscillations périodiques de la pression sanguine; ces oscillations dépendent des *variations* des pressions, et pour leur forme il importe peu autour de quelles moyennes ces variations se balancent.

Si nous faisons respirer l'animal dans l'air condensé, la

pression intrapulmonaire restera positive, aussi bien lors de la suspension dans l'état d'épanouissement (inspiration) que lors de la suspension dans l'état d'affaissement (expiration); mais, lors de la suspension dans l'état d'épanouisement, le poumon est épanoui comme dans la respiration ordinaire. Nous avons donc à comparer deux états des poumons, la suspension après l'inspiration et la suspension après l'expiration; cette inspiration s'est accomplie par la diminution de pression sur la surface pleurale, soit par aspiration, et la pression intra-alvéolaire est restée la même que pendant la suspension après expiration: dans ces circonstances, le sang traverse les poumons avec une vitesse plus grande. Quand l'animal inspire et expire dans l'air condensé, la vitesse de circulation à travers les poumons sera donc, de même que dans la respiration ordinaire, plus grande pendant la suspension inspiratoire que pendant la suspension expiratoire; la même chose s'appliquant, en sens contraire, à l'expiration, la courbe de la vitesse circulatoire sera donc conforme à celle de l'animal respirant librement dans l'atmosphère. Il en sera de même pour la courbe de la capacité. Un raisonnement analogue rendra compte des phénomènes auxquels donne lieu la respiration dans l'air raréfié.

Le fait que les oscillations de la pression sanguine sont plus étendues que dans la respiration ordinaire tient à ce que, sous l'influence de la condensation ou de la raréfaction, les mouvements respiratoires eux-mêmes prennent plus d'étendue. Il ne faut pas oublier, en outre, que le degré de la condensation ou de la raréfaction jouera aussi un rôle dans le phénomène. Nous savons, en effet, que la courbe de l'élasticité des tissus ne présente pas, sur toute sa longueur, une inclinaison égale; lorsque des variations de pression agissent sur le tissu pulmonaire et sur les vaisseaux, la question est donc de savoir en quelle partie de la courbe de l'élasticité ces variations interviennent. Or, c'est précisément la pression absolue, c'est-à-dire le degré de la condensation ou de la

raréfaction, qui détermine le point de la courbe de l'élasticité aux environs duquel se produiront les variations d'extension, en vertu des variations de pression.

Enfin, les mêmes influences que j'ai signalées antérieurement, à propos de la respiration ordinaire, se feront encore sentir dans le cas présent: la rapidité des mouvements respiratoires, la durée des suspensions, la pression sanguine moyenne modifieront plus ou moins la forme de la courbe de la pression sanguine.

Tout autre est l'influence des divers modes de respiration sur la pression sanguine *moyenne*. Parmi les nombreux facteurs qui entrent alors en jeu, il y en a encore d'autres que ceux des oscillations périodiques dont nous nous sommes occupés. Remettant à plus tard de traiter des différences de la pression sanguine moyenne, suivant les divers modes de respiration, je me bornerai à remarquer que dans les cas examinés ci-dessus, lorsque les condensations et les raréfactions ne sont pas appliquées à un trop haut degré, la pression sanguine moyenne varie, mais faiblement. Je pense que cela tient à la propriété dévoilée par les recherches de M. Lichtheim [1]), savoir, que de grandes parties de la circulation pulmonaire peuvent être mises hors d'action, sans que la pression artérielle s'en ressente. Ce fait est sans importance pour les oscillations périodiques, mais il a certainement de la valeur pour la hauteur de la pression sanguine moyenne. Bien entendu, et c'est aussi ce qu'a trouvé M. Lichtheim, il existe une limite. On peut déprimer une si grande partie de la circulation pulmonaire, que la pression artérielle baissera bien dûment. Or, il en est de même dans les 8 cas de respiration que nous avons distingués. Pour de faibles degrés de condensation ou de raréfaction, la compensation signalée par M. Lichtheim se produira; pour des degrés plus élevés,

---

[1]) *Die Störungen des Lungenkreislaufs und ihr Einfluss auf den Blutdruck.*

le système vasculaire des poumons éprouve des changements de capacité si considérables, que la pression aortique moyenne sera également changée. Enfin, il y a aussi à tenir compte, par rapport à la pression artérielle moyenne, de l'apport du sang au cœur droit par les veines caves.

UTRECHT, Mai 1885.

EXPLICATION DES FIGURES.

(Pl. VIII).

Toutes les figures ont été obtenues par l'enregistrement, au moyen du kymographion de Ludwig, de la pression du sang dans la carotide du chien.

Toutes sont prises pour la circulation normale, après section des nerfs vago-sympathiques. Dans chaque figure, la courbe supérieure M est la courbe de la pression sanguine carotidienne; N est une droite horizontale, située à un certain nombre de mm. de mercure au-dessus de la ligne zéro du manomètre enregistreur; la courbe inférieure S donne le temps, chaque section horizontale représentant *une* seconde.

Les courbes se dirigent toutes dans le sens de la flèche dessinée au haut de la planche, c'est-à-dire de droite à gauche.

Pour économiser l'espace, les courbes des mouvements respiratoires ont été omises. On y a suppléé en indiquant sur chacune des lignes M, N et S, par un petit trait vertical, le commencement et la fin de chaque phase respiratoire.

A signifie insufflation.
C „ affaissement.
I „ inspiration.
E „ expiration.

Fig. 1. Pression du sang dans la carotide droite d'un chien de 6 kilogrammes, après section des nerfs vago-sympathiques, ouverture des cavités thoracique et abdominale, et curarisation complète. La respiration est entretenue par insufflation et affaissement. N se trouve à environ 17 mm. de mercure au-dessus de la ligne zéro de la carotide. Pression moyenne du sang dans la carotide, environ 60 mm.

Fig. 2. Pression du sang chez le même chien et dans les mêmes circonstances que pour la fig. 1. *N* se trouve à 15 mm. de mercure au-dessus de la ligne zéro de la carotide. Pression moyenne du sang dans la carotide, 66 mm.

Fig. 3. Pression du sang chez le même chien et dans les mêmes circonstances que pour les figures précédents. *N* se trouve à 11 mm. de mercure au-dessus de la ligne zéro de la carotide. Pression moyenne du sang dans la carotide, 50 mm.

Fig. 4. Pression du sang chez le même chien et dans les mêmes circonstances que pous les figures précédentes, à cela près que la cavité thoracique était encore fermée. *N* se trouve à 40 mm. de mercure au-dessus de ligne zéro de la carotide. Pression moyenne du sang dans la carotide, 140 mm.

Fig. 5. Pression du sang chez le même chien et dans les mêmes circonstances que pour la fig. 4. *N* se trouve à 40 mm. de mercure au-dessus de la ligne zéro de la carotide. Pression moyenne du sang dans la carotide, 140 mm.

Fig. 6. Pression du sang dans la carotide droite d'un chien de $7\frac{3}{4}$ kilogrammes, ayant les nerfs vago-sympathiques coupés, et narcotisé par la morphine et le chloroforme. Dans la première partie, *ab*, l'animal inspire dans l'air condensé et expire dans l'air raréfié; dans la seconde partie, *bc*, il inspire dans l'air raréfié et expire dans l'air condensé. *N* se trouve à 45 mm. de mercure au-dessus de la ligne zéro de la carotide. Pression moyenne du sang dans la carotide, 130 mm.

ÉTUDE

D'UNE VARIATION PÉRIODIQUE DE LA TEMPÉRATURE EN 27,675 JOURS, D'APRÈS LES OBSERVATIONS D 155 ANNÉES = 2046 PÉRIODES SUCCESSIVES;

PAR

C. H. D. BUYS BALLOT.

De même que je l'ai fait en 1866 [1]), vingt ans après mes recherches sur les températures de 1729—1846 [2]), je veux, maintenant qu'une nouvelle série de vingt années est écoulée, examiner jusqu'à quel point l'existence d'une variation périodique de chaleur dans l'espace de 27,682 jours est probable d'après les observations de température faites à la surface de la Terre, et si la durée de cette période se devrait pas, comme je l'avais présumé en 1866, subir quelque modification. J'exposerai brièvement comment ces recherches ont eu lieu et quels sont les résultats fournis par les observations des dernières années. Pour le moment, je me borne à la période qui peut être estimée dépendre, de l'une ou de l'autre manière, du Soleil ou d'anneaux circulant autour de cet astre; plus tard je reviendrai sûr l'influence de la Lune suivant ses différentes périodes, influence dont il a été question dans les écrits précités.

M. le professeur Nervander, de Helsingfors, avait fait connaître (Poggendorf *Annalen*, T. LVIII, p. 205) qu'il croyait

---

1) *Verslagen van de Sectie-Vergaderingen van het Prov. Utrechtsch Genootschap.*

2) *Changements périodiques de température dépendants du Soleil et de la Lune*, Kemink & Zn, 1847.

avoir trouvé, d'après 50 années d'observations à Innsprück, une période de 27,26 jours, qu'il rattachait à la rotation du Soleil sur son axe par rapport à notre Terre, rotation dont la durée avait été évaluée par Laugier à 27,23 jours.

Ayant partagé ces 50 années en deux groupes, chacun de 25 années, je trouvai que, suivant la période indiquée, le maximum de l'un des groupes ne s'accordait pas avec le maximum de l'autre. La durée de la période devait être notablement allongée, surtout quand on avait égard aux observations hollandaises, qui commencent dès l'an 1729. Après avoir modifié à plusieurs reprises la disposition des observations, suivant une méthode décrite dans mes *Changements périodiques* etc. — et appliquée aussi en substance par M. Balfour Stewart, qui dans les derniers temps a annoncé avoir reconnu une période d'environ 24 jours [1]) — je portai la durée à 27,682 ± 0,004 jours, et attribuai l'action périodique découverte par Nervander à la révolution sidérale de la Lune.

Pour la Lune on connaît parfaitement les différentes périodes, aussi la synodique et l'anomalistique, et pour elle les observations pouvaient donc, d'emblée, être ordonnées exactement; mais en ce qui concerne le Soleil, la période n'était pas connue, de sorte qu'il fallait en déterminer la durée par des tâtonnements. En 1860 j'attribuai la variation périodique [2]) à un anneau de particules qui circulerait autour du Soleil, et dont les parties plus épaisses ou bien intercepteraient temporairement une plus grande quantité de chaleur, ou peut-être en émettraient davantage, par rayonnement. A cette époque on croyait avoir découvert une planète Vulcain, mais, comme Mercure et Vénus ne présentaient pas de variations telles qu'aurait dû en produire ce nouvel astre, l'existence de celui-ci devait être jugée peu probable. Les astronomes n'en veulent

---

[1]) M. Hornstein et d'autres ont admis une période de 26 jours, mais qui ne repose que sur un beaucoup trop petit nombre d'observations.

[2]) *Verslagen en mededeelingen van de Kon. Akad. v. Wet. te Amsterdam*, T. X, p. 110, 1860.

pas moins, pour expliquer le mouvement de Mercure, admettre une masse perturbatrice entre cette planète et le Soleil, et alors il ne reste d'autre ressonrce que d'imaginer autour du Soleil un anneau, analogue à celui de Saturne. C'est aussi à cette hypothèse d'un anneau qu'on est obligé de recourir, si la durée de rotation du Soleil est plus courte que la période trouvée pour la variation de température.

Lorsqu'on se représente le Soleil comme une masse gazeuse, la notion de la durée de rotation n'est pas déterminée. Quelques parties, à des profondeurs différentes et aussi en des points différents de la surface, se meuvent avec plus de vitesse que les autres, comme nous l'apprennent les taches solaires. Malheureusement, ces taches ne se laissent pas voir à toutes les latitudes du Soleil. S'il en était autrement, on pourrait tenir compte des vitesses propres à chacun des disques en lesquels le Soleil peut être conçu divisé perpendiculairement à son axe, et déduire de ces vitesses, en considérant qu'à travers un méridien il doit se mouvoir autant de matière vers l'est que vers l'ouest, une vitesse de rotation moyenne. Tant que les astronomes ne nous donnent pas une définition plus rigoureuse de la durée nécessaire pour une rotation du Soleil, nous laissons donc le choix ouvert entre ces deux hypothèses: ou bien il existe sur le Soleil un méridien plus chaud, ce qui d'ailleurs serait peu probable pour une masse gazeuse — car pourquoi cette prérogative n'écherrait-elle pas alors tantôt à l'un et tantôt à l'autre des méridiens? — ou bien, autour du Soleil circule un anneau, tel, par exemple, que l'anneau de matière cosmique auquel appartient la comète de Biela; cet anneau, toutefois, est également exposé à des changements, parce que peu à peu la matière se distribue d'une manière plus uniforme sur tout le pourtour de l'anneau, d'où il résulte que la durée de révolution est modifiée et que l'inégalité d'action des différentes parties diminue graduellement.

Dans ma Communication de 1860 je fis voir que beaucoup de lieux d'Europe présentaient la même période, avec la même

époque, mais que cela n'était pas le cas pour Buitenzorg et la Guyane anglaise, où d'ailleurs on ne possédait que de courtes séries d'observations. En 1866, j'émis la présomption que la période devrait être raccourcie de quelques millièmes de jour, c'est-à-dire de quelques minutes, vu que les observations postérieures à 1845 donnaient un résultat beaucoup plus faible que le précédent et qui ne concordait pas tout à fait avec lui quant à l'époque. Toutefois, je ne voulus pas encore modifier la période, une vingtaine d'années ne me paraissant pas un laps de temps suffisant pour faire connaître, à quelques jours près, la date précise du maximum.

Aujourd'hui, après un nouvel espace de vingt ans, dans lequel, à environ un jour ou quelques heures près, 264 périodes se sont accomplies, j'ai cru devoir reprendre l'étude de la question, d'autant plus que, entre-temps, nous nous sommes aussi enrichis de seize années d'observations faites à Batavia.

Le résultat général de ce nouvel examen a été communiqué à l'Académie royale des sciences, dans la séance du 28 février 1885. Ici, je me propose d'entrer dans un peu plus de détails, tout en laissant à d'autres la décision définitive quant à l'existence réelle d'une semblable période et quant au nombre des variations périodiques qui doivent être admises.

Supposons, pour la clarté de l'exposition, que l'action du Soleil ou de l'anneau comprenne une période d'exactement 28 jours; les températures des jours successifs pourront alors être disposées en 28 colonnes, de manière que chaque colonne ne contienne que les températures observées à des jours séparés l'un de l'autre par un intervalle de 28 jours. Si en outre la période est exactement symétrique, quatorze jours éprouveront une action réchauffante, les quatorze suivants une action réfrigérante; on pourra placer dans les quatorze premières colonnes les températures des jours plus chauds, dans les quatorze autres, opposées aux premières, les températures des jours plus froids En prenant alors successivement, sur une même ligne, les différences col. 1— col. 15, col. 2— col. 16,

etc., toutes ces différences seront positives. Il en sera donc de même pour la somme de ces quatorze différences. Si quelques-unes des différences sont négatives, ce ne pourra être que par suite de perturbations, c'est-à-dire par suite de périodes soit déjà connues dépendantes d'autres causes, soit encore inconnues. Au point de vue de la période dont je m'occupe, je désignerai comme *gain* toute différence positive, comme *perte* toute différence négative.

Si maintenant l'espace de temps sur lequel portent les observations est partagé en groupes, de cinq années par exemple, comme dans notre tableau récapitulatif N° I, voici ce qu'on devra trouver:

1°. Chaque groupe devra donner un gain, et de préférence un gain égal.

2°. Les quatorze différences entre les sommes des quatorze premières colonnes et celles des quatorze colonnes opposées devront être toutes positives; ou, du moins, les exceptions devront diminuer en nombre à mesure que les groupes embrasseront plus d'années, et à mesure qu'on réunira un plus grand nombre de groupes.

3°. Ces quatorze différences devront croître et décroître suivant la loi des sinus, de manière que les colonnes du milieu, la 7e et la 8e, donneront avec la 21e et la 22e des différences plus grandes que n'en donnera la 5e avec la 19e, etc.

4° Les sommes des 28 colonnes devraient au contraire être à peu près égales si, pour un certain espace de temps, nous arrangions les observations d'après une période non existante, qui, dans cet espace, serait supposée avoir eu lieu juste une fois de plus ou de moins que la vraie période de 28 jours.

Si, après ce nouvel arrangement, les colonnes ne donnaient pas des sommes à peu près égales, mais de nouveau quatorze différences positives régulièrement croissantes entre les colonnes opposées, il faudrait donc en conclure qu'aussi cette seconde période, hypothétique, existait à côté de la première.

Lorsque la période n'est pas exactement de 28 jours, mais

un peu plus courte, comme celle que nous admettons, on n'en pourra pas moins disposer les observations en 28 colonnes, sauf à inscrire aux places qui restent alors vacantes un nombre constant, ou même à y répéter l'observation d'un jour précédent ; cela ne nuira évidemment pas au résultat, si, pour les années successives, les nombres ainsi intercalés tombent chaque fois dans une colonne différente. C'est effectivement de cette manière que j'ai dû opérer.

Par mes recherches antérieures j'étais arrivé à une période de 27,682 jours, et comme cinq années comprennent $5 \times 365{,}25 = 1826{,}25$ jours, elles équivalent à peu près à 66 révolutions: $66 \times 27{,}68 = 1826{,}88$. Dans cette hypothèse, les mêmes dates reviennent, après cinq années, se placer les unes au-dessous des autres dans la même colonne, avec une différence de près d'un demi-jour, ou si l'on modifie la durée de la période d'un peu plus ou moins. Je savais déjà que la modification serait nécessairement petite, et je pouvais donc laisser réunies les observations de chaque groupe de cinq années, sans avoir à craindre qu'une de ces observations dût, par suite de la modification de la période, être déplacée de plus d'une colonne. Pour obvier à la différence entre la durée de la période et les 28 jours pleins, je répétai tous les 84 jours une observation, savoir, le 25 Mars, le 17 Juin, le 7 Septembre et le 30 Novembre; je négligeai les 29, 30, 31 Décembre. Dans les *Changements périodiques etc.* on trouvera exposées avec plus de détails ces propositions et la méthode suivie.

Les 155 années me donnaient de cette manière 2046 révolutions, réparties en 31 groupes, chacun de cinq années, et il n'y avait plus à opérer de changements que sur ces groupes. Au bout de dix années seulement, le deux janvier devrait être porté dans la même colonne où entrait, dix ans auparavant, le premier de ce mois. Si maintenant la colonne était un peu plus longue ou plus courte, par exemple de la fraction $\frac{1}{132} = 0{,}0076$ de jour, cette colonne, pour le groupe décennal suivant, n'aurait à être déplacée que d'un jour.

J'ai obtenu le gain le plus grand en prenant une période de 27,6748 jours; c'est d'après cette durée qu'a été formé le tableau I, où les quatorze jours plus chauds commencent le 8 janvier 1729 et le 11 janvier 1880.

D'autres périodes, de durée très peu différente, satisfont également assez bien; mais quand la durée est prise sensiblement plus longue ou plus courte, le résultat devient moins expressif. On peut s'en assurer par quelques déplacements [1]).

En lui-même, le fait d'être exprimée un peu moins fortement ne prouve rien contre l'existence d'une période; parmi nos 31 groupes on en trouve çà et là de plus défavorables, appartenant aux années intermédiaires, et de même il peut y avoir eu, juste au commencement où à la fin des observations, des perturbations défavorables, soit accidentelles, soit dues à d'autres périodes. S'il existe deux périodes, dont l'une s'accomplit une fois de plus que l'autre dans l'espace de temps considéré, il ne restera que l'influence de celle des deux périodes d'après laquelle on a approximativement ordonné les observations, au moins si cette période a eu la même amplitude. L'époque ne saurait être fixée à une couple de jours près, ni au commeneement ni à la fin des observations, et une incertitude sur la durée de la période donne naturellement pour le maximum un déplacement d'autant plus grand qu'on le considère à une date plus avancée. De ce que, pour les observations de 1729—1840, c'est-à-dire pour un espace d'un peu plus de cent ans, il me restait une incertitude de quatre jours quant au moment où se produisait le maximum, il s'ensuivait pour 1885 une incertitude de six ou sept jours; il n'y a donc pas lieu d'être surpris qu'aujourd'hui encore je doive laisser subsister quelque indétermination.

[1]) Le tableau I est à comparer avec celui qui a été publié dans les *Verslagen van de Sectie-vergaderingen van het Prov. Utrechtsch Genootschap*, 1866; dans celui-ci on trouve les mêmes nombres, mais ordonnés autrement, d'après une periode de 27,682 jours. Jusqu'à 1866 j'avais ainsi une somme plus grande, mais l'Epoque des années suivantes ne s'accordait pas avec cette période.

La circonstance que M. Bergsma a fait à Batavia, de 1866 à 1882, des observations très exactes, continuées jusqu'a 1885 par son habile successeur, M. van Stok, m'a engagé à calculer ces observations suivant la même période, jusqu'à la fin de 1884. Entre les tropiques, les perturbations sont moindres; on a donc des motifs de croire que l'époque du maximum et du minimum d'une action périodique s'y laissera déterminer avec plus de précision.

J'ordonnai donc, d'après la période en question, les températures moyennes du jour pour les seize années de Batavia. Je pris les valeurs moyennes vraies, et non la somme de trois observations comme je l'avais fait pour Zwanenburg et le Helder, et trouvai ainsi un gain de 1400° C pour 250 périodes, et la date du 12 janvier pour le premier des quatorze jours chauds. Entre cette époque et celle des observations de Zwanenburg il n'y avait donc qu'une différence d'un seul jour, accord assurément très remarquable. Lorsque pour Batavia l'on prend aussi le 11, au lieu du 12, deux des quatorze différences deviennent négatives, au lieu d'une seule dans l'autre cas, comme le montre le tableau II.

Si l'on soumet le tableau I à l'épreuve des quatre règles ci-dessus posées, on a lieu d'être satisfait du résultat, surtout en considérant que des groupes de cinq années sont trop courts pour que toutes les perturbations étrangères puissent y être neutralisées.

1°. Des 31 groupes il n'y en a que huit négatifs, dont trois, ceux de 1734, 1804, 1855, le sont très fortement; des 16 groupes embrassant chacun dix années il n'y en a que trois négatifs; des 10 groupes s'étendant chacun à quinze années il n'y en a que deux négatifs, ceux de 1759—1774 et de 1850—1864. Prend-on 8 groupes, dont les sept premiers comptent chacun 20 années et le dernier seulement quinze années, ou prend-on des groupes de vingt-cinq années ou plus, alors chacun de ces groupes plus vastes donne du gain.

2°. Les quatorze différences des sommes finales des jours

correspondants sont toutes positives; chaque colonne donne plus de gain que de perte. Cela reste encore vrai quand on considère séparément les observations jusqu'à 1808 et les observations postérieures à 1808. Si l'on ne prend que des groupes de quarante années, les 4 × 14 différences en comprennent encore 12 négatives, lesquelles toutefois se trouvent surtout dans la première et la dernière colonne, c'est-à-dire précisément dans les colonnes qui ne pouvaient fournir qu'une différence très petite.

3°. Ces différences positives sont, aussi bien dans le premier que dans le second groupe de quatre-vingts années, beaucoup plus grandes pour les colonnes du milieu que pour les colonnes extrêmes, et elles se rapprochent plus ou moins des nombres qu'on obtiendrait par la formule 0,22 $sin \frac{2n-1}{28} \pi$, nombres inscrits au bas du tableau. Voici comment cette formule a été établie. Il y a originairement 28 colonnes; dans la première se placent les observations correspondant à $\frac{1}{56}$ de la période, représentée par 2π; dans la seconde celles de $\frac{3}{56} 2\pi$, et dans la $n^{\text{ième}}$ celles de $\frac{2n-1}{28} \pi$. Les quatorze premières colonnes renferment donc des nombres positifs, et les quatorze suivantes des nombres négatifs respectivement égaux aux premiers. Le facteur 0,22 a été choisi de manière que la somme 24706 des nombres calculés se rapprochât de la somme 25040 des nombres déduits de l'observation. Pour Batavia ce facteur serait plus grand, l'action devant être plus forte entre les tropiques qu'à nos latitudes.

4°. Lorsqu'on déplace de plus en plus les nombres des différents groupes, on obtient moins de gain et moins de régularité. Toutefois, — et c'est là à mon avis l'objection la plus sérieuse, — même quand le déplacement est tel qu'une révolution entière aurait dû avoir lieu en plus pendant les 155 années considérées, il est encore satisfait, bien qu'à un moindre degré, aux conditions précitées. Le gain est plus faible, il y a plus de groupes quinquennaux qui se soldent par une perte,

les sommes des quatorze colonnes à jours chauds ne donnent pas des excédents aussi régulièrement croissants et il s'y introduit des signes négatifs, mais, néanmoins, il y a encore gain en un certain sens. Outre la période en question, je suis donc obligé, par les mêmes motifs, d'un admettre une seconde et peut-être une troisième, dont la durée différerait d'environ un millième de jour de celle de la première. Toutefois, l'époque du maximum, donnée par une semblable période, ne coïnciderait plus avec l'époque du maximum à Batavia. En elle-même, l'existence de ces périodes différentes n'a rien de très improbable, si la cause du phénomène doit être cherchée dans l'action d'un anneau.

Lorsque, sous l'influence d'une planète, une masse de matière météorique entre dans la sphère d'action du Soleil, elle se divise de plus en plus sur l'orbite qu'elle est forcée de décrire; ou, à mieux dire, différents groupes de particules décrivent des orbites différentes, rapprochées entre elles, mais pourtant inégales en longueur et en distance périhélie. D'autres groupes de ces particules auront donc d'autres durées de révolution, et par suite leur action ne s'exercera pas à la même époque ni après des temps égaux, soit que ces particules communiquent elles-mêmes la chaleur à la Terre, soit qu'elles interceptent plus ou moins la chaleur émise par le Soleil.

Une seconde objection, c'est que pour les 115 premières années la période satisfait beaucoup mieux que pour les 40 dernières. Cela peut tenir en partie à des perturbations, mais en partie aussi à ce que dans les premiers temps plusieurs périodes auraient concouru, tandis que plns tard elles auraient été en désaccord. Il y a encore une autre hypothèse pouvant expliquer le phénomène en question. Si les calculs concernant le mouvement de la comète de Encke, poursuivis principalement, sur les traces de d'Arrest, par M. Backlund, établissent réellement que cette comète éprouve une accélération par la résistance de la matière répandue dans les espaces célestes et accumulée surtout au voisinage du Soleil, cette résistance agira

particulièrement sur la matière cosmique dont nous supposons notre anneau formé, et la période peut alors facilement avoir été raccourcie d'une couple de millièmes de jour dans l'espace de 155 ans. Elle peut avoir été d'abord un peu plus longue et ensuite un peu plus courte que 27,678 jours.

Si je voulais appliquer cette hypothèse, il en résulterait une augmentation du gain. Jusque vers le commencement de ce siècle, dans les soixante-dix premières années par conséquent, il y aurait avantage à prendre la période un peu plus longue; dans les cinquante dernières années, les dernières colonnes paraissent fournir de temps en temps des différences négatives. Je m'abstiens toutefois de rendre, par cette nouvelle hypothèse, la somme finale plus grande. Les observations de maint groupe quinquennal devront encore être ordonnées, avant qu'on puisse se prononcer avec quelque certitude sur l'existence de la période en question, sur sa durée et sur la variation de cette durée.

Ma communication précédente, dans les Comptes rendus de l'*Utrechtsch Genootschap*, a fait connaître le gain ou la perte pour chaque année séparément [1]). Ces données montrent combien sont grandes les autres perturbations, l'influence de toute sorte de causes pouvant tellement modifier la température d'une même date de l'année, — la faire varier de 20° par exemple, comme cela arrive assez souvent, — que l'action régulière de deux cents périodes s'en trouve neutralisée. Cette fois-ci, il suffira, je crois, de donner les différences pour des groupes de cinq années, car les observations d'un pareil groupe quinquennal pourront certainement rester ensemble, même si l'on voulait vérifier l'hypothèse d'une période un peu différente.

5°. Pour juger de la probabilité de l'existence de notre période, nous pouvons encore examiner si, en d'autres lieux également, elle se manifeste dans l'accroissement et le décroissement de la température. Nous avons vu ci-dessus que les

[1]) Ces gains et pertes se modifieraient naturellement beaucoup pour la nouvelle période de 27,675 jours, parce que l'époque est changée.

seize années d'observations de Batavia s'y conforment, et en 1860 [1]) j'ai présenté à l'Académie le résumé des résultats d'observations faites au Groenland, à Danzig, à Breslau, à Buitenzorg (1844—54), à la Guyane et au Japon. D'une manière générale, toutes ces stations se montraient alors favorables à la période, sauf Buitenzorg, qui se déclarait contre. Après la modification que nous avons apportée à la période, l'époque doit naturellement être changée pour chacun de ces lieux. Les résultats corrigés sont réunis dans le tableau III, et l'on voit que maintenant le Groenland et la Guyane donnent un résultat défavorable. Il en est de même pour Decima; mais ici il ne s'agit que de quatre années, et ces années sont précisément de celles où Zwanenburg accuse également de la perte, au lieu de gain.

Utrecht aussi méritait d'être examiné. Ayant donc classé les observations de cette station, à partir de 1848, suivant la même période, j'ai de nouveau, comme le montre le tableau IV, obtenu du gain; quant à l'époque, toutefois, il y a une différence de quelques jours lorsqu'on veut, par des déplacements, rendre ce gain le plus grand possible.

Enfin, le lableau V donne les différences trouvées, entre les jours chauds et les jours froids, pour le mouvement de déclinaison de l'aiguille aimantée.

En 1854 j'ai déjà communiqué, dans une des séances de l'*Utrechtseh Genootschap* [2]), le résultat de recherches concernant l'action du Soleil et de la Lune sur l'aiguille de déclinaison. Ces deux corps célestes exerçant par leur position, et le premier probablement aussi par sa chaleur, de l'influence sur les variations diurnes, il était à présumer que le mouvement serait plus prononcé pendant les jours chauds (de la période supposée) que pendant les jours froids. L'examen parut effectivement montrer que, ces jours-là, la déclinaison

---

[1]) *Verslagen en Mededeelingen*, etc., t. X, p 110.

[2]) *Aanteekeningen van het verhandelde in de Sectie voor Natuur- en Geneeskunde v.h. Prov. Utrechtsch Genootschap*, 1853, p 54.

plus grande, à 2 heures de l'après-mide, était augmentée, la déclinaison plus petite, vers 8 henres du matin, diminuée, de sorte que le mouvement avait plus d'étendue. C'est pour cela que, dans nos Annuaires, on a toujours donné la position de l'aiguille à 2 heures et la différence entre cette position et celle de 8 heures. — Le Dr. Lloyd avait trouvé quelque chose d'analogue.

Je laisse à mes contemporains à juger du degré de probabilité de l'hypothèse proposée, et à nos successeurs, si ce jugement les y engage, à continuer l'examen pendant une longue suite d'années, afin de décider si la période éprouve des changements dans sa durée ou dans l'intensité de son action.

Lors de mes premières recherches, exposées dans les *Changements périodiques etc.*, j'avais tenu séparés les résultats de chaque mois, pour pouvoir déterminer, par l'inégalité d'action aux différentes époques de l'année, les nœuds de l'anneau supposé. Aujourd'hui je m'abstiens de toute déduction à cet égard, les perturbations assez fortes ne permettant pas de reconnaître jusqu'à quel point l'intensité change dans les mois successifs. Je me borne à admettre la variation périodique discutée ci-dessus.

Ailleurs [1]) j'ai fait remarquer qu'il est singulier de trouver si peu d'influence pour la Lune, dont les révolutions sont connues et dont la période synodique paraît devoir être d'une assez grande valeur, vu la différence de température entre l'hémisphère lunaiire éclaré et l'hémisphère détournée du soleil, et au contraire une action assez forte pour une révolution dont on ignore la durée ou même l'existence. J'en concluais que, si ma période ne se vérifie pas à la longue, il faudra redoubler de circonspection, et ne plus se livrer à des déductions de ce genre qu'après des observations très longtemps continuées.

[1]) *Aanteekeningen op het Verhandelde in de Sectie voor Natuur- en Geneeskunde v. h. Prov. Utrechtsch Genootschap*, 1866, p. 67.

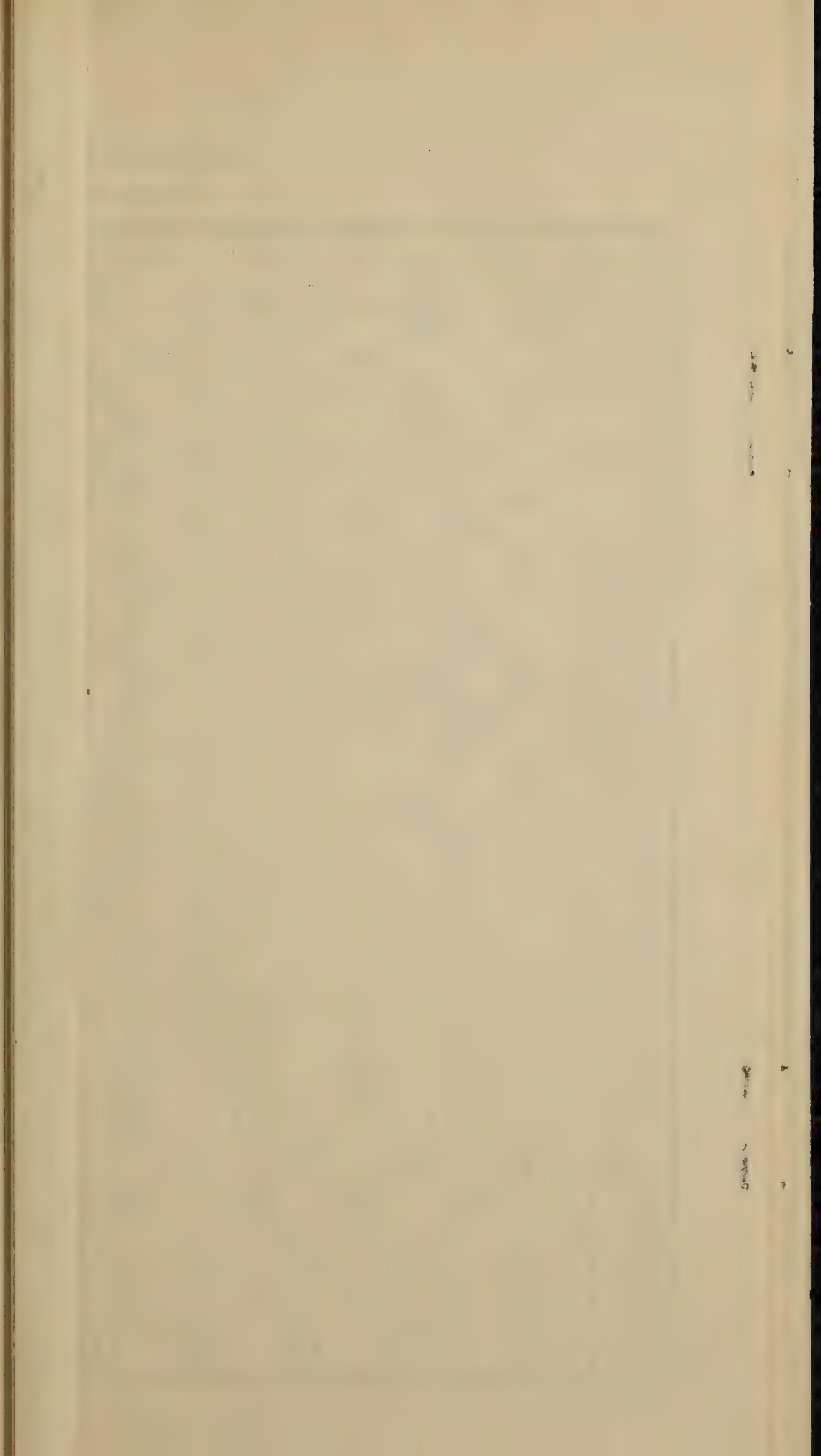


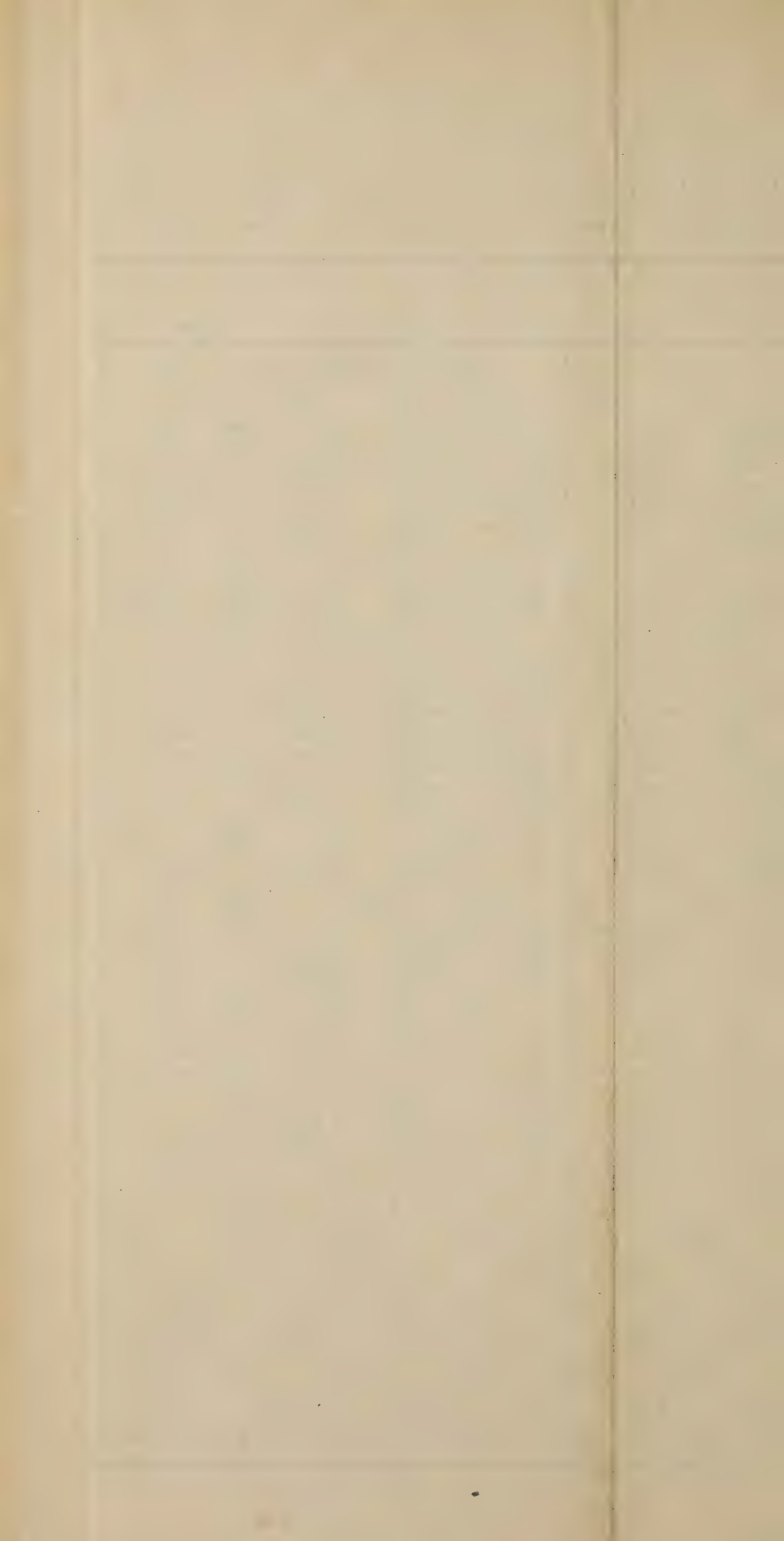


TABLEAU I[a].

ZWANENBURG ET LE HELDER, EN DEGRÉS FAHRENHEIT.

Différences des sommes quinquennales opposées des 28 colonnes de la période d'été.

Années.	Date. Janvier.	1—15		2—16		3—17		4—18		5—19		6—20		7—21		8—22		9—23		10—24		11—25		12—26		13—27		14—28		Gain.	Perte.	Gain.	Perte.
		+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—				
1729	8	229		465		185		79			203	16			29		114		21		138	152		49		20			90	1195	595	600	
1734	8		129		199		354		241		228		202		270		327		17	256		343		381		4		143		1127	1967		840
1739	8	276		342		344		203		236		201		238			26	6		2			109	27			68		178	1875	381	1494	
1744	9	64		68			17		51	50		192		140		93		218		419		278		106		95		23		1746	68	1678	
1749	9		35	86		126		235		333		261		11		361		343		294		169		164			39	38		2421	74	2347	
1754	9	21			11	73			20	81		9		192		157		180		305		252		8		25			33	1303	64	1239	
1759	9		183		17	11		32			15		148		44		14		32	83			119		9		125		27	126	733		607
1764	10	137		106		135		19			119	35		295		140		109		108			126		165		189		134	1084	733	351	
1769	10		86		30	11			60	13			298		313		184	2			120		58	137		305		129		597	1149		552
1774	10		154	45		163		162		57		84		247		125		175		233		249		202		5		96		1843	154	1689	
1779	11	149		191		30			122		117	67		6		12		72		232		219		131		66			36	1175	275	900	
1784	11		199		2	58			19		132		4	138		186		332		429		291		303		361		216		2314	356	1958	
1789	11		54	61		119		201		172		198		247		348		128		83		28			32	290		5		1880	86	1794	
1794	11	171		172		73		265		202		239		204		133		101			1		215		186	170		157		1887	402	1485	
1799	12	31		231		94		255		324		415		268		200		96		179		479		205		56			137	2833	137	2696	
1804	13		48		2		73		216		51		184		70		70		156		211		108	20			107		5	20	1301		1281
1809	13		27	8			105		8	72		92		140		397		292		255		285		270		202		134		2147	140	2007	
1814	14		84	58		189		285		349		572		428		351		279			34	65		104			12	110		2790	130	2660	
1819	14		111	37			63		145		125	203		8			20		79	79			35	182		91		53		653	578	75	
1824	14		89		18	56		103			20		136	73		68		181		291		300		232		335		49		1688	263	1425	
1829	15		88		236		32	125		130		26		83		110		261		141			185		1	162		185		1223	542	681	
1834	15		60		282		429		292		212		284	25		282		307		340		259		376		220		234		2043	1559	484	
1839	15		416		269		92		187	26		400		423		518		388		13		42		228		184		213		2435	964	1471	
1845	9	274		151			4		50	78		77		156			112		143		106		139		11		116		185	736	866		130
1850	10	64		176		80		78			68		71		148		206		107		186		216		6	104		137		639	1008		369
1855	10		55		187		267		338	16		7		49		252		146			137		153		27		144		126	470	1434		964
1860	10		1		62	51		37		174		261		119			97		25		9	203		138		19			44	1002	238	764	
1865	11	67		93		235		119		120			56	40		126		53		79		263		120		185		78		1578	56	1522	
1870	11	110			59	78		57		45			40		158		358		238		71		67	12		150		7		459	991		532
1875	11	268		223		59		40		157		149		119		175		146		5		0			56		106		250	1341	412	922	
1880	11	319		302		148		304		196			9		112		182		227		99		11		167		124		272	1269	1203	66	



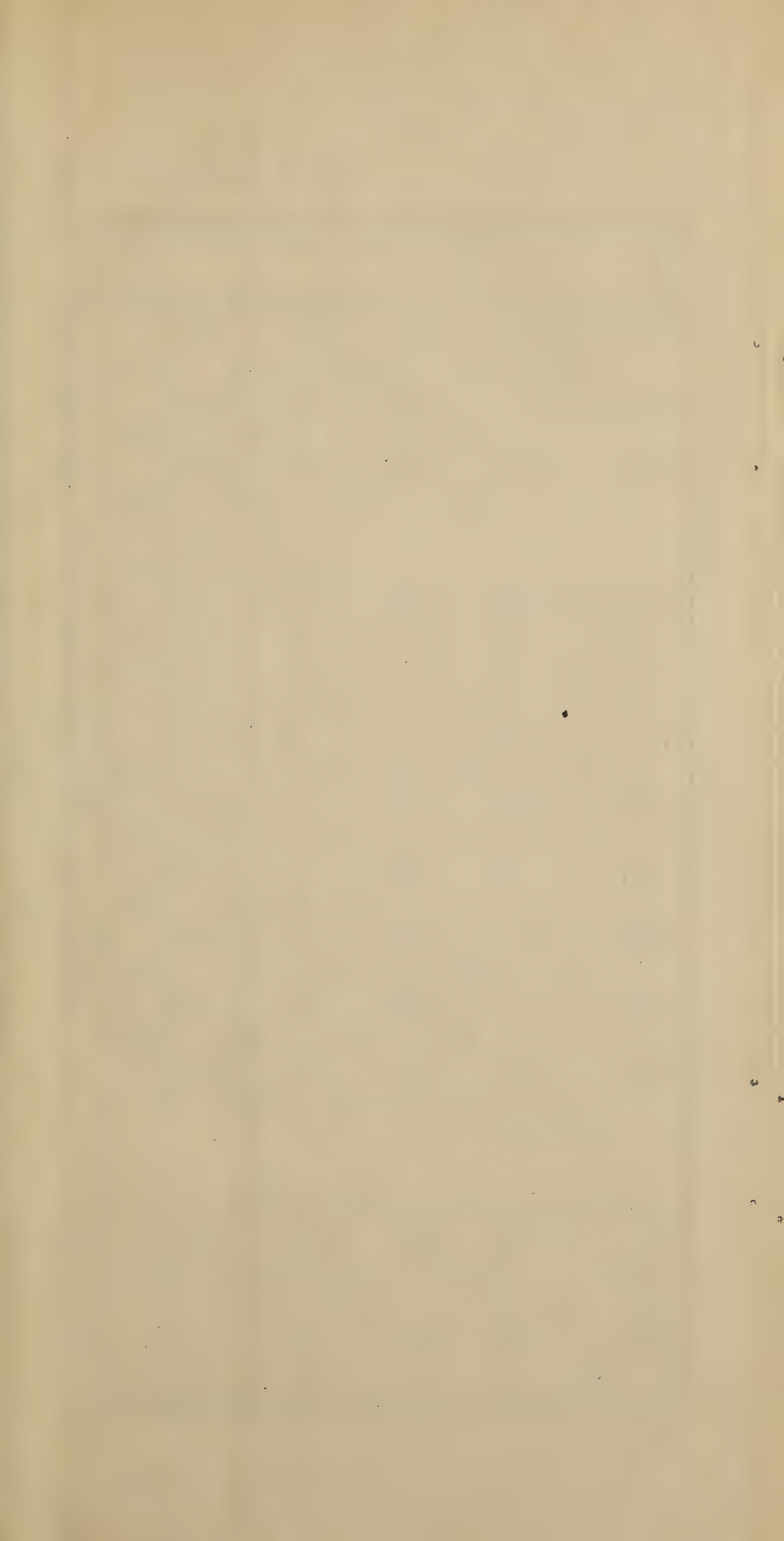




Tableau I^b.

DIVISION EN DEUX GROUPES DE 50 ANNÉES ET UN DE 55 ANNÉES.

Années.		1–15		2–16		3–17		4–18		5–19		6–20		7–21		8–22		9–23		10–24		11–25		12–26		13–27		14–28		Gain.	Perte.	Gain.	Perte.
		+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—				
1729	+	727		1112		1048		730		770		798		1123		876		1033		1700		1443		1074		454		429		13317			
	—		587		257		371		372		565		648		656		665		70		258		412		174		421		462		5918	7399	
1779	+	351		758		619		1109		1119		1786		1512		1695		1481		1548		1667		1447		1571		724		17387			
	—		612		22		241		510		445		324		70		90		235		246		358		218		119		178		3668	13719	
1829	+	1102		945		651		760		942		920		1014		1463		1301		578		767		874		1024		854		13195			
	—		620		1095		824		867		280		460		418		955		740		608		771		268		490		877		9273	3922	

DIVISION EN SEPT GROUPES DE 20 ANNÉES ET UN DE 15 ANNÉES.

Années.		1–15		2–16		3–17		4–18		5–19		6–20		7–21		8–22		9–23		10–24		11–25		12–26		13–27		14–28		Gain.	Perte.	Gain.	Perte.
		+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—				
1729	+	569		875		529		282		286		409		378		93		224		677		773		563		119		166		5943			
	—		129		199		371		292		431		202		299		467		38		138		109		0		68		268		3011	2932	
1749	+	158		192		345		286		414		305		498		658		632		790		421		172		25		38		4934			
	—		218		28		0		20		134		148		44		14		32		0		245		174		353		194		1604	3330	
1769	+	149		236		262		162		70		151		391		323		581		894		759		773		737		441		5929			
	—		439		32		0		201		249		302		313		184		0		120		58		0		0		36		1934	3995	
1789	+	202		464		286		721		698		852		719		681		325		262		507		225		516		162		6620			
	—		102		2		73		216		51		184		70		70		156		212		323		218		107		142		1926	4694	
1809	+	0		103		245		388		421		867		649		816		752		625		650		788		628		346		7278			
	—		311		18		168		153		145		136		0		20		79		34		35		0		12		0		1111	6167	
1829	+	274		151		0		125		234		503		687		910		956		494		301		604		566		632		6437			
	—		564		787		557		529		212		284		0		112		143		106		324		12		116		185		3931	2506	
1850	+	131		269		366		234		310		268		208		378		199		79		466		258		308		215		3689			
	—		56		249		267		338		68		127		148		303		132		332		369		33		144		170		2736	953	
1870	+	697		525		285		401		398		149		119		175		146		5		0		12		150		7		3069			
	—		0		59		0		0		0		49		270		540		465		170		78		223		230		522		2606	463	

TABLEAU RÉCAPITULATIF.

		1–15		2–16		3–17		4–18		5–19		6–20		7–21		8–22		9–23		10–24		11–25		12–26		13–27		14–28		Gain.	Perte.	Gain.	Perte.
Total	+	2180		2815		2318		2599		2831		3504		3649		4034		3815		3826		3877		3395		3049		2007		43899		25040	
	—		1819		1374		1436		1749		1290		1432		1144		1710		1045		1112		1541		660		1030		1517		18859		
Différence		361		1441		882		850		1541		2072		2505		2324		2770		2714		2336		2735		2019		490		25040			
$0{,}22 \sin \frac{(2n-1)\pi}{28}$		297		917		1525		2134		2268		2539		2673		2673		2539		2268		2134		1525		917		297		24706			



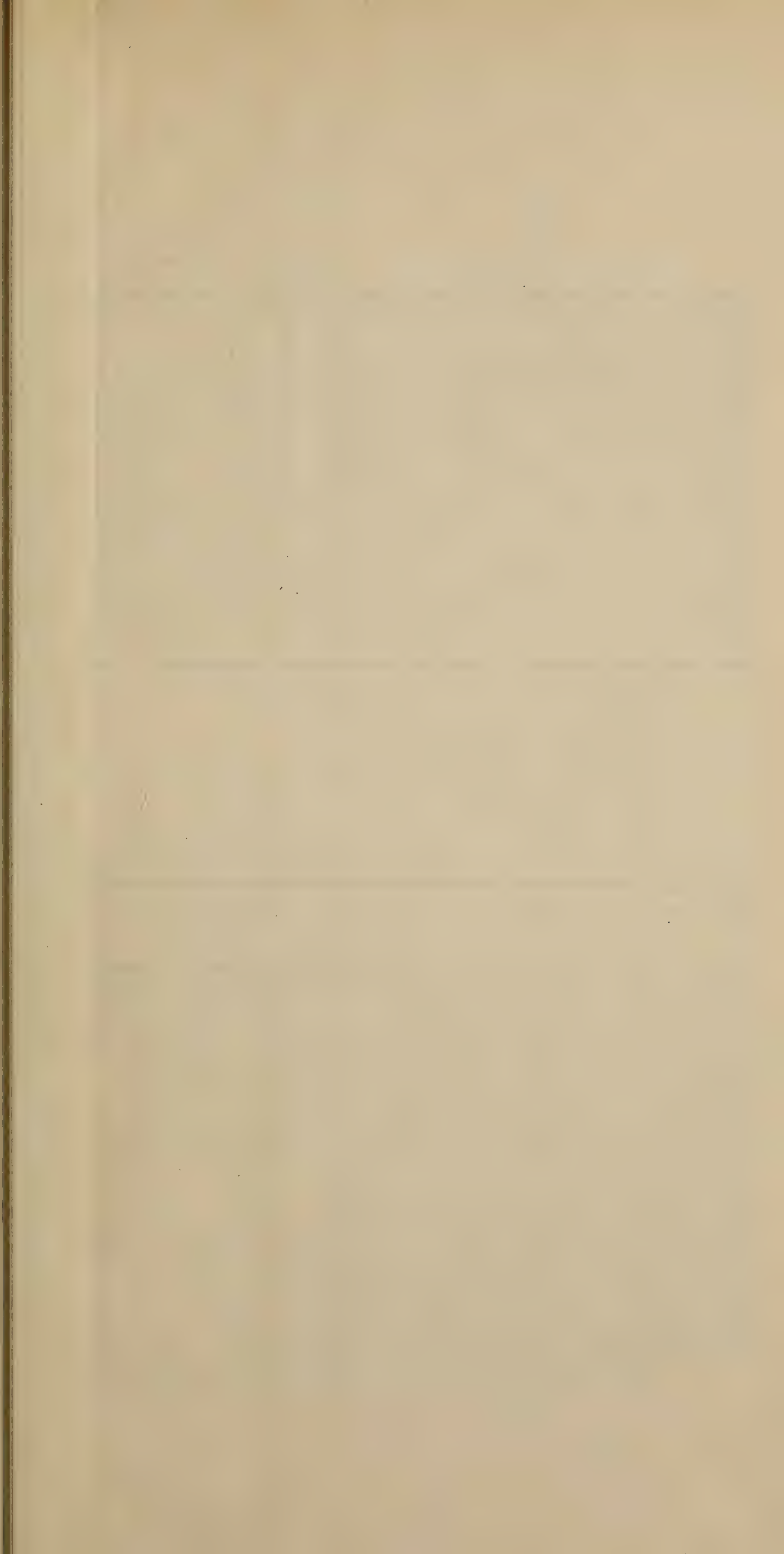




Tableau II.

BATAVIA, EN DEGRÉS CELSIUS.

Différences des sommes quinquennales opposées des 28 colonnes de la période solaire.

Années.	Date. Janvier.	1—15 +	1—15 —	2—16 +	2—16 —	3—17 +	3—17 —	4—18 +	4—18 —	5—19 +	5—19 —	6—20 +	6—20 —	7—21 +	7—21 —	8—22 +	8—22 —	9—23 +	9—23 —	10—24 +	10—24 —	11—25 +	11—25 —	12—26 +	12—26 —	13—27 +	13—27 —	14—28 +	14—28 —	Gain.	Perte.	Gain.	Perte.
1866	5		5	41		39		71		19		24		87		87		26		29			9	107		4		112		646	14	632	
1870	11	58		86		30			13	84		83		58		96		58			29		98		48		28		38	553	254	299	
1875	11		78	10		68		2		28		143		56		20		28			3	60			2		62	41		456	145	311	
1880	11	2		7			51		58	34		4		16		0		31		88		77		24		11		15		309	109	200	
Gain +		60		144		137		73		165		254		217		203		143		117		137		131		15		168		1964			
Perte —			83				51		71												32		107		50		90		38		522	1442	
Gain +				144		86		2		165		254		217		203		143		85		30		81				130		1540			
Perte —			23																								75				98		

Tableau III.

Différences des mêmes sommes pour d'autres lieux divers.

	Epoque.		1—15 +	1—15 —	2—16 +	2—16 —	3—17 +	3—17 —	4—18 +	4—18 —	5—19 +	5—19 —	6—20 +	6—20 —	7—21 +	7—21 —	8—22 +	8—22 —	9—23 +	9—23 —	10—24 +	10—24 —	11—25 +	11—25 —	12—26 +	12—26 —	13—27 +	13—27 —	14—28 +	14—28 —	Sommes. +	Sommes. —	Gain.	Perte.
Buitenzorg 1844—1854	1845	15 Jan.	121			147	166		247			19	192			8	216		161		275		178		51		111		75		1793	174	1619	
Guyane C. 1844—1854	1845	15 Jan.	7				14		47			5		56		31		24			4		22			15		9	22		116	140		24
Decima C. 1848—1852	1849	16 Jan.	103		14			57		45		151		235		153	5			69	18		39		36		159			5	374	715		341
Groenland 1833—1852	1834	15 Jan.	4			76		145		117		265		60		187		227		191		89	54		116		51		102		327	1357		1030
Breslau 1791—1854	1809	13 Jan.		158		179		224		197		58	76		155		32		145		65		204		271		200		225		1373	816	557° R	
Danzig 1810—1830	1809	13 Jan.		253	33		418		290		296		102		115		227		93		274		199		305		446		324		3122	253	2879° R	
Munchen 1781—1849	1799	12 Jan.		30		8	5		13		6		49		58		58		47		81		58		61		32		37		505	38	467° R	

Voyez pour l'époque : *Verslagen en mededeelingen*, *Kon. Akad. v. Wetenschappen*, I, Tom. X. p. 126.



Tableau IV.

UTRECHT, EN DEGRÉS CELSIUS.

Differenees des sommes prises de la même manière.

Années.	Date. Janvier.	1—15		2—16		3—17		4—18		5—19		6—20		7—21		8—22		9—23		10—24		11—25		12—26		13—27		14—28		Gain.	Perte.	Gain.	Perte.
		+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—				
1850	10		27	14			43		119		44		159		143		113		123		109		154		9		50	116		130	1093		963
55	10		1		62		103		94	92		35		99		48		27		71		32			74		82		85	404	501		97
60	10	6		75		76		37		144		235		126		23		1			48	53		82		34		56		948	48	900	
65	11	13		61		12		87			3		45	30		88		101		86		179		75		56		36		824	48	776	
70	11		21	25		10			33		30	26			124		160		161		27		61		77	14		118		193	694		501
75	11	106		10		38		115		154		211		135		180		133			35		89		93		57		147	1082	421	661	
80	11	146		134		100		154		126		66			81		112		145		61		69		2		64		120	726	654	72	
	+	271		319		236		393		516		573		390		339		262		157		264		157		104		326		4307		2409	
	—		49		62		146		246		77		204		348		385		429		280		373		255		253		352		3459		1561
																																848	

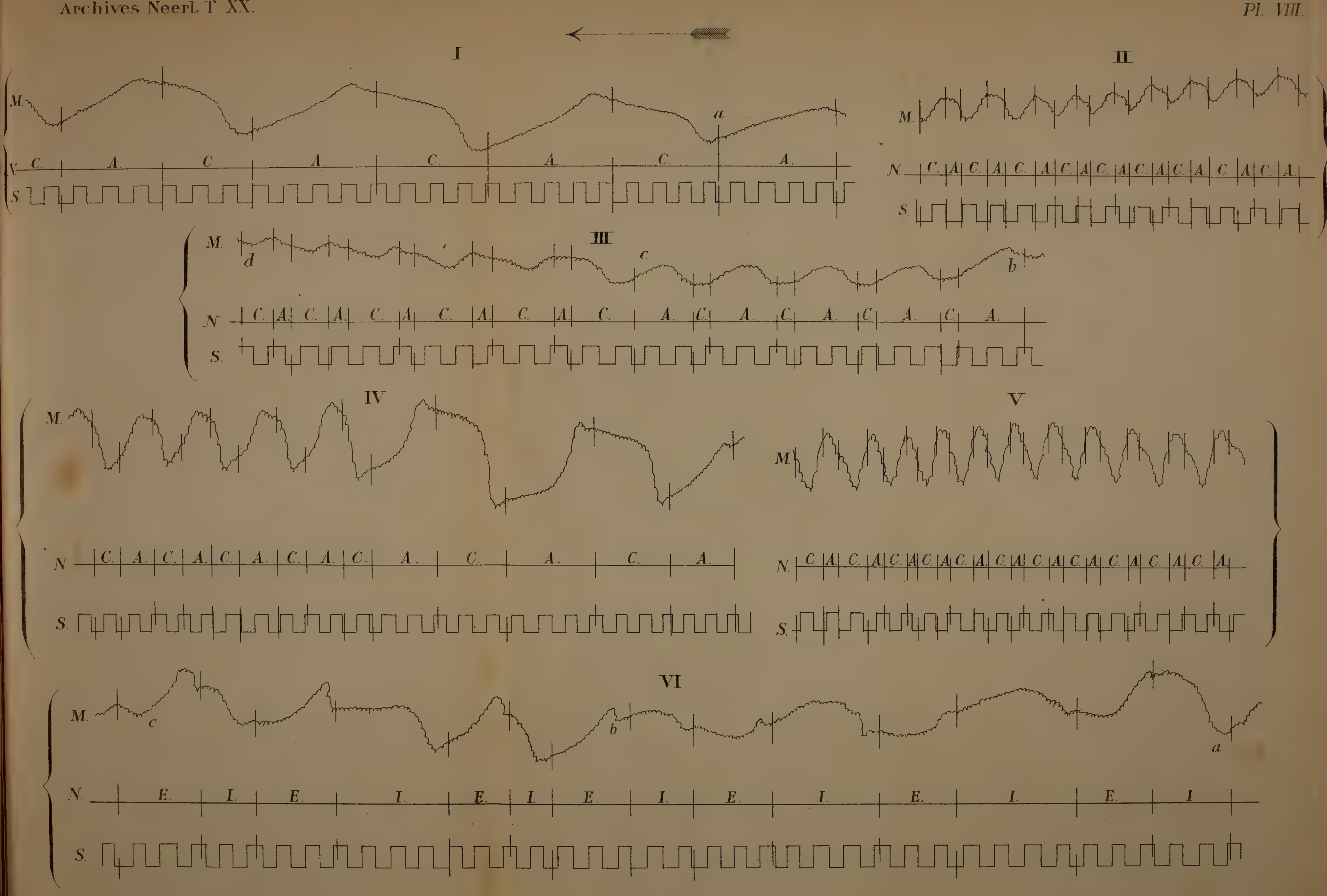
Tableau V.

UTRECHT. DÉCLINAISON MAGNÉTIQUE.

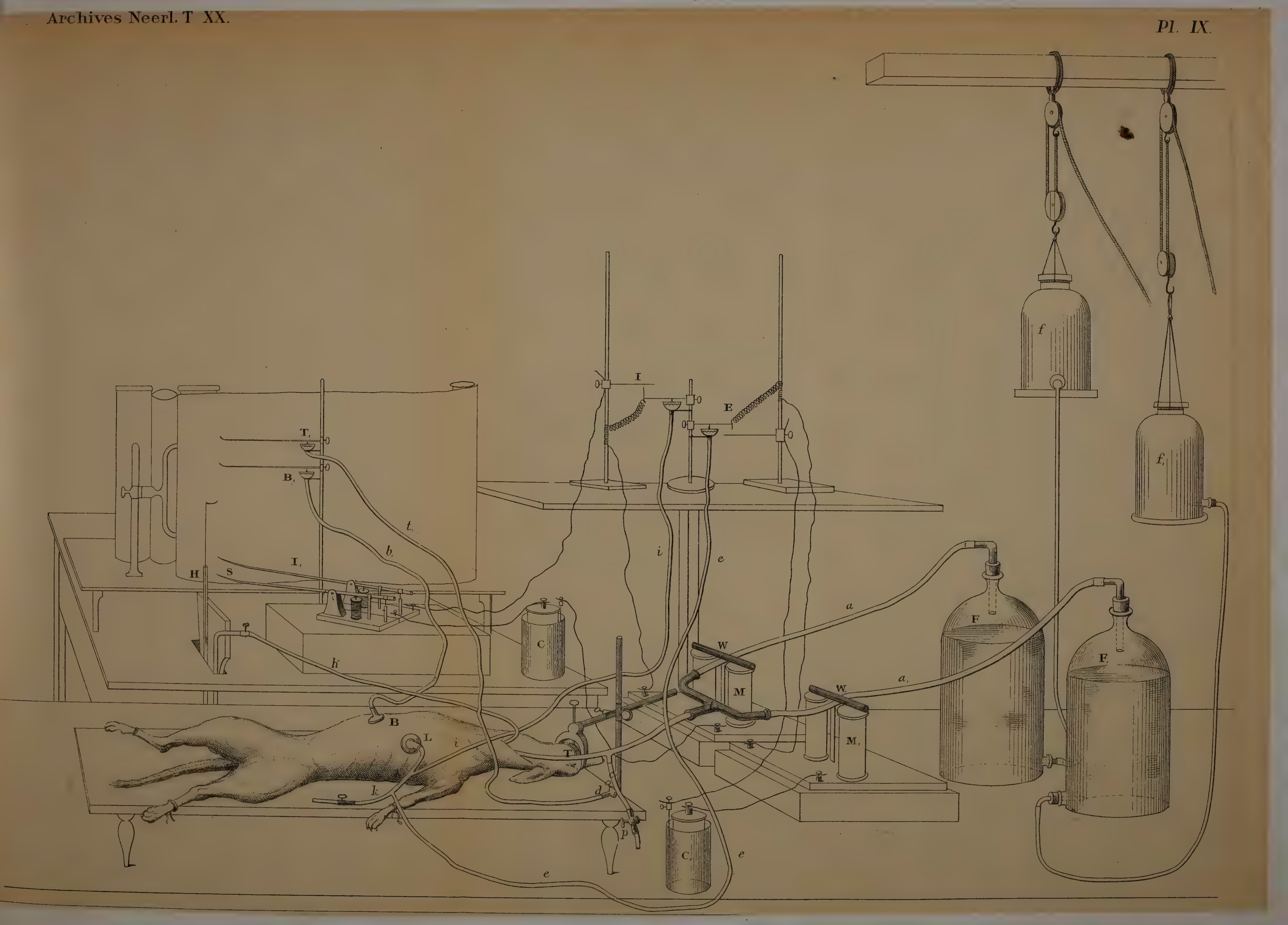
Différences, en minutes d'arc, de l'observation de deux heures avec celle de huit heures de matin arrangées de la même manière.

Années.	Date. Janvier.	1—15		2—16		3—17		4—18		5—19		6—20		7—21		8—22		9—23		10—24		11—25		12—26		13—27		14—28		Gain.	Perte.	Gain.	Perte.
		+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—	+	—				
1850	10		22	28		75		42		55		50		82		53		66		51		55		52		16			30	625	52	573	
55	10		11	19		332		299			183		54		243	95			88		6	62			501	257		77		1141	1086	55	
60	10		21		24		47	5		87		185		110		147		273			27	190			39	61		63		1121	158	963	
65	11		68		78		21		24	9		44		20			19	8		34			26	66			6		33	181	275		94
70	11		24		34	20		86			48	36			17	3			24		44	35			64	58			11	238	266		28
75	11	3		4			16	14			34		30	8		30		9		6		6			15		6	32		112	101	11	
80	11	41			84		13		2		32		5		17	35		22		16			32	25			41	43		182	216		34
	+	44		51		427		446		151		315		220		363		378		107		348		143		392		215		3600			
	—		146		220		97		26		297		89		267		19		112		77		58		619		53		74		2154	1602	156
																																1446	

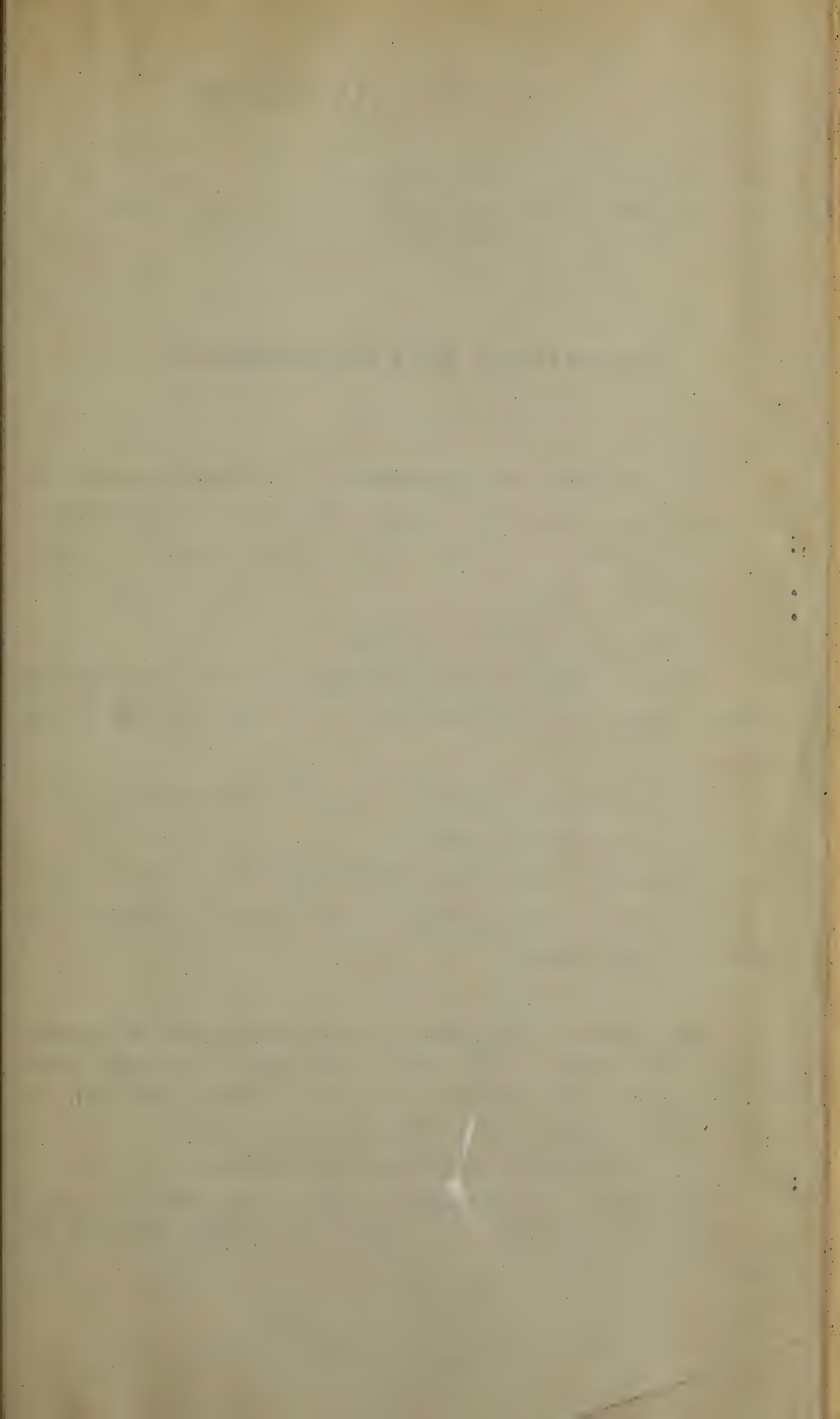



I
M
N
S
C.
A.
a
II
III
d
c
b
IV
V
VI
E.
I.




I
E
T,
B,
f
f,
t,
b,
I,
H
S
i
e
a
a,
F
F.
C
C,
W
W.
M
M,
h
B
L
T
k
d
p
e





QUATRIÈME LIVRAISON.

S. de Jager, Les oscillations de la pression sanguine artérielle lors de la respiration par soufflet et de la respiration dans l'air condensé ou raréfié.......................... Pag. 303.

C. H. D. Buys Ballot, Étude d'une variation périodique de la température en 27,675 jours, d'après les observations de 155 années = 2046 périodes successives.............. " 378.

CONDITIONS DE L'ABONNEMENT.

Les **Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles** paraissent à des époques indéterminées, en livraisons de 6 à 12 feuilles d'impression, avec un nombre illimité de planches coloriées et noires.

Trente feuilles forment un volume.

Avec la dernière livraison de chaque volume les souscripteurs reçoivent gratis une table des matières, un titre général et une couverture.

Les abonnements engagent à un volume seulement. Les livraisons ne se vendent pas séparément.

Le prix du volume, avec les planches, est fixé à *fl.* 6.—.

On souscrit chez l'éditeur et chez tous les libraires des Pays-Bas et de l'étranger.

Pour faciliter l'acquisition de la première série du recueil, composée des volumes I à X (années 1866—1875), avec tables alphabétiques générales des matières et des noms d'auteurs, cette série est offerte temporairement au prix réduit de:

fl. de Holl. 40 = francs 84 = marks 67.

Les personnes qui voudraient profiter de cette offre sont priées de s'adresser directement au Secrétaire de la Société hollandaise des sciences à Harlem.

HARLEM. — IMPRIMERIE DES HÉRITIERS LOOSJES.

TOME XX. 5me Livraison.

ARCHIVES NÉERLANDAISES

DES

SCIENCES EXACTES ET NATURELLES

PUBLIÉES PAR

LA SOCIÉTÉ HOLLANDAISE DES SCIENCES À HARLEM,

ET RÉDIGÉES PAR

le Secrétaire de la Société,

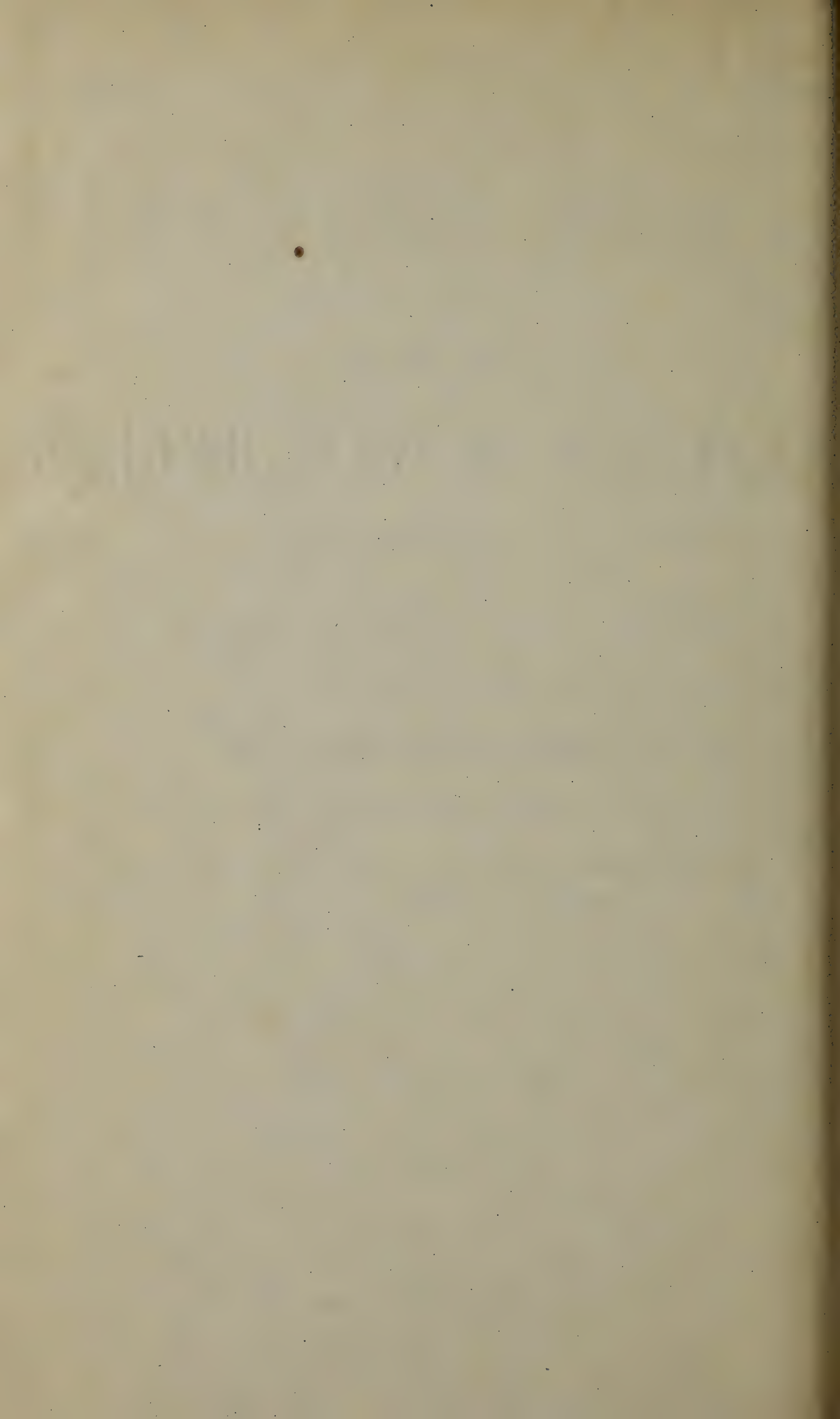
AVEC LA COLLABORATION DE

MM. D. Bierens de Haan, C. A. J. A. Oudemans, W. Koster,
C. H. D. Buijs Ballot, C. K. Hoffmann et J. M. van Bemmelen.

HARLEM
LES HÉRITIERS LOOSJES.
1886.

PARIS
GAUTHIER-VILLARS.

LEIPSIG
G. E. SCHULZE.



ARCHIVES NÉERLANDAISES

DES

Sciences exactes et naturelles.

STÉRÉOSCOPIE

DÉPENDANT D'UNE DIFFÉRENCE DE COULEUR,

PAR

W. EINTHOVEN.

En 1850, M. le professeur Donders remarqua, sur lui-même, qu'après une faible instillation d'atropine, en même temps que la pupille se dilatait légèrement et que l'accommodation était un peu diminuée, il se produisait de la micropsie [1]). Il chercha l'explication de ce phénomène dans l'affaiblissement de la faculté d'accommodation, par suite duquel un plus grand effort était nécessaire pour voir nettement les objets à une certaine distance. Cet effort volontaire d'accommodation pourrait, en effet, donner le sentiment d'une proximité plus grande, et comme, malgré ce sentiment, l'angle sous lequel se voyaient des objets connus restait le même, ces objets devraient paraître plus petits.

M. Förster [2]), qui quelques années plus tard observa également ce phénomène et le décrivit en détail, l'expliqua de la même manière que M. Donders. Il ajouta que, secondairement, la micropsie pouvait conduire à juger que l'objet était plus éloigné de l'œil, — en contradiction, chose assurément remarquable, avec la conclusion inconsciente de proxi-

[1]) *Ned. Lancet*, 2e série, 6e année, p. 607.

[2]) *Ophthalmologische Beiträge von* Dr. R. Förster, 1862, p. 69.

mité plus grande, résultant de la tension plus forte à laquelle l'accommodation avait été astreinte.

M. Aubert, dans sa *Physiologie der Netzhaut* [1]), s'étend aussi sur ces phénomènes, pour lesquels il adopte l'interprétation de ses prédécesseurs, tant en ce qui concerne la micropsie qu'au sujet de la représentation secondaire d'une distance plus considérable.

Un second phénomène, qui paraissait démontrer l'influence de l'accommodation exigée sur la représentation de la distance, fut fortuitement observé par M. Donders quelques années plus tard, en 1868 [2]).

Lors d'un séjour à Leipzig, il occupait une chambre dont la tapisserie présentait un réseau de larges bandes jaune clair sur un fond bleu finement rayé de noir. Regardant du côté du mur, à une distance de 10 à 12 pieds, il vit tout à coup le réseau de bandes jaunes se porter en avant du fond bleu et prendre l'aspect d'un treillage, éloigné du mur de plus de 20 centimètres. L'illusion était si complète, qu'involontairement M. Donders alla vers le mur, mouvement pendant lequel le treillage se rapprocha de plus en plus du fond bleu et finit par se confondre sensiblement avec lui.

Une autre preuve de la perfection de l'illusion, c'est que, lorsque la tête était portée alternativement à droite et à gauche, le treillage semblait se mouvoir devant la paroi, — évidemment parce qu'en réalité il était en repos par rapport à cette paroi, en d'autres termes, parce qu'il y avait absence du mouvement parallactique qu'un treillage matériel, situé en avant du mur, aurait montré lors du déplacement de la tête. Pour M. Ludwig toutefois, auquel le réseau apparaissait également comme treillage, l'illusion disparaissait quand il balançait la tête, précisément, à ce qu'il pensa, à cause de

---

1) Breslau, 1865.

2) *Wetensch. bijbladen, behoorende bij het jaarverslag van het Ned. Gasthuis voor Ooglijders over* 1868, p. 11.

l'absence du mouvement parallactique nécessaire. Sur M. Zöllner, qui l'accompagnait, l'illusion n'agissait que médiocrement.

Dans les deux cas dont il vient d'être question, l'importance attachée au résultat tenait surtout à ce qu'il n'y avait en jeu qu'une différence d'accommodation, la convergence restant la même, et qu'on observait donc l'effet de l'accommodation entièrement dégagé de celui de la convergence. Cette circonstance semblait eu outre rendre compte du grand effet de la tension, laquelle doit être beaucoup plus forte lorsque l'accommodation a lieu sans changement de la convergence.

Récemment, M. Donders [1]) s'est occupé du mouvement qui semble se produire sur les tableaux lorsque le spectateur change de place, et il attribue ce mouvement apparent à l'absence de l'effet de parallaxe que la représentation de la troisième dimension devrait faire attendre. A cette occasion, il a donné une analyse des générateurs de notre représentation de la troisième dimension, tant pour la contemplation des ouvrages de peinture que pour la vision des objets dans l'espace. Parmi ces générateurs il compte aussi l'accommodation, en faisant remarquer qu'ici, comme pour les mouvements en général, ce n'est pas le mouvement lui même, mais l'impulsion consciente au mouvement, qui détermine la représentation.

Ce travail l'avait conduit, toutefois, à examiner de plus près l'influence de l'accommodation sur la représentation de la distance en cas de différence de couleur. A cet effet, il se servit surtout de lignes alternatives de lettres rouges et bleues (capitales romaines, hautes de 8 cm., larges de 4 cm.), de teintes vives, tant sur velours noir que sur papier blanc [2]).

Le résultat de cet examen ne fut pas satisfaisant.

---

1) *Proces-verb. Kon. Akad. v. Wetenschappen*, 31 janv. 1885.

2) Les lettres de notre planche (Pl. X) sont un peu plus petites et de de couleur moins intense, mais elles donnent néanmoins une idée suffisante du phénomène.

Pour M. Donders, et pour beaucoup d'autres personnes, l'impression était nette, très frappante même. Il voyait les lettres rouges en avant des bleues, comme si elles étaient réellement en avant, à une distance fixe, qui comportait une estimation assez exacte et croissait régulièrement lorsqu'il s'éloignait du plan, décroissait quand il s'en rapprochait. L'illusion étant complète, il constatait aussi, de même qu'il l'avait fait antérieurement pour le treillage sur le mur, que, lorsque la tête était mue latéralement, les lettres semblaient glisser les unes devant les autres dans le sens opposé à celui de la parallaxe que l'illusion faisait attendre.

Mais, en contraste avec ce résultat, l'effet était chez d'autres observateurs incertain ou variable, et parfois même ils voyaient tout le contraire, — les figures bleues en avant des rouges, — quelques-uns avec une netteté qui provoquait aussi, lors du mouvement de la tête, le déplacement parallactique apparent en sens opposé.

Or, cette différence de résultat était tout à fait énigmatique. Pour tous les yeux le défaut d'achromatisme est indubitablement le même et doit donc faire sentir dans le même sens son influence sur l'accommodation exigée. Cette influence ne saurait d'ailleurs être que celle-ci: les objets rouges, qui pour être vus nettement demandent un plus grand effort d'accommodation, paraîtront s'avancer vers l'œil plus que les objets bleus. Il résultait donc des expériences que l'hypothèse de l'accommodation ne suffisait pas pour expliquer le phénomène. En admettant qu'il y ait lieu d'en tenir un certain compte, d'autres causes, pouvant acquérir une importance prépondérante, doivent intervenir. — On remarqua, en outre, que dans la vision monoculaire la différence apparente de distance disparaît presque entièrement, fait dont l'hypothèse de l'accommodation ne saurait non plus rendre suffisamment raison. Il se peut bien que dans la vision par un seul œil l'effet soit moindre, parce que l'accommodation, cessant d'être liée à une convergence invariable, a un jeu plus libre; mais il

est impossible d'attribuer à cette cause la suppression totale de l'effet. — Enfin, l'hypothèse était également incapable d'expliquer le résultat des observations concernant l'influence des verres de lunettes et de la différence du fond, blanc ou noir.

Toutes ces objections, qui s'élevaient contre l'hypothèse de l'accommodation, me furent communiquées, au cours des expériences, par M. le professeur Donders; il m'engagea à étudier les phénomènes systématiquement, chez moi-même et chez d'autres, et me fit remarquer qu'il s'agirait surtout d'examiner les cercles de dispersion et d'avoir égard aux différences qui s'observent dans la vision monoculaire et binoculaire.

J'acceptai avec plaisir cette invitation, et telle est l'origine des recherches suivantes, dans lesquelles M. Donders a bien voulu m'aider de ses conseils et de son intervention directe.

2. Pour commencer, je répétai et comparai les expériences par vision monoculaire et binoculaire. Regardant binoculairement, et ayant alors la représentation distincte de la différence de distance, je la voyais disparaître, puis reparaître, chaque fois que, par le mouvement de la main, je masquais, puis démasquais, l'un des deux yeux. Même quand la fixation par un seul œil était longtemps continuée, les lettres rouges et les lettres bleues restaient dans le même plan; mais, l'autre œil à peine découvert, la différence de distance s'imposait irrésistiblement, différence qui demeurait ensuite constante et se laissait très bien estimer, — tout comme dans l'observation stéréoscopique vraie. Je me posai donc la question s'il n'y aurait pas réellement de la stéréoscopie en jeu, et bientôt je me convainquis que lorsque, chaque œil étant asymétrique, les deux yeux sont symétriques l'un par rapport à l'autre, on peut effectivement trouver, dans les images rétiniennes de points différemment colorés, le fondement d'une action stéréoscopique.

Dans un œil symétrique, dont l'axe oculaire et la ligne visuelle coïncident et passent perpendiculairement par le centre

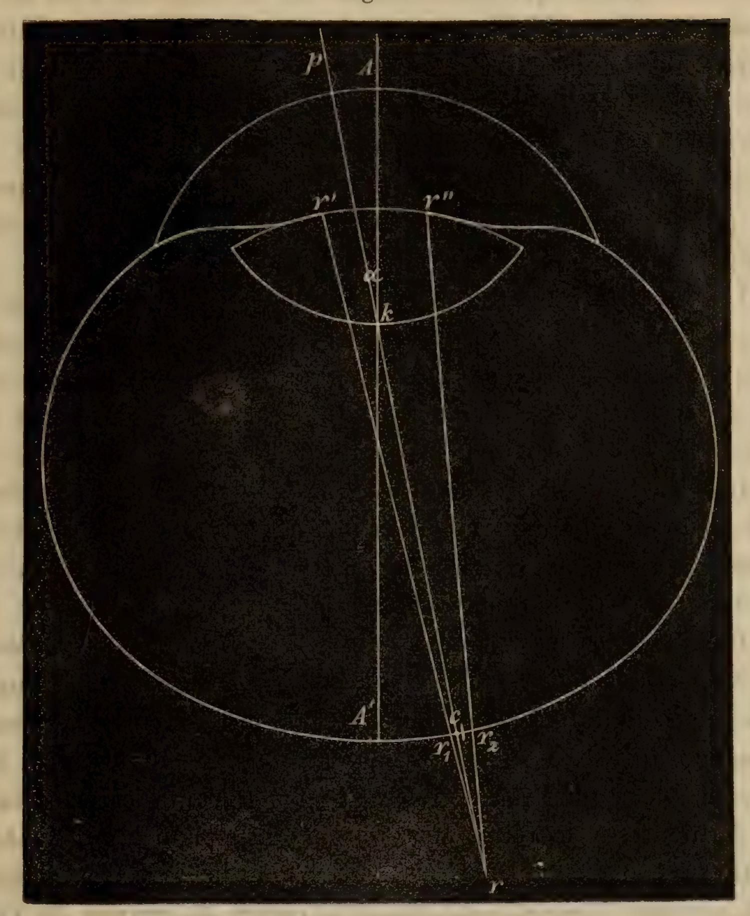
d'une pupille parfaitement ronde, tous les points fixés formeraient des cercles de dispersion parfaitement ronds, dont les centres coïncideraient, sur la *fovea centralis*, avec l'image de celui des points fixés pour lequel l'œil est accommodé; les pinceaux de lumière de tous les points fixés seraient en effet des cônes mathématiques, ayant un axe commun. Mais l'œil normal n'est pas symétrique. La *fovea* est située au côté temporal de l'axe oculaire, et la ligne visuelle du point fixé, dirigée par le point nodal (combiné) de l'œil sur la *fovea*, fait avec l'axe un angle d'environ 5 degrés en moyenne, angle désigné par α.

Il en résulte que, si l'œil est adapté à une lumière d'espèce déterminée, par exemple au rouge homogène, le centre du cercle de dispersion de rayons plus réfrangibles, par exemple des rayons bleus, émis par le même point, ne coïncide plus avec l'image de la lumière rouge.

C'est ce que représente la fig. 1, dans laquelle, pour rendre l'effet plus sensible, on a fortement exagéré l'asymétrie (situation excentrique de la *fovea* et grand angle α) et la différence de réfrangibilité des rayons rouges et bleus, dont les foyers respectifs ne sont en réalité, comme il sera montré plus loin par le calcul, que peu distants l'un de l'autre. AA' est l'axe de l'œil, c la *fovea centralis* de la rétine, k le point nodal, pkc la ligne visuelle, α l'angle compris entre l'axe oculaire et la ligne visuelle.

Nous nous figurons l'œil adapté aux rayons bleus émanant d'un certain point, lesquels rayons se réunissent en c, l'un des points de la *fovea centralis*. Les rayons rouges $r'r$ et $r''r$, partis du même point, ne concourraient alors que derrière la rétine, en r, et formeraient sur la rétine un cercle de dispersion r_1r_2. Le centre de ce cercle de dispersion (qui est aussi, à peu près, le centre de gravité de l'intensité du cercle de dispersion) se trouve sur le petit trait marqué au côté temporal du foyer c des rayons bleus, et à ce centre correspondrait aussi le petit cercle de dispersion des rayons rouges,

Fig. 1.



tel que, en cas d'accommodation aux rayons bleus, il se présente en réalité.

L'œil gauche étant symétrique à l'œil droit — représenté, vu d'en haut, par notre figure — le centre, dans cet œil gauche, se trouvera également au côté temporal de *c*.

Si nous supposons que les rayons rouges soient émis par un point situé un peu au-dessus de celui d'où émanent les rayons bleus, les images du premier point tomberont, lorsqu'on fixe le second, un peu au côté temporal du méridien vertical, de même qu'elles tombent au côté temporal de *c* quand les rayons rouges partent du même point que les rayons bleus.

Or, des images qui dans chaque œil se trouvent près de la *fovea* dans un méridien vertical, donnent la représentation d'un objet situé à la même distance que l'objet fixé par la vue; ces demi-images se trouvent-elles au contraire au côté temporal du méridien, elles développent, d'après les lois de la stéréoscopie, la représentation d'une distance moindre pour le point correspondant. Le point rouge paraîtra donc plus rapproché, le point bleu plus éloigné.

La distance mutuelle des demi-images est naturellement la même lorsque le point qui émet les rayons rouges n'est pas situé au-dessus, mais au-dessous ou à côté du point bleu, et le résultat reste donc identique, savoir, que le point en question semble un peu plus rapproché que le point fixé.

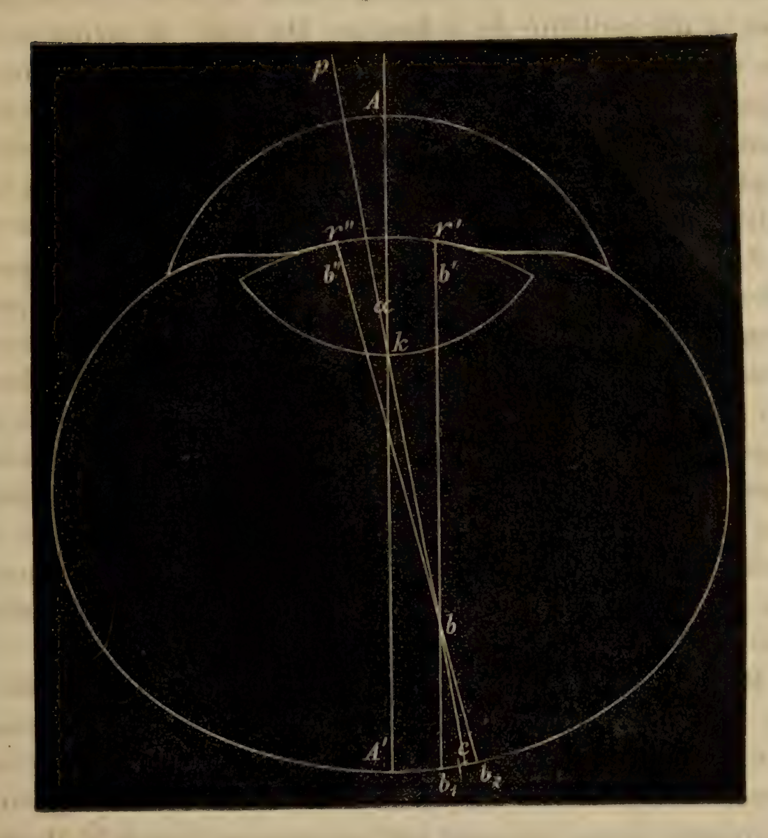
La situation relative des images rétiniennes rouge et bleue est la même quand l'œil n'est pas adapté aux rayons bleus, mais aux rayons rouges. On pourra de nouveau s'en convaincre en effectuant la construction.

Dans la fig. 2, AA' est encore l'axe de l'œil, c la *fovea centralis*, k le point nodal, pkc la ligne visuelle et α l'angle que cette ligne fait avec l'axe. Ici, $r'c$ et $r''c$ sont les rayons rouges, qui se réunissent dans la *fovea* c. Par contre, les rayons bleus plus réfrangibles $b'b$ et $b''b$ s'entre-croisent en b et forment sur la rétine le cercle de dispersion $b_1 b_2$, dont le petit trait placé au côté nasal de c marque le centre (lequel est en outre approximativement le centre de gravité de l'intensité). — Dans la fig. 1 le petit trait se trouvait au côté temporal du foyer des rayons bleus; ici il est situé au côté nasal du foyer des rayons rouges: dans les deux cas la situation relative des images des rayons rouges et bleus est donc la même et l'effet stéréoscopique par conséquent égal.

Nous voyons en effet, en fixant les points rouges, les bleus en demi-images croisées, en fixant les points bleus, les rouges en demi-images homonymes les point rouges sont donc toujours vus plus rapprochés.

Dans la stéréoscopie ordinaire, lorsque la vue se fixe alter-

Fig. 2.



nativement sur les points plus et moins éloignés, la représentation de la distance est déterminée non-seulement par les demi-images, mais en outre par les changements de la convergence.

Celle-ci intervient-elle aussi quand on regarde alternativement le point rouge et le point bleu?

Cela serait le cas si, en passent d'un point à l'autre, on ne modifiait en même temps l'accommodation, conformément à la couleur; la différence de situation des demi-images, par rapport au point fixé, entraînerait alors effectivement un changement de convergence. Mais, au moins chez les personnes encore jeunes, l'accommodation au point nouvellement fixé entrera sans doute inconsciemment en jeu, et par suite la

convergence exigée sera invariablement la même, quelle que soit la réfrangibilité de la lumière. Du reste, là même où il ne saurait être question de changement de convergence, l'impression stéréoscopique n'en est que faiblement affectée, comme l'ont appris surabondamment les expériences stéréoscopiques faites sous l'éclairage de l'étincelle électrique, à condition que les yeux pussent se diriger sur un point déterminé [1]).

3. Les résultats précédents ont été obtenus dans la supposition (fig. 1 et 2) que l'axe de l'œil asymétrique passe perpendiculairement par le centre de la pupille. De cette condition se rapproche en effet la situation de la pupille dans un assez grand nombre d'yeux. Le point d'intersection de la ligne visuelle et de la pupille est alors déplacé vers le côté nasal, d'autant plus, comme le montre un coup d'œil jeté sur les fig. 1 et 2, que l'angle α est plus grand et que le point nodal est situé plus profondément: il en résulte, comme on l'a vu, que les figures rouges semblent plus rapprochées que les bleues.

Mais, dans la plupart des yeux, le centre de la pupille, au lieu de correspondre à l'axe oculaire qui passe environ par le milieu de la cornée, est déplacé du côté nasal. Cela ressort souvent de la simple inspection de l'œil et a d'ailleurs été prouvé péremptoirement par les déterminations de M. Horstmann [2]) et d'autres. Par ce déplacement la ligne visuelle, surtout quand l'angle α est relativement petit, peut atteindre et même dépasser le centre de la pupille. On comprend aisément, sans construction spéciale, que les points rouges et bleus sont alors vus dans le même plan, — et que même, si le centre de la pupille est dépassé, les points bleus paraissent plus rapprochés que les rouges. De cette façon il est

---

[1]) Comp. F. C. Donders, *Binoculäres Sehen und Vorstellung der dritten Dimension*, dans: *Archiv für Ophthalm.*, XIII, 1, p. 3.

[2]) *Ueber die Tiefe der vorderen Augenkammer*, *von* Dr. R. Horstmann, *l. c.*, XV, 1, p. 79.

rendu compte des différences individuelles qui s'observent quant à la situation en profondeur des points rouges et bleus.

4. Expérimentalement, la signification du déplacement latéral de la pupille pour la situation en profondeur des images colorées se laisse démontrer d'une manière saisissante. Il suffit de couvrir la pupille, soit du côté nasal, soit du côté temporal. Couvrir partiellement la pupille du côté temporal équivaut à la déplacer vers le côté nasal, et, réciproquement, la masquer du côté nasal produit le même effet que son déplacement vers le côté temporal. Celui qui voit les lettres rouges en avant des bleues n'a qu'à couvrir les pupilles du côté temporal pour voir ces lettres rouges reculer successivement et bientôt fuir en arrière des bleues; couvre-t-il au contraire les pupilles du côté nasal, les lettres rouges s'avancent de plus en plus, d'une quantité qui, si l'expérience a lieu à la distance de 4 ou 5 mètres, finit par atteindre plusieurs décimètres. Quant à celui qui voit les lettres bleues en avant des rouges, il verra, en couvrant les pupilles du côté nasal, les lettres bleues reculer d'abord jusque dans le plan des rouges, puis dépasser ce plan.

Pour couvrir les pupilles on peut se servir d'une couple d'étroites cartes de visite, de préférence noircies. Même une carte unique, glissée devant l'un des yeux, produit déjà l'effet en question, mais seulement à demi et en outre d'une manière plus ou moins troublée, parce que la demi-image de l'œil couvert perd de son intensité lumineuse. Quand il s'agit d'expériences exactes, avec détermination quantitative, nous avons trouvé très avantageux d'employer une monture de besicles à anneaux mobiles au moyen de vis. Ces anneaux sont garnis de petites plaques noires semi-circulaires, susceptibles de rotation, de sorte que leurs bords libres peuvent à volonté être tournés vers le côté interne ou externe de la pupille. Lorsqu'à l'aide des vis on fait mouvoir les anneaux, les plaques participent au déplacement et couvrent plus ou moins les pupilles.

L'effet est surtout prononcé si les pupilles ont été toutes les deux dilatées par l'atropine; on peut alors faire usage de plaques percées d'ouvertures rondes, lesquelles ouvertures agissent comme de petites pupilles se laissant déplacer symétriquement au-devant des grandes, soit du côté nasal, soit du côté temporal.

Les expériences qui viennent d'être communiquées n'ont pas seulement de l'importance en ce qu'elles mettent hors de doute l'influence de la situation des pupilles, mais aussi en ce qu'elles rendent le phénomène visible pour tout le monde et engagent à faire des observations exactes avec les pupilles noncouvertes.

5. Chez M. Brücke [1]) nous trouvons relatée, sous le nom de „centrage imparfait" (*mangelhafte Centrirung*), une observation qui illustre à merveille le déplacement relatif d'images différemment colorées. Regardant d'un seul œil une raie droite verticale, rouge en haut et en bas, bleue au milieu, placée sur fond noir, il remarqua que la partie bleue était déviée d'un côté, les deux parties rouges du côté opposé; pour des yeux différents, la déviation avait lieu dans une direction différente.

M. Brücke voit dans ce fait la preuve „que l'œil humain n'est pas exactement centré, du moins pas autour de la ligne visuelle, lorsque le phénomène est observé par vision directe."

Nous n'avons toutefois besoin, pour expliquer ce phénomène, que de l'asymétrie ci-dessus décrite. En couvrant alternativement l'un et l'autre œil, on observe un déplacement en sens opposé des parties bleue et rouge, et si alors on regarde des deux yeux, les demi-images développent la sensation d'une différence de distance, celles qui sont déplacées vers le plan médian formant l'image antérieure, celles déviées vers le côté temporal l'image postérieure. On peut aussi, en couvrant l'une des pupilles du côté temporal ou du côté nasal, augmenter ou

---

[1]) *Vorlesungen über Physiologie*, 3e Aufl., t. II, p. 195, Vienne 1884. Comp. Ueber asymmetrische Strahlenbrechnung im menschlichen Auge, *Wiener Akademische Sitzungsberichte*, Bd. LVIII, 2te Abth., S. 321.

diminuer, supprimer ou renverser la déviation de cet œil, et en couvrant simultanément les deux pupilles du côté nasal ou temporal, on obtient les distances stéréoscopiques correspondantes. C'est ainsi que la raie de Brücke met en lumière tous les phénomènes que nous avons décrits, et, par le déplacement visible des demi-images, elle rend l'explication encore plus palpable que ne le font les lettres: le seul avantage de ces dernières, c'est qu'avec elles l'effet stéréoscopique s'accuse d'une manière plus nette et plus convaincante.

Sur notre planche, au-dessous des lettres bleues et rouges, on trouve aussi la raie de Brücke, qui pour l'expérience doit être tenue verticalement. Des lignes à couleurs plus vives, sur fond de velours noir, satisfont encore mieux.

6. M. Donders avait déjà remarqué, contrairement à l'hypothèse de l'accommodation, que quelques personnes ne voient pas les lettres rouges en avant des bleues, mais les lettres bleues indubitablement en avant des rouges. Pour étudier cette différence de plus près, j'ai déterminé chez une trentaine de personnes, à la distance d'environ 3 mètres, la situation relative du rouge et du bleu, en ayant aussi recours dans chaque cas à la couverture symétrique des pupilles au côté temporal et au côté nasal. Le résultat est qu'environ la moitié de ces personnes voient le rouge en avant du bleu, l'autre moitié le bleu en avant du rouge. Presque toutes déclarent voir immédiatement une différence. Pour beaucoup d'entre elles le phénomène est même frappant: elles ne doutent ni n'hésitent. Chez une dizaine, toutefois, l'impression était plus faible: du moins au début, elles restaient dans l'incertitude. Deux affirmèrent catégoriquement qu'aucune différence de distance ne se développait, même quand elles fixaient alternativement les lettres rouges et les lettres bleues; néanmoins, après couverture temporale, elles voyaient immédiatement le bleu en avant du rouge, après couverture médiane le rouge en avant du bleu. Chez deux autres, enfin, qui, même lorsque les pupilles étaient rendues artificiellement obli-

ques, ne voyaient pas de différence de distance, nous en trouvâmes la cause dans le manque de vision binoculaire.

Il n'est pas nécessaire que les images soient très nettes: M. Donders, dont le pouvoir d'accommodation a fléchi, qui a acquis 1 D. d'hypermétropie et auquel les lettres rouges surtout apparaissent maintenant assez diffuses, voit le phénomène aussi distinctement qu'il y a 17 ans.

Pour M. Donders et pour moi-même, nous déterminâmes avec plus de précision de combien les lettres rouges devaient en réalité être placées en arrière des bleues, pour paraître se trouver dans le même plan qu'elles. A cet effet, la feuille chargée des lettres coloriées fut partagée en deux moitiés, une inférieure avec les lettres bleues, une supérieure avec les lettres rouges. La demi-feuille inférieure est fixée par son bord supérieur à une planchette horizontale, pourvue d'une rainure dans laquelle peut glisser en avant et en arrière une seconde planchette, qui porte la demi-feuille supérieure: la distance réelle entre les deux feuilles se lit sur la planchette. A trois mètres de distance, M. Donders estimait *r b* (le rouge en avant du bleu) à 10 centimètres. En déterminant *r b* à l'aide de l'appareil, il trouva en moyenne 11 cm, avec une erreur moyenne (écart moyen à la moyenne générale) $m_1 = 0{,}8$.

Le rouge fut ensuite placé, pendant que M. D. fermait les yeux, à différentes distances (*a*) en arrière du bleu, après quoi M. D. estimait de combien le rouge était vu en deçà (*b.* +) ou au-delà (*b.* —) du bleu: une addition ou une soustraction donnait alors la valeur de *r b*.

a.	7	9	9	11	13	11	10	8	12	10 cm.
b.	+ 2,5,	+ 1,	+ 2,	— 1,5,	– 2,	0,	0,	+ 2,	— 1,	+ 2 "
r b	9,5	10	11	9,5	11	11	10	10	11	12 "

moyenne 10,5, avec $m_1 = 0{,}7$.

On voit qu'il n'y avait jamais erreur quant au point de savoir si le déplacement était suffisant ou non, et que l'estimation de l'écart, par rapport au déplacement exigé, était passablement exacte.

Pourtant, à la limite de l'installation exacte, M. D. éprouvait une hésitation, dont la cause n'a pas été reconnue. Elle pourrait se trouver dans des changements du diamètre de la pupille, le centre de celle-ci étant susceptible de se déplacer plus ou moins, suivant les différents degrés de dilatation. Parfois, l'effort d'accommodation paraissait ramener le bleu un peu en avant. Si cet effort (à l'âge de 67 ans) restait sensiblement infructueux, un rétrécissement de la pupille n'en était pas moins distinctement visible: par suite, les lettres se montraient aussi moins diffuses.

Une influence notable est exercée par la parallaxe qui se produit, en vertu de la différence de distance des deux feuilles, quand la tête se meut. Lorsque, la feuille aux lettres rouges étant placée à 10 cm. en arrière de celle aux lettres bleues, les deux feuilles semblent se trouver à peu près dans le même plan, il suffit de balancer la tête à droite et à gauche pour que, par suite de la parallaxe, les lettres bleues se portent fortement en avant, dans leur situation réelle.

Exécutant les mêmes expériences sur moi-même, je trouvai que les lettres rouges devaient être placées en moyenne à 4 cm (avec $m_1 = 0,32$) en arrière des bleues, pour que les unes et les autres fussent vues dans le même plan. Dix observations fournirent ensuite:

a.	7	9,5	3	1	− 4	8	6	4	15	10
b.	− 3	− 8,5	+ 1	+ 3	+ 8	− 4	− 2	0	− 13	− 7
rb.	4	1	4	4	4	4	4	4	2	3

M. van Loon voit le bleu en avant du rouge. Il lui faut les lettres bleues à un peu plus de 1 cm en arrière des rouges, pour les voir dans le même plan. Cette distance, il la veut très exactement, et il ne se trompe jamais, quant au plus ou au moins, lorsqu'on s'écarte de $0^{cm},5$ de la moyenne trouvée.

7. Si nous avons réussi à montrer par le raisonnement et à confirmer par l'expérience que la situation de la pupille, relativement à la ligne visuelle, détermine le phénomène, cela implique évidemment que les différences individuelles

dépendent de la même cause. Néanmoins, pour exclure d'autres facteurs, on désirerait encore que le résultat pût être déduit de la structure de chaque œil. Cette déduction offre toutefois plus de difficulté qu'on ne le présumerait au premier abord. Directement, je ne vois pas comment le rapport de la ligne visuelle à la pupille se laisserait déterminer [1]). Pour le calculer, on doit connaître la direction de l'axe oculaire et de la ligne visuelle, et par là l'angle α; ensuite la profondeur où est situé le plan pupillaire, laquelle ne peut être obtenue avec beaucoup d'exactitude; enfin la profondeur du point nodal, ce qui demanderait la détermination de tout le système dioptrique et laisse également à désirer en exactitude, car, ainsi qn'on le verra par le calcul, de petites différences ont ici une influence notable.

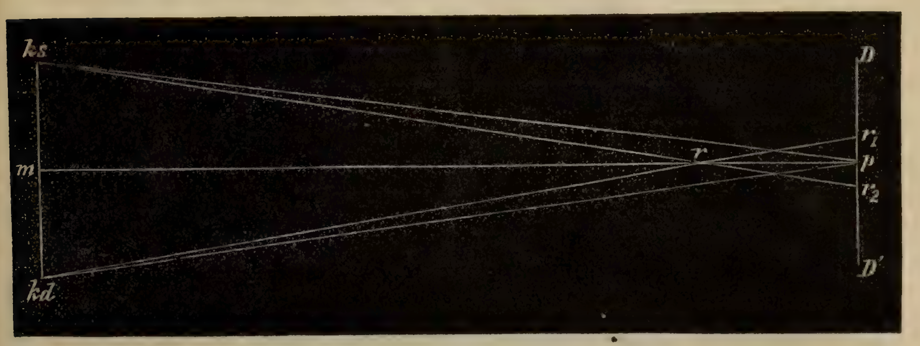
Néanmoins, il ne manque pas de faits indiquant que les différences individuelles tiennent aussi, essentiellement ou exclusivement, aux rapports qui existent entre la ligne visuelle et la pupille. Lorsque l'axe de l'œil passe sensiblement par le centre de la pupille et que l'angle α est relativement grand, comme chez M. Donders, chez l'aide de laboratoire Goenee et chez moi-même, le rouge se porte, sans exception paraît-il, fortement en avant du bleu; là où la pupille est déplacée vers le côté médian de l'axe oculaire et où l'angle α est plutôt petit que grand, le bleu se montre, inversement, en avant du rouge. Tel est le résultat, non sans valeur du reste, dont nous avons dû nous contenter.

---

[1]) A l'aide de l'ophthalmomètre on peut très bien déterminer la situation, par rapport à la pupille, de l'image par réflexion d'une flamme placée sur la ligne visuelle, et l'on peut aussi faire diriger l'œil en dehors de l'axe de l'ophthalmomètre d'un nombre de degrés tel qu'un pareil point de réflexion tombe juste au centre de la pupille; mais ces déterminations ne conduisent pas au but, vu que le centre de courbure de la cornée, lequel détermine la direction dans laquelle l'image réfléchie est vue, ne coïncide pas avec le point nodal: il faudrait donc, en tout cas, connaître exactement la profondeur à laquelle sont situés le plan de la pupille et le point nodal.

Au moyen de la différence de distance nous avons calculé l'écart du rouge par rapport au bleu sur la rétine.

Fig. 3.



Dans la fig. 3, k_d et k_s représentent les points nodaux de l'œil droit et de l'œil gauche : $p\,m$ est perpendiculaire au milieu de la droite qui joint k_s et k_d. Les deux yeux fixent le point lumineux bleu p, auquel ils sont adaptés, de sorte que $k_s p$ et $k_d p$ sont les lignes visuelles. Le point lumineux rouge, qui se trouve également en p, est vu par les deux yeux en r. Sur le plan DD' le point r sera projeté par l'œil droit en r_1, de sorte qu'il y aura entre le rouge et le bleu un écart apparent $p\,r_1$. Dans les triangles $r\,m\,k_d$ et $r\,r_1\,p$ on a :

$$p\,r_1 : k_d m = p\,r : r\,m.$$

Or, l'écartement de mes yeux est d'environ 60^{mm}, et à la distance de 3 M. les lettres rouges me paraissent situées à environ 4^{cm} en avant des bleues.

Nous avons donc :

$$m\,k_d = 30^{mm}$$
$$p\,r = 40^{mm}$$
$$p\,m = 3000^{mm}$$

et le calcul donne :

$$p\,r_1 = 0,^{mm}405.$$

Ce résultat s'accorde d'une manière satisfaisante avec la quantité du déplacement que j'observe dans la raie de Brücke à la distance de 3 mètres.

Pour calculer maintenant l'excentricité de la pupille, correspondante à $p r_1 = 0^{mm},405$, nous déterminons d'abord la grandeur de l'image rétinienne d'un objet $p r_1$ placé à la distance $p m$; cette détermination se fait par la formule $\beta : B = g_2 : g_1$, où B est l'objet, β l'image rétinienne, g_2 la distance de k à la *fovea* (environ 15^{mm}) et $g_1 = m p$. Nous trouvons ainsi pour β la petite valeur $0^{mm},0020$.

A l'aide de cet écart, nous calculons ensuite la déviation qu'il suppose entre la ligne visuelle et le centre de la pupille.

Fig. 4.



Dans la fig. 4, $i i'$ représente le plan pupillaire, $n n'$ la rétine, c la *fovea centralis*, s le point d'intersection de la ligne visuelle et du plan pupillaire, et m le centre de la pupille. L'œil est adapté aux rayons bleus du point lumineux blanc p, et ces rayons, en tant qu'ils sont recueillis par l'œil, concourent en c. Les rayons rouges, émanés du même point, se réunissent quelque part sur le prolongement de la droite $s c$, par exemple en r. Le centre de gravité du cercle de dispersion rouge se trouve à l'intersection r_1 de $m r$ et $n n'$, de sorte que la grandeur β de l'écart sur la rétine est représentée par $c r_1$. Dans les triangles $r r_1 c$ et $r m s$ nous avons:

$$s m : c r_1 = s r : c r.$$

En remplaçant les lettres par leurs valeurs, savoir, $c r_1 = \beta = 0^{mm},0020$ et $s r = s c + c r = 19 + 0,4$ (0,4 étant environ la différence calculée des distances focales pour les couleurs employées dans nos expériences), nous trouvons $s m = 0^{mm},10$.

On voit qu'une faible déviation de la ligne visuelle, par rapport au centre de la pupille, suffit pour déterminer une

différence notable entre les distances apparentes des figures rouges et bleues.

L'écartement apparent a du rouge et du bleu change suivant qu'on se rapproche des figures, ou qu'on s'en éloigne. Il est facile de calculer de quelle manière et dans quelle mesure ces changements se produisent.

Dans l'équation

$$p r_1 : k a m = p r : r m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

(voir fig. 3 et p. 377 et 378)

on a, pour une personne déterminée,

$$p r_1 = m p . C;$$

en effet: $\beta : B = g_2 : g_1$,

ou $\beta : p r_1 = g_2 : m p$,

donc $p r_1 = m p . \frac{\beta}{g_2} = m p . C$

et $k a m = C'$.

En introduisant ces constantes C et C' dans l'équation (1) on obtient:

$$m p . C : C' = p r : r m,$$

d'où: $p r = r m . m p . C''$.

En termes ordinaires:

Pour une personne déterminée, l'écartement apparent a du rouge et du bleu est proportionnel au produit de la distance vraie A aux lettres bleues par la distance apparente A_1 aux lettres rouges.

Lorsque a est très petit par rapport à A, on peut, au lieu de $A \times A_1$, prendre A^2 ou A_1^2. L'écartement apparent a est alors proportionnel au carré de la distance de la personne.

L'expérience confirme suffisamment ce calcul, preuve nouvelle que le phénomène s'explique par la stéréoscopie.

8. Nous avons déjà remarqué plus haut que la différence de distance des figures rouges et bleues apparaît beaucoup

moins distinctement sur fond blanc que sur fond noir. Il faut en chercher la cause dans l'irisation qui s'observe au bord d'une surface blanche sur fond noir.

Dans la vision ordinaire, et l'accommodation étant satisfaisante, on n'aperçoit que peu ou point de séparation des couleurs au pourtour d'une surface blanche (même sur fond noir). Cela tient en partie à la faiblesse des couleurs extrêmes, rouge et bleu, et à la grande intensité des rayons moyens. L'irisation devient au contraire manifeste, comme le savait déjà Newton, quand la pupille est partiellement couverte, phénomène dont M. Helmholtz [1]) a donné une explication simple. Il dit expressément, toutefois, que des surfaces blanches, pour lesquelles l'œil s'est exactement accommodé, ne montrent pas de bords colorés tant que la pupille est tout à fait libre. Or, comme j'avais reconnu que même dans l'œil découvert la ligne visuelle, chez la plupart des individus, ne passe pas par le centre de la pupille, je supposai qu'un peu de dispersion serait encore vu, en cas d'accommodation parfaite, sans qu'il fût nécessaire de masquer en partie la pupille. Je trouvai ma présomption confirmée en tenant verticalement devant l'œil, à une longueur de bras, un crayon d'un noir mat, projeté sur un nuage blanc clair. Le crayon étant regardé d'un seul œil, rigoureusement adapté, l'un de ses bords est vu bleuâtre, l'autre rougeâtre, ce qui devient encore plus distinct, par l'interversion des couleurs, lorsqu'on fixe alternativement de l'œil droit et de l'œil gauche. Dans la vision binoculaire les bords colorés disparaissent, parce que, les deux yeux étant symétriques l'un par rapport à l'autre, le bleu et le rouge tombent en des points correspondants des rétines et, en majeure partie, neutralisent réciproquement leur action.

Or, c'est cette dispersion qui, en cas de fond blanc, nuit à l'écartement apparent des lettres rouges et bleues. Nous devons nous figurer alors un déplacement des couleurs composantes

---

[1]) *Physiol. Optik.* p. 129.

du blanc contigu aux lettres, déplacement analogue à celui qui s'observe, dans la raie verticale de Brücke, entre le rouge et le bleu. Supposons que, pour l'un des yeux, une lettre rouge sur fond blanc soit déplacée vers la gauche; la décomposition du blanc qui la borde à droite fera apparaître du rouge, et, inversement, à gauche se montrera, à côté du violet et du bleu très faibles, le vert-bleu vif, qui est environ la couleur complémentaire du rouge. De cette manière, le rouge sera élargi au côté droit et neutralisé par la couleur complémentaire au côté gauche, de sorte que les deux bords demeureront à peu près à leur place, et qu'il ne restera donc que peu de chose ou rien du tout (la raie de Brücke sur fond blanc peut nous l'apprendre) du déplacement apparent. Il en sera de même, *mutatis mutandis*, pour l'autre œil et pour le bleu.

Or, avec le déplacement, doit aussi se perdre, en grande partie, l'impression stéréoscopique d'une différence de distance.

9. Il a déjà été dit, ci-dessus, que les verres de lunettes ont une influence sur la distance apparente de nos lettres rouges et bleues.

Si l'on tient devant les yeux des verres positifs, les axes déviés du côté temporal des lignes visuelles, les lettres bleues se portent plus en avant que les rouges, tandis que ces dernières s'avancent le plus lorsque les axes sont déviés du côté médian des lignes visuelles. Un léger écart latéral fait déjà apparaître distinctement l'influence en question, d'autant plus distinctement que les verres sont plus forts. Les verres négatifs produisent, pour la même déviation des axes, une action opposée.

Pour expliquer l'effet des verres de lunettes, considérons d'abord celui de prismes faibles. Placés devant les yeux, les arêtes réfringentes en dedans, ils déplacent du côté médian les lettres des deux couleurs, mais les bleues plus que les rouges, d'où il résulte que les premières se portent plus en avant que les secondes. Retourne-t-on les prismes, les arêtes

réfringentes en dehors, on voit, pour autant que les verres permettent de réunir les demi-images, les lettres rouges se rapprocher de l'œil plus que les bleues.

Or, les verres de lunettes, quand leurs axes sont déviés latéralement, agissent comme des prismes. La pupille ne reçoit que les rayons transmis par une partie déterminée du verre de besicles. Si cette partie est située en dehors de l'axe, l'action réfringente peut être décomposée en celle de convergence ou de divergence et en celle de dispersion prismatique. Tandis que la première donne l'image, la seconde est d'autant plus forte que la transmission a lieu en des points où les tangentes aux deux surfaces (dans la direction des méridiens horizontaux) font entre elles un angle plus grand. Elle est donc le plus forte pour les parties périphériques des verres. On peut facilement s'en convaincre avec une lentille de grande dimension (une loupe à lire, par ex.): si l'on meut une pareille lentille devant l'œil, de droite à gauche et de gauche à droite, pendant qu'on fixe la limite entre le rouge et le bleu d'une raie de Brücke, placée verticalement, on voit le segment bleu et le segment rouge glisser un peu latéralement dans des sens différents, d'une quantité croissante à mesure qu'on approche des limites. La partie déterminée de la lentille, à travers laquelle la pupille reçoit ses rayons d'un même point, exerce donc une action dispersive sur les couleurs, tout comme un prisme; ainsi se trouve expliquée l'influence des verres de lunettes sur la distance apparente de nos lettres rouges et bleues.

Des verres de lunettes de *une* dioptrie sont déjà suffisants pour neutraliser l'effet de l'excentricité ordinaire de la ligne visuelle dans la pupille, telle qu'elle existe chez M. Donders et chez moi.

10. Lorsque nous fixons les deux yeux sur un point, les demi-images d'un second point suffisent à elles seules pour nous renseigner sur sa situation en avant ou en arrière du point fixé. C'est ce qui a été demontré par des recherches

stéréoscopiques En fixant un point lumineux à peine perceptible dans une caisse obscure, nous formons un jugement exact quant au lieu d'une étincelle électrique qui apparaît en ses demi-images [1]). Ces demi-images sont situées chacune du même côté que l'œil correspondant lorsque l'étincelle éclate au-delà du point fixé, du côté opposé lorsqu'elle éclate en deçà. Il est vrai que nous ne sommes pas capables de décider laquelle des demi-images est vue par l'œil droit, laquelle par l'œil gauche. Mais cela n'empêche pas qu'elles pourraient différer l'une de l'autre et que cette différence pourrait nous conduire inconsciemment à la représentation exacte. Or, il résultait de nos recherches que, au moins pour la grande majorité des yeux, les deux demi-images doivent présenter une différence d'irisation, et il me parut donc intéressant d'examiner si nous tirions de là, sans en avoir conscience, quelque indication. A cet effet, opérant avec la caisse de M. Donders, nous renversâmes pour les deux yeux la dispersion des demi-images, en couvrant symétriquement les pupilles du côté temporal et du côté nasal: le résultat fut que cette interversion n'avait aucune influence sur la représentation de la distance. On doit en conclure que notre perception stéréoscopique ne s'appuie pas inconsciemment sur des effets différents de dispersion. L'utilité que celle-ci pourrait avoir reste provisoirement une énigme.

11. Il n'est pas sans intérêt non plus de chercher quel rapport existe entre l'excentricité de la pupille et l'opération de viser. Viser, c'est placer l'œil de façon que des points situés en ligne droite, à des distances différentes de l'observateur, paraissent se recouvrir l'un l'autre. Ces points se trouvent alors sur une ligne de mire [2]), qui est celle de la vision directe lorsque l'œil fixe l'un d'entre eux.

A la ligne de mire correspond un rayon lumineux commun

---

[1]) Voir F. C. Donders, *Binoculäres Sehen und Vorstellung der dritten Dimension*, dans *Archiv für Ophthalmologie*, XIII, p. 3.

[2]) Helmholtz, *Physiol. Optik.* p. 99.

à tous les points qui sont situées sur elle. Ce rayon ne peut être réfracté dans l'œil que suivant une seule direction. Dans l'air, il est dirigé sur le centre de la pupille apparente; il passe par le centre de la pupille réelle et, dans sa marche à travers l'humeur vitrée, par le centre de l'image cristallinienne de la pupille. En conséquence, les cercles de dispersion des points d'une ligne de mire sont disposés concentriquement autour de ce rayon dans l'humeur vitrée et leurs centres se recouvrent tous sur la rétine.

M. Helmholtz suppose que la ligne visuelle passe par le milieu de la pupille, auquel cas la ligne visuelle et la ligne de mire coïncideraient. Mais, si la pupille a une situation excentrique, ces lignes forment un angle au point fixé, pour lequel l'œil est accommodé; l'une d'elles joint ce point au centre de la pupille, l'autre au point nodal. L'angle en question est 0°, lorsque le point de fixation est infiniment éloigné, mais il croît à mesure que diminue cette distance, à laquelle il est à peu près inversement proportionnel. Si maintenant l'œil s'adapte successivement, avec fixation persistante, à des points différents sur la ligne de mire, la ligne visuelle doit chaque fois changer de direction, l'œil doit donc tourner. Et, pour continuer alors à satisfaire à la condition que les points de la ligne de mire donnent des cercles de dispersion concentriques, le centre de la pupille doit conserver la même position dans l'espace. L'axe autour duquel l'œil tourne à mesure que la direction change, passe donc par ce centre.

Le fait que, lorsqu'on vise, la pupille doit occuper dans l'espace une place déterminée et invariable, quelle que soit la direction de la ligne visuelle, est facile à démontrer expérimentalement.

Tenons tout près de l'œil une plaque percée d'une petite ouverture, qui joue alors le rôle de petite pupille, et plaçons la plaque de manière que deux objets, dont l'un est à quelques mètres, l'autre à quelques centimètres de l'œil, soient vus exactement en coïncidence. En faisant mouvoir l'ouverture

(la petite pupille) devant l'œil immobile, nous observerons une forte parallaxe entre les deux objets. Quand, au contraire, la plaque est fixée et que, derrière elle, l'œil se meut à droite et à gauche, la parallaxe fait défaut.

Ce qui vient d'être dit ne s'applique qu'à la visée de points semblablement colorés. Deux points rouges et un point bleu, situés en ligne droite à des distances différentes de l'œil, ne peuvent jamais être amenés à se recouvrir lorsque la pupille est excentrique. Des trois rayons lumineux qui en émanent et qui, d'après ce que nous avons vu, coïncident avec la ligne de mire, le bleu est réfracté dans une autre direction que les deux rouges; le cercle de dispersion du point bleu sera donc nécessairement déplacé par rapport aux cercles de dispersion concentriques des points rouges.

On aura remarqué que les considérations ci-dessus exposées ne sont pas sans importance pour le choix d'une hausse (cran ou trou de mire) et pour la théorie du pointage des armes à feu. Ce n'est pas ici le lieu, toutefois, d'insister sur cette matière.

12. La cause occasionnelle de notre travail avait été la question de savoir si le peintre, abstraction faite de la perspective aérienne, peut se servir des différences de couleur pour favoriser l'illusion de la troisième dimension: dans l'hypothèse de l'accommodation, qui laissait supposer que la différence de couleur agirait chez tout le monde de la même manière, la réponse affirmative était très admissible. Maintenant, toutefois, nous savons que, chez des personnes différentes, les mêmes couleurs peuvent avoir une influence opposée sur le jugement de la distance. Pour quelques personnes — les lettres colorées nous l'ont appris — ce sont les couleurs chaudes, pour d'autres les couleurs froides, qui paraissent plus rapprochées: la couleur qui chez l'un seconderait l'illusion de la troisième dimension, pourrait donc y nuire chez un autre.

Néanmoins, comme les lointains prennent par suite de la perspective aérienne une teinte plus froide, on contracte

l'habitude d'associer à cette couleur froide l'idée de distance. Et il est plus que probable que nous transportons aussi cette tendance à la couleur des objets situés à proximité, pour lesquels il ne saurait être question de perspective aérienne.

13. Si, dans la situation excentrique de la ligne visuelle par rapport à la pupille, nous avons appris à connaître un puissant facteur de la distance apparente entre des figures de couleur différente, cela ne nous permet pas d'affirmer que l'influence de l'accommodation soit entièrement exclue. Au contraire, elle reste probable si l'on songe à l'action importante que l'effort de convergence, joint à celui d'accommodation, exerce sur la représentation de la distance [1]). Régulièrement, l'influence en question pourrait avoir pour effet de rapprocher le rouge et d'éloigner le bleu; mais, étant indubitablement petite, comparée à celle de la situation excentrique de la ligne visuelle, elle n'arrivera que rarement, ou jamais, à prédominer.

En sa faveur plaide également encore la micropsie qui, comme nous l'avons mentionné au début, a été maintes fois observée après l'instillation d'atropine, et dont la cause ne peut résider, à ce qu'il me semble, dans la grandeur réelle ou les autres propriétés des images rétiniennes. Je n'ai pas eu l'occasion d'étudier ce phénomène avec le soin nécessaire, car il ne s'est pas montré chez moi-même et a également fait défaut chez beaucoup d'autres personnes, qui se soumirent à l'expérience.

Si j'en avais rencontré des exemples bien prononcés, et exclusivement dans l'œil instillé, je n'aurais pas manqué de comparer, quant à leur grandeur et à leurs autres caractères, les deux images rétiniennes, amenées l'une à côté de l'autre; pour une pareille comparaison nous disposons de divers moyens, tels, au besoin, que l'emploi d'un prisme faible, l'angle tourné vers le haut ou vers le bas, devant un des yeux.

---

1) Voir: F. C. Donders, *Die Projection der Gesichtserscheinungen nach den Richtungen*, dans: *Archiv für Ophthalmologie.*, XVII. 2, p. 1.

En recherchant les circonstances capables de modifier la dimension de l'image rétinienne, je fus conduit à une expérience qui ne peut trouver d'application dans le cas actuel, mais que je me permets néanmoins de mentionner, parce que l'effet en est réellement frappant. Si, accommodant fortement, on fixe à travers une petite ouverture d'environ $0^{mm},5$ de diamètre une fine aiguille placée à proximité, et qu'en même temps on fasse attention à un objet éloigné, par exemple à une gravure attachée à la paroi, on voit, en mouvant l'ouverture entre l'œil et l'aiguille, cet objet éloigné devenir d'autant plus petit que l'ouverture est portée plus loin de l'œil et que celui-ci fait un plus grand effort d'accommodation. La construction de la marche des rayons lumineux est facile et montre clairement que le phénomène est entièrement déterminé par le changement de grandeur de l'image rétinienne.

UNE PROJECTION ÉQUIVALENTE AVEC DÉVIATION MINIMUM POUR UN TERRAIN CIRCULAIRE D'ÉTENDUE RESTREINTE,

PAR

Ch. M. SCHOLS.

---

§ 1 M. Tissot [1]) a montré, d'une manière simple, qu'il n'est pas possible de trouver pour l'hémisphère une projection équivalente dans laquelle le plus grand changement subi par un angle soit moindre que dans la projection équivalente zénithale. Sa démonstration s'applique également a un terrain de grandeur quelconque, limité par un cercle.

En effet, si a désigne le rayon sphérique de ce cercle et R le rayon de la surface terrestre sphérique, l'aire du terrain est:

$$4 \pi R^2 \sin^2 \frac{a}{2R},$$

Comme le terrain doit occuper sur la carte une aire équivalente, et que le cercle possède la propriété d'avoir pour une même surface le contour minimum, le terrain présentera sur la carte un contour au moins égal à la circonférence du cercle qui a pour surface l'aire ci-dessus donnée du terrain.

---

[1]) M. A. Tissot, *Mémoire sur la représentation des surfaces et les projections des cartes géographiques*, Paris, 1881, p. 110.

Le rayon de ce cercle est $2\,R\,sin\,\frac{a}{2\,R}$ et la circonférence $4\,\pi\,R\,sin\,\frac{a}{2\,R}$. Sur la surface terrestre, le contour du terrain est seulement de:

$$2\,\pi R\,sin\,\frac{a}{R}=4\,\pi\,R\,sin\,\frac{a}{2\,R}\,cos\,\frac{a}{2\,R},$$

d'où il résulte que le contour du terrain subit un agrandissement au moins égal à:

$$\frac{1}{cos\,\frac{a}{2\,R}}=sec\,\frac{a}{2\,R}.$$

A un pareil agrandissement correspond un changement d'angle qui s'élève au moins à $2\,\omega$, la valeur ω étant déterminée par l'équation:

$$2\,tang\,\omega=sin^2\,\frac{a}{2\,R}\,sec\,\frac{a}{2\,R}.$$

On voit donc qu'il est impossible d'imaginer une projection équivalente dans laquelle l'altération angulaire soit inférieure à la valeur calculée $2\,\omega$. Dans la projection équivalente zénithale, la valeur en question est l'écart le plus grand qui se rencontre, de sorte que l'existence de cette projection prouve la possibilité de trouver une projection où ce minimum de déviation ne soit pas dépassé.

Quand il s'agit de la représentation de l'hémisphère, on a $\frac{a}{R}=90°$ et par conséquent $tang\,\omega=\frac{1}{4}\sqrt{2}$, d'où il résulte: $2\,\omega=28°56'33''$. Pour un terrain d'étendue restreintre on peut, dans la formule ci-dessus, développer les lignes goniométriques en séries et négliger les termes d'ordre supérieur, ce qui donne: $2\,\omega=\frac{a^2}{4\,R^2}$; pour $a=170000$ mètres, c'est-à-dire pour le rayon du plus petit cercle pouvant être circonscrit à la Néerlande, on obtient ainsi: $2\,\omega=36''$.

§ 2. S'il est donc avéré qu'on ne saurait trouver une projection équivalente dans laquelle la plus grande altération des angles soit moindre que dans la projection équivalente zénithale, cela n'empêche nullement qu'il n'existe encore d'autres projections où le minimum de déviation, ci-dessus trouvé, n'est pas franchi.

Il est facile de reconnaître qu'une projection, pour jouir de cette propriété, devra satisfaire aux conditions suivantes:

1. Le contour du terrain, sur la carte, doit être un cercle.
2. Ce cercle doit être une ligne d'égale déformation.
3. En chaque point du cercle la direction du plus fort agrandissement doit être tangente au cercle.
4. Pour aucun des points à l'intérieur du cercle l'altération angulaire maximum ne doit être plus grande que pour la circonférence.

Dans les pages qui suivent, je développerai pour un terrain d'étendue restreinte, une projection de ce genre; savoir: une projection dans laquelle les parallèles sont représentés par des cercles, comme dans la projection de Bonne et dans la projection conique.

Lorsqu'il s'agit, en effet, de dresser la carte à grande échelle d'une région peu étendue, la projection équivalente zénithale présente cet inconvénient, qu'il n'y est pas tenu compte de l'aplatissement de la Terre et que les formules servant à calculer les coordonnées des points donnés par leur longitude et leur latitude sont assez compliquées. Si l'on veut avoir égard à l'aplatissement, il faut d'abord opérer un transport équivalent des points du sphéroïde sur la sphère, avant de projeter ces points de la sphère sur le plan; mais alors on n'obtient plus une projection zénithale pure et l'opération se complique encore davantage. Dans une projection à parallèles circulaires, il n'y a, tout comme dans la projection de Bonne et dans la projection conique, aucune difficulté à tenir compte de l'aplatissement terrestre.

§ 3. Si l'on prend le point central pour origine d'un sys-

tème de coordonnées rectangulaires, dont l'axe Y coïncide avec le méridien de ce point, on a pour une projection symétrique à parallèles circulaires:

$$X = (T - \sigma)\, sin\, \alpha \qquad Y = T - (T - \sigma)\, cos\, \alpha \quad \ldots \quad (1)$$

où T désigne une constante, savoir l'ordonnée du centre commun des parallèles circulaires; σ une fonction de la latitude φ, savoir, le segment déterminé sur l'axe Y par le parallèle, de sorte que $T - \sigma$ représente sur la carte le rayon de ce parallèle; α un angle auxiliaire, dépendant à la fois de la latitude φ du point considéré et de sa longitude λ, laquelle sera comptée à partir du méridien du point central, pris pour premier méridien.

Il faut maintenant, en premier lieu, faire de notre projection une projection équivalente, et, pour cela, satisfaire à la condition:

$$\frac{dX}{d\lambda} \cdot \frac{dY}{d\varphi} - \frac{dX}{d\varphi} \cdot \frac{dY}{d\lambda} = R\, r.$$

La différentiation des équations (1) donne:

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{dX}{d\varphi} = -\sigma' sin\, \alpha + (T - \sigma) cos \alpha \dfrac{d\alpha}{d\varphi} & \dfrac{dX}{d\lambda} = (T - \sigma) cos \alpha \dfrac{d\alpha}{d\lambda} \\ \dfrac{dY}{d\varphi} = \sigma' \, cos\, \alpha + (T - \sigma)\, sin\, \alpha \dfrac{d\alpha}{d\varphi} & \dfrac{dY}{d\lambda} = (T - \sigma) sin \alpha \dfrac{d\alpha}{d\lambda} \end{array}\right\} \quad . \quad (2)$$

En substituant ces expressions dans la condition ci-dessus, on trouve, après une réduction simple:

$$\frac{d\alpha}{d\lambda} = \frac{R r}{\sigma' (T - \sigma)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

d'où il suit, par intégration:

$$\alpha = \frac{R r}{\sigma' (T - \sigma)} \lambda \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

En différentiant cette expression par rapport à φ, on obtient pour le coefficient différentiel $\frac{d\alpha}{d\varphi}$, qui entre dans les équations (2):

$$\frac{d\alpha}{d\varphi} = \left[\frac{R' r}{\sigma'(T-\sigma)} - \frac{R^2 \sin\varphi}{\sigma'(T-\sigma)} - \frac{\sigma'' R r}{\sigma'^2(T-\sigma)} + \frac{R r}{(T-\sigma)^2}\right]\lambda,$$

valeur que, pour abréger, nous écrirons sous la forme:

$$\frac{d\alpha}{d\varphi} = A\frac{R}{T-\sigma}\lambda, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

A représentant donc une quantité auxiliaire, donnée par:

$$A = \frac{R' r}{R\sigma'} - \frac{R \sin\varphi}{\sigma'} - \frac{\sigma'' r}{\sigma'^2} + \frac{r}{T-\sigma} \quad \ldots (6)$$

§ 4. L'angle auxiliaire α est donc déterminé par la condition de l'équivalence, de sorte que nous pouvons encore disposer de la fonction σ et de la constante T pour satisfaire aux conditions indiquées au § 2. A cet effet, il est nécessaire de considérer les déformations résultant de la projection; or, pour une projection équivalente, ces déformations sont déterminées par les formules suivantes:

$$4\,tang^2\,\omega = P + Q - 2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

$$\left.\begin{aligned} T &= \sqrt{T^2 + \left(\frac{P-Q}{2}\right)^2}\,\sin 2B \\ \frac{P-Q}{2} &= \sqrt{T^2 + \left(\frac{P-Q}{2}\right)^2}\,\cos 2B \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (8)$$

où ω désigne la moitié de l'altération maximum des angles et B l'angle que la direction du plus fort agrandissement fait avec le méridien; P, Q et T sont trois quantités dépendant des coefficients différentiels donnés en (2), savoir

$$P = \frac{1}{R^2}\left[\left(\frac{dX}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dY}{d\varphi}\right)^2\right]$$

$$Q = \frac{1}{r^2}\left[\left(\frac{dX}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dY}{d\lambda}\right)^2\right]$$

$$T = \frac{1}{Rr}\left[\frac{dX}{d\varphi}\cdot\frac{dX}{d\lambda} + \frac{dY}{d\varphi}\cdot\frac{dY}{d\lambda}\right].$$

Substituant dans ces relations les expressions trouvées en (2), et ayant égard aux valeurs de $\frac{d\alpha}{d\lambda}$ et $\frac{d\alpha}{d\varphi}$ trouvées en (3) et (5), nous obtenons:

$$P = \left(\frac{\sigma'}{R}\right)^2 + A^2\lambda^2$$

$$Q = \left(\frac{R}{\sigma'}\right)^2$$

$$T = A\frac{R}{\sigma'}\lambda.$$

§ 5. Les formules développées jusqu'ici sont toutes applicables à une région d'étendue quelconque. Si, dans la suite, nous nous bornons à un terrain de grandeur restreinte, nous pouvons nous contenter d'une approximation, et alors on reconnaît immédiatement que la première des conditions du § 2 est toujours remplie, car un terrain peu étendu, de forme circulaire, se projettera toujours en une figure se rapprochant d'un cercle.

Pour la plus grande déformation en un point quelconque de la carte, on déduit de (7) l'expression:

$$(2 tang \omega)^2 = A^2\lambda^2 + \left(\frac{\sigma'}{R}\right)^2 + \left(\frac{R}{\sigma'}\right)^2 - 2 = A^2\lambda^2 + \left(\frac{\sigma'}{R} - \frac{R}{\sigma'}\right)^2. \quad (9)$$

que nous développerons suivant les puissances de la longitude λ et de la différence de latitude $\beta = \varphi - \varphi_0$.

En effectuant ce développement nous remarquons qu'il n'est pas nécessaire que la déviation s'annule au point central, et qu'il peut même être avantageux d'y laisser subsister un léger écart, pourvu que celui-ci n'augmente pas lorsqu'on s'éloigne du

point central. Si nous représentons cette déformation au point central par $2\,\omega_0$, il faut que pour ce point la quantité

$$\frac{\sigma'}{R} - \frac{R}{\sigma'}$$

devienne égale à $2\,tang\,\omega_0$ et sa première dérivée égale à zéro. Il résulte de là, si toutes les grandeurs ayant rapport au point central sont marquées de l'indice zéro:

$$\sigma'_0 = R_0\,tang\,(45^0 + \tfrac{1}{2}\,\omega_0),$$

expression que nous écrirons sous la forme abrégée

$$\sigma_0' = p\,R_0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (10)$$

où p représente donc la quantité $tang\,(45^0 + \frac{1}{2}\,\omega_0)$, qui ne s'écarte que peu de l'unité.

La première dérivée de cette même quantité par rapport à φ, savoir:

$$\frac{\sigma''}{R} - \frac{R'\sigma'}{R^2} + \frac{R\sigma''}{\sigma'^2} - \frac{R'}{\sigma'} = \left(\frac{\sigma''}{\sigma'} - \frac{R'}{R}\right)\left(\frac{\sigma'}{R} + \frac{R}{\sigma'}\right),$$

étant, pour ce même point, égalée à zéro, nous trouvons:

$$\frac{\sigma_0''}{\sigma_0'} = \frac{R_0'}{R_0}$$

ou:

$$\sigma_0'' = \frac{\sigma_0'}{R_0}\,R_0' = p\,R_0' \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (11)$$

Pour la même raison, la valeur de A doit s'annuler au point central; si l'on remarque en outre que $\sigma_0 = 0$, il suit de l'équation (6), en tenant compte des relations (10) et (11):

$$\frac{R'_0 r_0}{p\,R_0^2} - \frac{sin\,\varphi_0}{p} - \frac{R'_0 r_0}{p\,R_0^2} + \frac{r_0}{T} = 0$$

ou:

$$T = p\,\frac{r_0}{sin\,\varphi_0} = p\,N_0\,cotang\,\varphi_0 \; . \; . \; . \; . \; . \; (12)$$

La dérivée de A par rapport à φ est:

$$\frac{R'' r}{R\,\sigma'} - 2\,\frac{R'\,sin\,\varphi}{\sigma'} - \frac{R'^2\,r}{R^2\sigma'} - \frac{R'\,r\,\sigma''}{R\,\sigma'^2} - \frac{R\,cos\,\varphi}{\sigma'} +$$

$$+ 2\,\frac{R\,\sigma''\,sin\,\varphi}{\sigma'^2} - \frac{\sigma''' r}{\sigma'^2} + 2\,\frac{\sigma''^2\,r}{\sigma'^3} - \frac{R\,sin\,\varphi}{T-\sigma} + \frac{r\,\sigma'}{(T-\sigma)^2},$$

valeur qui pour le point central, eu égard à (10), (11) et (12), se transforme en:

$$\frac{R''_0\,r_0}{p\,R_0{}^2} - \frac{cos\,\varphi_0}{p} - \frac{\sigma'''_0\,r}{p^2 R_0{}^2} = -\frac{cos\,\varphi_0}{p}\left[1 - \frac{R''_0 N_0}{R_0{}^2} + \frac{\sigma'''_0 N_0}{p\,R_0{}^2}\right],$$

expression que, pour abréger, nous écrirons sous la forme:

$$-\frac{cos\;\varphi_0}{p}(1 - C), \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (13)$$

C représentant la constante:

$$C = \frac{R''_0 N_0}{R_0{}^2} - \frac{\sigma'''_0 N_0}{p\,R_0{}^2}\;, \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (14)$$

de sorte que nous trouvons pour σ'''_0:

$$\sigma'''_0 = p\,R''_0 - p\,\frac{R_0{}^2}{N_0}\,C, \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (15)$$

où C est une constante dont nous pouvons disposer à volonté.

Enfin, la dérivée seconde de $\frac{\sigma'}{R} - \frac{R}{\sigma'}$ est:

$$\frac{\sigma'''}{R} - 2\,\frac{R'\sigma''}{R^2} - \frac{R''\sigma'}{R^2} + 2\,\frac{R'^2\sigma'}{R^3} + 2\,\frac{R'\sigma''}{\sigma'^2} + \frac{R\sigma'''}{\sigma'^2} - 2\,\frac{R\sigma''^2}{\sigma'^3} - \frac{R''}{\sigma'}$$

et devient pour le point central, si l'on égard à (10), (11) et (15):

$$-\left(p + \frac{1}{p}\right)\frac{R_0}{N_0}\;C.$$

A l'aide de la série de Taylor, nous trouvons donc, en négligeant des quantités d'ordre supérieur:

$$\frac{\sigma'}{R} - \frac{R}{\sigma'} = 2 \, tang \, \omega_0 - \tfrac{1}{2}\left(p + \frac{1}{p}\right) C \frac{R_0}{N_0} \beta^2$$

$$A = -\frac{\cos \varphi_0}{p} (1 - C) \beta ;$$

et par suite, l'équation (8) devient:

$$(2 tang \omega)^2 = \frac{\cos^2 \varphi_0}{p} (1 - C)^2 \beta^2 \lambda^2 + \left[2 tang \omega_0 - \tfrac{1}{2}\left(p + \frac{1}{p}\right) C \frac{R_0}{N_0} \beta^2 \right]^2$$

ou, en remarquant que ω est une petite quantité du second ordre et que par conséquent p ne diffère de l'unité que d'une quantité de ce même ordre: .

$$(2 \omega)^2 = \cos^2 \varphi_0 (1 - C)^2 \beta^2 \lambda^2 + \left(2 \omega_0 - C \frac{R_0}{N_0} \beta^2 \right)^2 ,$$

et, en observant encore qu'à des quantités du second ordre près on a:

$$X = r_0 \lambda = N_0 \cos \varphi_0 \lambda \quad \text{et} \quad Y = R_0 \beta ,$$

nous trouvons pour ω, à des quantités du troisième ordre près:

$$2 \omega = \sqrt{\left(2 \omega_0 - C \frac{Y^2}{N_0 R_0}\right)^2 + (1 - C)^2 \left(\frac{X Y}{N_0 R_0}\right)^2} . \quad (16)$$

§ 6. On voit que le changement maximum des angles en un point quelconque ne dépend que de la déformation au point central et de la quantité C; en attribuant à cette dernière différentes valeurs, nous pouvons donc trouver différentes projections, satisfaisant à des conditions diverses.

Dans la projection de Bonne on a $C = 0$, de sorte que l'équation (16) devient:

$$2 \omega = \sqrt{(2 \omega_0)^2 + \left(\frac{X Y}{N_0 R_0}\right)^2} ,$$

ce qui montre qu'il n'est pas avantageux, dans ce cas, de laisser subsister une déformation au point central. Pour cette

projection on prendra donc $\omega_0 = 0$, et on retrouvera ainsi l'expression connue:

$$2\omega = \frac{XY}{N_0 R_0}.$$

Pour la projection conique, on a $C = 1$ et par suite:

$$2\omega = \sqrt{\left(2\omega_0 - \frac{Y^2}{N_0 R_0}\right)^2},$$

d'où il ressort que, dans ce cas, l'admission d'une déformation au point central présente un avantage réel. M. Albers a effectivement tiré parti de cette cironstance dans la projection conique qui porte son nom [1]).

Il peut en être de même pour d'autres valeurs de C, et nous examinerons ici plus spécialement le cas où C est compris entre 0 et 1.

En faisant dans (16) $X = 0$, on trouve pour l'axe des ordonnées, c'est-à-dire pour le premier méridien:

$$2\omega = \sqrt{\left(2\omega_0 - C\frac{Y^2}{N_0 R_0}\right)^2},$$

expression montrant que ω décroît depuis ω_0 au point central jusqu'à ce qu'on ait $Y = \pm\sqrt{\frac{2\omega_0 N_0 R_0}{C}}$, point où ω devient nul. Pour de plus grandes valeurs de Y, tant positives que négatives, ω croît indéfiniment.

Afin de pouvoir juger de la variation de ω pour d'autres valeurs de X, nous différentions d'abord ω^2 par rapport à Y^2, ce qui donne:

$$4\frac{d\omega^2}{dY^2} = -\frac{4\omega_0 C}{N_0 R_0} + 2C^2\frac{Y^2}{N_0^2 R_0^2} + (1 - C)^2\frac{X^2}{N_0^2 R_0^2};$$

---

[1]) H. C. Albers, *Beschreibung einer neuen Kegelprojection*, dans Zach, *Monatliche Correspondenz*, 1805, t. XII, p. 450. Voir en outre: Germain, *Traité des projections des cartes géographiques*, Paris, p. 104, et Gretschel *Lehrbuch der Karten-Projection*, Weimar, 1873, p. 148 et 188.

on voit par là que, à partir de $Y = 0$, ω croît toujours avec Y lorsqu'on a $X^2 > \frac{4\,\omega_0\,C\,N_0\,R_0}{(1-C)^2}$. Pour des valeurs plus petites de X, ω, qui pour $Y = 0$ est toujours égal à ω_0, commence par décroître jusqu'à ce que $Y^2 = \frac{2\,\omega_0\,N_0\,R_0}{C} - \frac{(1-C)^2}{2\,C^2}\,X^2$; ω atteint alors sa valeur la plus petite, puis, pour des valeurs plus grandes de Y, tant positives que négatives, ω croît de nouveau indéfiniment; pour une certaine valeur de Y, ω redeviendra donc égal à ω_0, d'ou il suit qu'il existe une courbe fermée, en chaque point de laquelle on a $\omega = \omega_0$, tandis qu'en dedans de cette courbe ω est toujours inférieur ou tout au plus égal à ω_0.

Pour obtenir une connaissance plus précise de cette courbe nous n'avons qu'à poser, dans l'équation (16), ω égal à ω_0, ce qui donne:

$$\frac{Y^2}{N_0 R_0}\left(\frac{(1-C)^2}{N_0 R_0}\,X^2 + \frac{C^2}{N_0 R_0}\,Y^2 - 4\,\omega_0\,C\right) = 0.$$

La courbe comprend deux parties: d'abord l'axe des X, dont nous savons déjà qu'on y a partout $\omega = \omega_0$, et en second lieu une ellipse ayant pour demi-axes:

$$\frac{\sqrt{4\,N_0\,R_0\,\omega_0\,C}}{1-C} \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{4\,N_0\,R_0\,\omega_0\,C}}{C}.$$

Pour $C = \frac{1}{2}$ cette ellipse se transforme en un cercle:

$$X^2 + Y^2 = 8\,N_0\,R_0\,\omega_0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (17)$$

qui a pour rayon:

$$\sqrt{8\,N_0\,R_0\,\omega_0}.$$

Si nous faisons coïncider ce cercle avec le contour du terrain, nous n'avons qu'à en égaler le rayon à a; on trouve ainsi:

$$a = \sqrt{8\,N_0\,R_0\,\omega_0} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (18)$$

d'où

$$2\,\omega_0 = \frac{a^2}{4\,N_0 R_0} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (19)$$

§ 7. Il suffit donc de poser $C = \frac{1}{2}$ et $2\omega_0 = \frac{a^2}{4N_0R_0}$ pour que le contour du terrain devienne une ligne d'égale déformation, telle que, à l'intérieur de ce cercle, la déformation soit plus petite qu'à la circonférence, ou tout au plus (sur l'axe des X) de même valeur; par là il est donc satisfait à la 2e et à la 4e des conditions énumérées au § 2. Pour le plus grand changement éprouvé par les angles, à la circonférence, nous avons alors

$$2\,\omega = 2\,\omega_0 \doteq \frac{a^2}{4\,N_0\,R_0},$$

ce qui concorde avec la valeur limite trouvée au § 1 et montre déjà suffisamment que la troisième condition est également satisfaite; en effet, si tel n'était pas le cas, l'agrandissement linéaire du cercle qui forme le contour serait plûs petit que l'agrandissement maximum correspondant à $\omega = \omega_0$, et le cercle aurait par conséquent une circonférence plus petite que celle exigée par son aire.

Il n'est pas difficille, toutefois, d'établir directement que cette troisième condition est satisfaite. En développant les quantités P, Q et T du § 4, ainsi que nous l'avons fait au § 5 pour $tang\,\omega$, on trouve:

$$P = p^2 - C\,\frac{Y^2}{N_0R_0}$$

$$Q = \frac{1}{p^2} + C\,\frac{Y^2}{N_0\,R_0}$$

$$T = -(1-C)\,\frac{X\,Y}{N_0\,R_0}$$

et comme

$$p^2 - \frac{1}{p^2} = \left(p - \frac{1}{p}\right)\left(p + \frac{1}{p}\right) = 2\,tang\,\omega_0\,\frac{2}{cos\,\omega_0} = 4\,\omega_0,$$

on a:

$$\frac{P-Q}{2} = 2\,\omega_0 - C\,\frac{Y^2}{N_0R_0}.$$

Le radical des formules (8) se transforme par suite en:

$$\sqrt{\left(2\,\omega_0 - C\,\frac{Y^2}{N_0 R_0}\right)^2 + (1-C)^2\,\frac{X^2\,Y^2}{N_0{}^2 R_0{}^2}},$$

expression qui n'est autre que la valeur de $2\,\omega$, de sorte qu'on obtient pour (8):

$$2\,\omega\,sin\,2\,B = -(1-C)\,\frac{X\,Y}{N_0 R_0}$$

$$2\,\omega\,cos\,2\,B = 2\,\omega_0 - C\,\frac{Y}{N^0\,R_0},$$

ou, en posant $C = \frac{1}{2}$:

$$\left.\begin{aligned} \omega\,sin\,2\,B &= -\frac{X\,Y}{4\,N_0\,R_0} \\ \omega\,cos\,2\,B &= \omega_0 - \frac{Y^2}{4\,N_0\,R_0} \end{aligned}\right\}, \quad \ldots\ldots (20)$$

formules dans lesquelles il faut d'ailleurs avoir soin de donner toujours à ω la valeur positive. Lorsqu'on prend ω avec le signe négatif, B représente la direction de la ligne qui éprouve le plus petit agrandissement linéaire.

Pour le cercle:

$$X^2 + Y^2 = a^2$$

on a $\omega = \omega_0$, de sorte que les formules ci-dessus, quand on y introduit en même temps l'angle simple B, se changent en:

$$2\,\omega_0\,sin\,B\,cos\,B = -\frac{X\,Y}{4\,N_0 R_0}$$

$$2\,\omega_0\,sin^2\,B = +\frac{Y^2}{4\,N_0\,R_0},$$

d'où il résulte par division:

$$tang\,B = -\frac{Y}{X}.$$

Le rayon mené de l'origine au point $X\, Y$ du cercle fait avec l'axe Y un angle β donné par la formule:

$$tang\,\beta = +\frac{X}{Y}.$$

En multipliant l'une par l'autre les deux expressions précédentes, on trouve:

$$tang\,B\; tang\,\beta = -1,$$

d'où il suit que la ligne de plus fort agrandissement est perpendiculaire au rayon et coïncide par conséquent avec la tangente au cercle.

§ 8. En résumant les résultats obtenus, nous trouvons donc que, pour un terrain circulaire d'étendue restreinte, il est satisfait aux conditions indiquées au § 2 lorsqu'on prend:

$$C = \tfrac{1}{2} \text{ et } 2\,\omega_0 = \frac{a^2}{4\,N_0\,R_0};$$

que si nous posons

$$p = tg\,(45 + \tfrac{1}{2}\,\omega_0) = 1 + \frac{a^2}{4\,N_0\,R_0},$$

T est donné par la formule:

$$T = p\,N_0\; cotang\,\varphi_0$$

et σ déterminé par les conditions:

$$\sigma_0 = 0,\ \sigma'_0 = p\,R_0,\ \sigma''_0 = p\,R_0',\ \sigma'''_0 = p\,R''_0 - p\,\frac{R_0^{\,2}}{2\,N_0},$$

tandis que les dérivées supérieures sont entièrement indéterminées et peuvent donc être choisies de la manière la plus avantageuse à d'autres points de vue. On peut, entre autres, prendre pour σ:

$$\sigma = p\int_{\varphi_0}^{\varphi} R\,d\varphi - \frac{1}{12}\,p\,\frac{R_0^{\,2}}{N_0}\,\beta^3.$$

L'intégrale qui entre dans cette expression est la portion du méridien comprise entre les latitudes φ et φ_0, c'est-à-dire la valeur de σ dans la projection de Bonne.

Pour le calcul des coordonnées, il faut d'abord déterminer l'angle auxiliaire α, au moyen de la formule:

$$\alpha = \frac{R\, r}{\sigma' \,(T - \sigma)}\, \lambda.$$

Les coordonnées s'obtiennent alors par les formules (1), auxquelles il est préférable toutefois, en vue de l'exécution du calcul, de donner la forme:

$$X = (T - \sigma) \sin \alpha\,, \qquad Y = \sigma + X \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\, \alpha.$$

Pour la plus forte altération éprouvée par un angle, en un point quelconque, nous trouvons à l'aide de la formule (16), en remplaçant C et ω_0 par leurs valeurs:

$$2\,\omega = \frac{\sqrt{(a^2 - 2\, Y^2)^2 + 4\, X^2\, Y^2}}{4\, N_0\, R_0}.$$

Pour qu'on puisse mieux saisir l'ensemble des valeurs de ω en différents points de la carte, je donne (Pl. XI) un dessin sur lequel sont tracées quelques-unes des lignes d'égale déformation. Le cercle qui forme le contour du terrain, et pour lequel $\omega = \omega_0$, est représenté par un trait plus fort. En deux points, savoir pour $Y = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}$, la déformation est nulle. Les lignes pour lesquelles ω est plus petit que ω_0 forment autour de chacun de ces deux points un système de courbes fermées et situées tout entières à l'intérieur du cercle. La figure montre quatre de ces courbes, celles pour lesquelles on a $\omega = 0{,}2\, \omega_0$, $0{,}4\, \omega_0$, $0{,}6\, \omega_0$ et $0{,}8\, \omega_0$. Les courbes où ω est plus grand que ω_0 sont entièrement extérieures au cercle et composées de deux branches qui ont l'axe des X pour asymptote. La figure ne représente qu'une seule de ces courbes, celle pour laquelle ω est égal à $2\, \omega_0$.

En ce qui concerne la direction du plus fort agrandissement, les formules (20) donnent:

$$8\, N_0\, R_0\, \omega \sin 2\, B = -2\, X\, Y$$
$$8\, N_0\, R_0\, \omega \cos 2\, B = a^2 - 2\, Y^2,$$

d'où il suit que pour l'axe des Y, entre les points $Y = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}$, cette direction coïncide avac l'axe des Y; pour d'autres valeurs de Y, elle est perpendiculaire à cet axe. Pour Y égal à zéro, c'est-à-dire pour l'axe des X, B est toujours nul et la direction susdite est donc perpendiculaire à l'axe des X. Lorsque, partant de l'axe des X, on suit une même ordonnée, la direction du plus fort agrandissement, qui d'abord se confond avec l'ordonnée, tourne peu à peu, de manière à faire pour $Y = \frac{a}{\sqrt{2}}$ un angle de 45° avec l'ordonnée et à ne devenir perpendiculaire à celle-ci que pour $Y = \infty$. Si l'ordonnée rencontre le cercle $X^2 + Y^2 = a^2$, la direction du plus fort agrandissement sera, en ce point, tangente au cercle.

DELFT, le 25 Octobre 1885.

SACCHAROMYCES CAPILLITII

OUDEMANS ET PEKELHARING, BLASTOMYCÈTE DU CUIR CHEVELU,

PAR

C. A. J. A. OUDEMANS et C. A. PEKELHARING.

Dans l'*Archiv* de Virchow, 1884, p. 441, on trouve un Mémoire de M. J. Bizozzero, professeur à Turin, intitulé: *Ueber die Mikrophyten der normalen Oberhaut des Menschen.* Il y est fait mention, entre autres, de deux espèces de *Saccharomyces: Saccharomyces sphæricus* et *Saccharomyces ovalis*, ainsi appelées par l'auteur d'après la forme ronde ou ovale de leurs cellules, et recommandées, comme élément ordinaire des squames du cuir chevelu de l'homme, à l'attention des médecins.

La raison pour laquelle M. Bizozzero considérait ses Champignons comme des Saccharomycètes, c'est que nulle part il n'avait découvert de mycélium, et qu'assez souvent il avait vu des cellules adultes donner naissance, par bourgeonnement, à un individu plus petit. Quant au *Saccharomyces sphæricus*, il est dit que ses cellules ont de 2,5—5,8 μ, généralement 3,5 — 4,5 μ, en diamètre, qu'elles montrent une paroi nettement limitée des deux côtés et un contenu homogène, et que, soumises à l'action du bleu de méthylène, elles prennent un aspect ponctué. En faisant usage d'un système d'immersion pour l'huile, l'auteur recevait l'impression que les ponctuations correspondaient à de petites places plus minces de la paroi

cellulaire, exactement comme cela est le cas chez les cellules ponctuées des tissus des plantes supérieures.

Le *Saccharomyces ovalis* fut trouvé par M. Bizozzero en compagnie du *Saccharomyces sphæricus*. Il lui attribue des cellules plus petites, de 3,3 — 3,5 μ de longueur et 2,3 — 2,6 μ de largeur, mais du reste semblables à celles du *Saccharomyces sphæricus*, bien qu'il ne mentionne pas si cette seconde espèce a également présenté, après la coloration par le méthylène, une paroi cellulaire ponctuée.

Déjà avant le travail de M. Bizozzero, le *Saccharomyces sphæricus* et le *Saccharomyces ovalis* avaient tous les deux été décrits, quoique sous d'autres noms, par différents observateurs, notamment par M. S. Rivolta (*Parasiti vegetali*) en 1873 et par M. Malassez en 1874 et plus tard; mais toujours ces champignons avaient été mis en rapport avec certaines maladies cutanées (psoriasis, pityriasis simplex, area Celsi), dont ils étaient regardés comme la cause. Les doutes assez souvent émis au sujet des conclusions de M. Malassez n'ont pu jusqu'ici le convaincre, de sorte qu'il a continué à défendre ses anciennes idées.

Personne, ni M. Bizozzero ni aucun autre, n'avait jusqu'à ce jour essayé de purifier par la culture les deux Saccharomycètes susnommés, et la question de savoir si le *Saccharomyces ovalis* devait être considéré comme espèce particulière ou bien comme une forme de développement du *Saccharomyces sphæricus*, restait donc nécessairement indécise.

Dans cet état des choses, M. Pekelharing, d'Utrecht, crut ne pas faire œuvre inutile en cherchant à obtenir une pareille génération purifiée. Après quelques échecs, il eut la satisfaction de voir ses tentatives couronnées de succès, et l'occasion qu'il voulut bien m'offrir de prendre connaissante de ses cultures m'inspira réciproquement le désir d'étudier de plus près les organismes en question, au point de vue de la place qui doit leur être assignée dans le système mycologique.

On ne saurait douter, à mon avis, que le Champignon

nommé *Saccharomyces sphæricus* par M. Bizozzero n'appartienne réellement au genre *Saccharomyces*. Sa multiplication par voie végétative dépend, en effet, d'un phénomène de scissiparité, et la plante n'a pas été trouvée en possession d'un mycélium. Il y a des savants, à la vérité, qui se croient tenus de n'accorder le nom de *Saccharomyces* à aucune forme dont on ne peut dire qu'un certain nombre de ses cellules produisent — au moins dans des circonstances particulières — des spores par voie endogène; mais cette opinion ne me semble pas plus légitime que celle suivant laquelle aucun Thallophyte ne devrait être rapporté aux Lichens, tant qu'on ne l'a pas rencontré pourvu d'apothécies. On pourrait demander, d'ailleurs, si les circonstances particulières auxquelles il vient d'être fait allusion sont nécessairement les mêmes pour tous les Blastomycètes, et il ne faut pas oublier que le nombre relatif des cellules qui produisent des spores dans des conditions favorables est très différent, de sorte qu'il serait extrêmement difficile de décider combien de cellules devraient donner à l'examen un résultat négatif pour qu'on fût autorisé à dire: dans tel cas: il n'y a jamais formation de spores.

Vu l'état d'incertitude où nous nous trouvons encore quant à la bonne distribution et à l'exacte diagnose générique des organismes inférieurs, il paraît convenable de s'en tenir à l'ancienne définition et de se contenter, pour un *Saccharomyces*, de la reproduction végétative par désarticulation et de la germination sans mycélium. C'est ainsi qu'en a jugé également M. W. B. Grove (*A synopsis of the bacteria and yeast fungi*, London, 1884), qui continue à ranger tant le *Saccharomyces apiculatus* que le *Saccharomyces sphæricus* SACCARDO et le *Saccharomyces glutinis* dans le genre *Saccharomyces*, bien que dans la diagnose de ce genre il fasse mention de la formation endogène des spores, tout en déclarant que ces spores n'ont pas encore été trouvées chez les 3 espèces en question.

Il pourrait paraître plus risqué d'attribuer le nom de *Saccharomyces* à des Blastomycètes *avec* mycélium, et de parler,

comme M. Reess et M. Grove, de *Saccharomyces mycoderma* et de *Saccharomyces albicans*. On peut concevoir toutefois que ces auteurs accordent plus de valeur au caractère de l'existence de cellules à formation sporique endogène — observé suivant eux dans les susdites espèces — qu'à la présence ou l'absence d'un mycélium, et qu'à ce point de vue ils aient suivi une voie que d'autres auraient peut-être préféré éviter.

Disons quelques mots encore au sujet de l'introduction du nom *Torula* pour les blastomycètes qui ne présentent pas de formation endogène de spores.

De grandes divergences d'opinion ont longtemps régné touchant la question de savoir quelles formes devraient être appelées *Torula*, quelles autres *Oïdium* et *Saccharomyces*, et l'on ne saurait nier que par suite, surtout autrefois, une seule et même plante n'ait été inscrite, par des mycologues différents, sous des noms génériques différents. Le remède à cet état de confusion — en un temps surtout où l'on commençait à professer que les Moisissures (Hyphomycètes ou Champignons filamenteux), comme précurseurs ou compagnons moins bien organisés de formes plus parfait, ne méritaient pas une étude spéciale — ne pouvait guère venir que d'un nouveau système de distribution de ce groupe, œuvre d'un savant préparé à cette tâche par de longues recherches personnelles et doué du talent organisateur nécessaire. Parmi tous les essais de cette nature, venus à notre connaissance, celui de M. le professeur P. A. Saccardo, de Padoue, publié dans le tome second du journal scientifique *Michelia*, nous paraît être le meilleur, raison pour laquelle nous croyons devoir nous en tenir — afin d'éviter de nouvelles confusions — aux définitions qui y sont données pour les genres en question.

Les Hyphomycètes sont partagés par le savant italien en Moisissures blanches et Moisissures noires (*white* et *black Moulds* des Anglais; *Mucedineæ* et *Dematieæ*). Les premières ont des filaments et des cellules (aussi des conidies) délicats, à parois minces, incolores ou — par exception — de teinte claire; les

secondes, au contraire, présentent des filaments et des cellules (aussi des conidies) solides, à parois épaisses, brunes ou noires, parfois même comme carbonisées. Entre ces deux sections il y a des passages, formés par les Hyphomycètes à filaments foncés et conidies incolores.

Chacune de ces sections est divisée par M. Saccardo en deux groupes, l'un, *A*, à hyphes peu développés, mais à formation conidienne très apparente, l'autre, *B*, à hyphes fortement développés et à formation conidienne beaucoup moins prononcée. Il donne au premier groupe le nom de *Micronemeæ*, au second celui de *Macronemeæ*.

Or, M. Saccardo rapporte le genre *Torula* aux *Dematieæ micronemæ* (c.-à-d. aux Moisissures noires à filaments courts), d'où il résulte qu'il ne convient pas d'attribuer de nouvau ce nom à des espèces de *Saccharomyces*. Celles-ci, en effet, pourraient bien être dites à filaments courts, mais la notion „Dematieæ" ne s'y applique d'aucune façon.

Le genre *Oïdium* appartient aux *Mucedineæ macronemeæ* (c.-à-dire aux Moisissures blanches à filaments longs): Champignons incolores, à mycélium bien développé et à vie parasitique. De ces caractères, il n'y en a qu'un qui se retrouve chez les espèces de *Saccharomyces*; elles manquent de l'autre, savoir, la possession d'un système d'hyphes distinct. Le terme *Oïdium* doit donc aussi rester réservé à un tout autre groupe de Champignons.

Le genre *Saccharomyces* prend place chez M. Saccardo, parmi les „*Mucedineæ micronemeæ*" et, plus spécialement, parmi celles à „conidia catenulata." Voici les caractères qui lui sont assignés: „Conidia breve vageque catenulata, ramulosa, ovoidea, oblonga vel globosa, hyalina (zimogena)." Le point de vue des mycologues récents, qui ont élevé le genre *Saccharomyces*, joint aux Bactéries ou Schizomycètes, à la dignité d'ordre distinct, celui des Blastomycètes ou Saccharomycètes, n'est pas adopté jusqu'ici par M. Saccardo, et cela d'après les considérations suivantes: „Non me latet auctores recentiores

pro hoc genere familiam propriam condidisse, cui asci tribuuntur; sed res nondum mihi clara est et sic dicti asci potius conidia guttulata ad multiplicationem endogeneam prompta viderentur." — Cette question n'a toutefois pour nous qu'une importance secondaire. Il ne s'agissait ici que de savoir s'il était opportun de réintroduire le nom de *Torula* ou d'*Oïdium* pour certaines espèces de *Saccharomyces*, qui n'ont pas encore été trouvées en possession d'endospores et qui s'éloignent donc, suivant quelques-uns, d'un type préconçu; or, nous croyons avoir montré que cette réintroduction n'est nullement désirable.

Le nom de *Saccharomyces* étant maintenu pour notre Moisissure du cuir chevelu, il faut se demander, en second lieu, si l'on peut continuer à lui appliquer le titre de *Saccharomyces sphaericus*, donné par M. Bizozzero. A notre avis, la réponse doit être négative. D'abord, en effet, cette désignation a été choisie pour faire ressortir qu'outre les cellules sphériques l'auteur avait trouvé sur le cuir chevelu des cellules bourgeonnantes ovales (*Saccharomyces ovalis*), sans avoir constaté entre les unes et les autres un rapport génétique. Or, d'après la remarque de M. Pekelharing, entièrement confirmée par mes observations personnelles, il n'existe en réalité aucune différence génétique entre ces deux formes, qui font partie du même cycle de développement. J'ai toujours vu les cellules ovales donner naissance à des bourgeons sphériques, et ceux-ci persister sous cette forme, même quand ils avaient atteint $\frac{1}{3}$ de la dimension des cellules-mères; jamais je n'ai pu découvrir des chapelets, même courts, de cellules ovales. — Nous pensons donc que les deux espèces de M. Bizozzero doivent être réunies, et que pour cette espèce unique il convient de proposer un nom nouveau, par exemple celui de *Saccharomyces capillitii*.

Mais il y a plus: les droits de la priorité nous défendent également de conserver ici le nom de *Saccharomyces sphæricus*. Dès l'année 1879, ce nom avait été employé deux fois, savoir par M. C. Nägeli dans sa *Theorie der Gährung*, p. 21 et 114,

et par M. Saccardo dans le journal *Michelia*, t. I, p. 89, pour désigner des Saccharomycètes à cellules rondes, qui différaient notablement l'un de l'autre, aussi bien que de la Moisissure du cuir chevelu. Laissant de côté la plante de M. Nägeli, sur laquelle on peut espérer des communications prochaines de M. le Dr. Beyerinck, nous nous bornerons à dire un mot de celle de M. Saccardo, figurée sur la pl. 96 de ses *Fungi Italici.* Avec le *Saccharomyces sphæricus* Bizozzero elle a un seul point de ressemblance, savoir le caractère singulier, que j'ai observé sur les exemplaires cultivés par M. Pekelharing, de montrer çà et là entre les cellules sphériques de petits articles intermédiaires en forme de pédicelles, tels qu'on n'en rencontre jamais chez les Champignons de ferments les plus connus. Sous tous les autres rapports, le *Saccharomyces sphæricus* Saccardo est entièrement distinct. M. Saccardo l'a trouvé sur le suc épaissi et en état de fermentation des tomates (fruits du *Lycopersicum esculentum*); il le décrit en ces termes: „Acervulis minutis, applanato-pulvinatis, gregariis confluentibusque, sordide albis, conidiis perfecte sphaericis, diam. 5—6 micr., in catenulas varie flexas, ramulosas saepeque conglobatas digestis, aegre secedentibus, hyphopodiis oblongis vel subcylindricis, 10 — 15 × 5 μ, basi saepius fultis, nucleato-farctis, hyalinis." Si à cet ensemble de caractères nous opposons ceux que M. Pekelharing et moi avons observés sur les générations cultivées de la Moisissure du cuir chevelu, savoir: la couleur blanc porcelaine; les cellules non pas toutes sphériques, mais aussi en partie ovales, qui ne forment pas de chapelets, mais seulement des concaténations d'un très petit nombre d'individus, et qui paraissent se détacher les unes des autres sans beaucoup de peine; l'absence d'hyphopodes; l'aspect particulier des cellules sous l'influence du bleu de méthylène; le diamètre en moyenne un peu plus petit, et enfin la différence du lieu de développement, — il ne sera plus guère douteux que le *Saccharomyces capillitii* ne doive prendre place, dans le système,

comme espèce autonome, bien distincte des formes antérieurement connues.

Les conclusions à tirer de ce qui précède et de ce qui va suivre, nous paraissent donc être celles-ci:

1°. Sur le cuir chevelu de l'homme bien portant on trouve constamment une espèce de *Saccharomyces*, qui se laisse cultiver isolément et à l'état de pureté.

2°. Le nom, ou les noms, antérieurement donnés à cette plante, ne peuvent être maintenus.

3°. Il convient de désigner dorénavant cette espèce sous le nom de *Saccharomyces capillitii.*

Si, plus tard, on était amené à penser que des Blastomycètes dont les cellules sont séparées, fût-ce temporairement, par de petits acticles en forme de pédicelles, peuvent difficilement rester réunies aux espèces anciennement connues et typiques de *Saccharomyces*, nous proposerions, pour la Moisissure que nous avons observée sur le cuir chevelu, le nom de *Cercosphæra capillitii.*

Saccharomyces capillitii OUDEMANS et PEKELHARING. Coloris expers, culta vero maculas efformans 1 ad $1\frac{1}{2}$ milimetrum altas, coloris lactei, nitoris porcellanei. Constat e cellulis (conidiis) partim sphæricis, partim ovalibus, omnibus gemmulas minores ex uno vel pluribus superficiei locis protrudentibus, cumque iis per brevius longiusque tempus in catenas breves oligomeras, interjectis passim appendicibus pedunculiformibus, conjunctis. Conidia sphaerica, 2,5 — 5,8 μ; ovalia vulgo paulum minora. Mycelium et hyphopodia desunt. Cellulae sporiferae (vulgo asci dictae) hucusque nondum repertae.

Fermentatio alcoholica in solutione saccharata a fungo nostro non provocatur, conidiaque in fluido pro maxima parte fundum petentes, oxygenii defectu tarde tantum numero auguntur.

C. A. J. A. OUDEMANS.

II.

Les organismes qui viennent d'être décrits se rencontrent régulièrement sur le cuir chevelu. En effet, chez aucune des nombreuses personnes dont, depuis deux ans, j'ai examiné les cheveux et les squamules épidermiques, pas plus que chez celles examinées par M. Bizozzero, à Turin, ces organismes ne manquaient, à moins que la peau de la tête n'eût été soigneusement traitée par des substances antiseptiques.

Lorsqu'on porte les squamules sous le microscope, dans une solution étendue de potasse ou dans de l'acide acétique concentré, on voit qu'elles consistent essentiellement en cellules épidermiques plus ou moins cornées. Outre celles-ci, on trouve une multitude de gouttelettes et de grains, dont un grand nombre sont indubitablement formés de matière grasse. Si les squamules ramollies dans le réactif sont étendues en couche mince sur une lame de verre, séchées, colorées par une des matières colorantes de l'aniline — le bleu de méthylène par ex. — et étudiées dans le baume de Canada, la graisse est dissoute par le baume, et les cellules épithéliales apparaissent nettement, en partie avec des noyaux bien colorés. On trouve alors qu'une partie des grains, qui dans la préparation non colorée ne se distinguaient pas sûrement de gouttelettes de graisse, ont absorbé la matière colorante. Ils se montrent, comme on l'a décrit plus haut, sous la forme de corpuscules sphériques ou ovales, la plupart pourvus d'un petit bouton. Chez les individus affectés de *pityriasis capitis*, ils sont très abondants. Mais jusqu'ici je n'ai trouvé personne qui en en fût complètement exempt. Même un enfant de trois ans, chez qui la desquamation était très faible, me les présenta. Ordinairement on peut aussi les mettre en évidence sur les cheveux. En plongeant un cheveu dans une solution aqueuse concentrée de bleu de méthylène, l'y laissant une couple de minutes, puis le lavant à l'alcool, le séchant et l'examinant dans le baume du Canada, on voit presque

toujours à sa surface les corpuscules à bouton, colorés en beau bleu. Ils se trouvent disséminés sur toute la longueur du cheveu. A sa racine ils n'adhèrent que rarement. Jamais, à ma connaissance, ils ne pénètrent à l'intérieur du cheveu. Pour décider si ces corpuscules, comme leur forme le faisait présumer, sont réellement des êtres vivants et appartiennent au groupe des Blastomycètes, je cherchai à les cultiver isolément.

Il était à prévoir, tout d'abord, que cette culture présenterait quelque difficulté, parce qu'aux cheveux, et surtout aux écailles résultant de la desquamation de l'épithélium, adhèrent en outre des Schizomycètes de formes très variées. Si l'on dépose une petite quantité de squamules sur un sol nourricier stérilisé, propre à la culture de bactéries, il se forme en une couple de jours une culture de Schizomycètes, dans laquelle on ne découvre aucune trace du Blastomycète cherché. Pour échapper à cette difficulté, je commençai par faire usage de sols nourriciers acides, dans l'espoir que ceux-ci laisseraient se développer les Blastomycètes, non les Schizomycètes. Mais ces tentatives, pour lesquelles furent successivement essayées différentes gelées de fruits, ne donnèrent aucun résultat.

Je réussis toutefois à obtenir des cultures pures en délayant une petite quantité de squamules dans de la gélatine au bouillon peptonisé fondue par la chaleur, puis versant cette gélatine, en couche mince, sur une lame de verre. La division des squamules grasses ne s'opère pas facilement; néanmoins, à l'aide d'une agitation prolongée, on la réalise à un degré suffisant. Sur la lame de verre apparaissent alors bientôt quelques colonies de bactéries, mais en outre, au bout de quatre ou cinq jours, de petites taches blanches, demi-transparentes, qui consistent exclusivement en vrais Blastomycètes. Sur la gélatine au bouillon peptonisé ces Blastomycètes ne croissent pas avec vigueur. Ils forment une petite couche mince, blanc de lait, dont parfois, lorsque la culture a lieu dans un

tube d'essai, quelques granules très ténus pénètrent au sein de la gélatine. Parfois aussi il se forme dans la gélatine un trouble nuageux. L'examen microscopique montre que la petite couche superficielle, les granules et les nébulosités sont tous composés de la même forme de *Saccharomyces*. Sur l'agar-agar au bouillon peptonisé et sur le sérum sanguin coagulé on n'obtient non plus, à des températures comprises entre 20° et 40° C., que de maigres récoltes. La culture sur des rouelles de pomme de terre donne de beaucoup meilleurs résultats. Il s'y développe, à la température ordinaire d'appartement, des trainées blanc de lait assez épaisses, qui sont entièrement composées de Blastomycètes. Ce qui m'a réussi le mieux, toutefois, c'est la culture sur une gelée de lait préparée à la gélatine ou à l'agar-agar. Sur ce sol il se forme, à la température ordinaire de la chambre, des couches blanc de lait, ayant l'éclat de la porcelaine, qui peuvent atteindre l'épaisseur de un millimètre, ou même plus, et qui présentent souvent une surface s'abaissant en terrasses du centre à la périphérie.

La manière de procéder la plus simple est la suivante. A du lait frais on mêle de la gélatine (environ 10°/₀) ou de l'agar-agar (environ 2°/₀), on le fait bouillir une couple d'heures dans la vapeur d'eau, on le filtre encore chaud à travers une mousseline et on l'introduit dans de petits tubes d'essai stérilisés. Ces tubes sont bouchés avec des tampons de ouate stérilisée, puis soumis encore quelque temps à la température de l'ébullition, dans un bain-marie ou dans un bain de vapeur. Lorsque la gelée est refroidie dans les tubes, on introduit dans chacun d'eux *un* cheveu, arraché avec une pince venant d'être rougie au feu, puis, à l'aide d'une aiguille de platine également rougie au prélable, on le fait avancer de manière à ce qu'il arrive, autant que possible sur toute sa longueur, en contact avec la gelée. Au bout d'une couple de jours, différents tubes présentent des cultures très diverses de bactéries. Mais dans quelques-uns on voit, après un inter-

valle de plusieurs jours, une dizaine parfois, apparaître le long du cheveu des ponctuations blanches à surface brillante, lesquelles, au microscope, sont reconnues consister entièrement en *Saccharomyces.* Tandis que les squamules contiennent toujours des Schizomycètes, il y a, en effet, quantité de cheveux auxquels adhèrent uniquement des Blastomycètes.

Dans des solutions de sucre, neutres ou faiblement acides, ce Blastomycète ne se développe que médiocrement. Il y tombe au fond. Dans le liquide il ne se forme ni acide carbonique, ni quelque autre acide ou alcali en quantité appréciable. Lorsqu'on ajoute à la solution une goutte de teinture neutre de tournesol, la couleur n'éprouve aucun changement, même au bout de plusieurs mois. (De même, j'ai vu la couleur rester inaltérée pendant plus d'une demi-année dans un tube où le Blastomycète se développait vigoureusement sur la gelée de lait additionnée de teinture neutre de tournesol) La couche des cellules tombées au fond n'acquiert jamais une épaisseur notable sous le liquide. Le contact de l'air paraît favoriser la croissance. Du moins, dans les gouttes suspendues, que je conservais dans des enceintes humides, pour pouvoir observer directement au microscope le développemont du Champignon, la croissance était, pour les mêmes liquides, plus vigoureuse que dans les tubes d'essai. Or, dans une goutte suspendue, les cellules, justement parce qu'elles s'enfoncent, viennent en contact avec l'air.

L'idée se présente naturellement qu'un organisme végétant sur le cuir chevelu, si riche en glandules sébacées, se nourrira, de préférence, de matière grasse. Cette présomption trouve un appui dans le fait d'expérience que le Champignon se multiplie beaucoup plus abondamment sur la gelée de lait (dans le lait liquide on peut difficilement juger de la croissance) que sur d'autres substrata, d'ailleurs appropriés Pourtant, il ne semble pas que le lait subisse quelque altération pendant la culture. Rien n'indique une consommation de sa matière grasse. Il est certain, d'ailleurs, que toute graisse ne

convient pas à ces organismes. Quelques gouttes d'huile d'olive neutre, préalablement bouillie avec de l'eau distillée, furent mêlées, dans un tube d'essai, avec de l'agar-agar au bouillon peptonisé, fondue par échauffement. Le tube fut ensuite tenu sous un jet d'eau froide, et en même temps secoué avec force. De cette manière il se produisit, lors de la coagulation de la gelée, une fine émulsion, sur laquelle fut semé le *Saccharomyces*. Le développement ne fut pas meilleur que sur la même matière nutritive sans addition de graisse.

Ce *Saccharomyces capillitii* doit-il maintenant être regardé comme la cause du *pityriasis capitis*? A cette question je crois pouvoir répondre affirmativement. M. Bizozzero fait remarquer que l'abondance de ce Champignon chez les personnes affectées de pityriasis est peut-être attribuable à ce que ses cellules trouveraient dans les squamules riches en graisse un sol nourricier particulièrement favorable, de sorte que le parasite ne serait pas la cause, mais l'effet de la maladie. Très probablement, toutefois, la maladie est d'origine parasitaire. Du moins, la „dartre furfuracée", même lorsqu'elle existe à un haut degré, est chassée sûrement par les matières antiseptiques, pourvu que celles-ci soient appliquées en solution alcoolique. Un remède très efficace est l'acide salicylique. Si, chaque matin, on frictionne soigneusement la tête avec une dissolution de 1 gramme d'acide salicylique dans 100 grammes d'esprit de vin, additionnée de 5 à 10 grammes de glycérine, la fâcheuse desquamation disparaît entièrement au bout de peu de jours, surtout si, pour inaugurer le traitement, on nettoie bien la tête au moyen de lotions avec du savon vert dissous dans l'esprit de vin. Cesse-t-on les frictions à l'acide salicylique, le mal reparaît promptement, mais pour guérir de nouveau, aussitôt qu'on recommence la désinfection.

En considérant que dans le cas de pityriasis aucun organisme ne se rencontre en aussi grande quantité sur le cuir chevelu que notre *Saccharomyces*, et que le degré de la desquamation est sensiblement en rapport avec le nombre de

ces Champignons qui adhèrent aux squamules et aux cheveux, on peut donc regarder comme extrêmement probable que la forte desquamation est due à ce parasite.

La fréquence du *Saccharomyces capillitii* et la prompte récidive du pityriasis en cas d'interruption du traitement antiseptique n'ont rien qui doive surprendre, quand on voit que les peignes et les brosses à cheveux, à moins d'être nettoyés avec un soin exceptionnel, sont toujours chargés d'une multitude de ces Champignons, ce qui peut très facilement donner lieu à la transmission de l'infection. Lorsque le Champignon ne se dessèche pas, il garde longtemps sa vitalité. D'une culture mal venue sur du sérum sanguin coagulé, culture faite au commencement de décembre 1884, j'obtins au mois de mai suivant, par inoculation sur de la gelée de lait, un développement luxuriant.

Une autre question est de savoir si notre *Saccharomyces* favorise la chute des cheveux. Pour la solution de cette question, les communications de MM. Gruby, Malassez et Eichhorst ne fournissent pas de données. Il est possible — et la chose ne pourra être décidée qu'au moyen de cultures pures — que les corpuscules trouvés par ces observateurs chez les sujets affectés d'*area Celsi* soient identiques à notre *Saccharomyces*. Mais, s'il en est ainsi, ils n'ont certainement pas occasionné l'*alopecia areata*. Du reste, c'est un fait non dépourvu d'intérêt, que M. Malassez a trouvé des cellules analogues aux nôtres, non-seulement à la surface du cuir chevelu et des cheveux, mais aussi dans les couches supérieures de l'épiderme et entre les cellules de la gaîne radiculaire interne des cheveux.

Une communication qui a peut-être plus d'importance pour la question ci-dessus posée, est celle de M. Lassar (*Berl. Klin. Wochenschrift*, 1883, n° 10), qui, dans des cas d'*alopecia præmatura furfuracea*, a non-seulement vu diminuer la chute des cheveux, mais a même constaté une notable amélioration de leur croissance, sous l'influence d'un traitement antiparasi-

taire. D'un autre côté, après avoir mêlé à de la vaseline les cheveux, parsemés de squamules, de personnes affectées d'*alopecica furfuracea*, et avoir frictionné avec cette matière la peau de lapins, de cobayes et de souris, il a vu tomber les poils aux places enduites. M. Lassar ne mentionne pas, toutefois, s'il a examiné les squamules au microscope. Il n'est donc pas sûr — bien que cela puisse paraître probable — que le *Saccharomyces capillitii* ait été transporté en grande quantité sur la peau des animaux soumis à l'expérience.

Chez un lapin, dont la peau avait été frictionnée avec de la vaseline mêlée de *Saccharomyces* cultivé pur, j'ai vu se former une croûte blanche, écailleuse, assez large, qui était entièrement composée de ce Champignon et de cellules épidermiques. Mais, à cet endroit, les poils ne se détachaient pas plus facilement qu'aux places restées intactes.

Si réellement le *Saccharomyces* provoque non-seulement le pityriasis, mais encore la chute des cheveux, il est au moins certain, d'après l'expérience journalière, que son influence sur la calvitie ne s'exerce que très lentement.

Pour décider sûrement si le traitement antiparasitaire, qui tue le Champignon et guérit le pityriasis, peut aussi prévenir l'alopécie, il faudra des expériences beaucoup plus nombreuses et plus prolongées que celles auxquelles j'ai pu me livrer.

C. A. Pekelharing.

SPORENDONEMA TERRESTRE OUD.,

EXEMPLE DE

FORMATION ENDOGÈNE DES SPORES CHEZ LES HYPHOMYCÈTES;

PAR

C. A. J. A. OUDEMANS.

Un des caractères des vrais Hyphomycètes ou Moisissures, c'est que leurs spores ou conidies ne sont pas formées *dans* des sporanges, mais par le sommet de filaments dressés, qu'elles naissent donc libres, non renfermées, ou, comme on le dit encore, par voie *exogène.* Parfois ces conidies sont unicellulaires, d'autres fois bicellulaires ou pluricellulaires; parfois isolées, d'autres fois groupées en nombre plus ou moins considérable, ou bien unies en chapelets plus ou moins longs. Dans ce dernier cas, les conidies sont d'autant plus anciennes qu'elles sont situées plus loin de leur point d'origine, et les parties qui relient les conidies de la même chaîne sont réduites à de si faibles dimensions, qu'on emploie le mot „désarticulation" pour indiquer la facilité avec laquelle les éléments successifs se détachent les uns des autres. De beaux exemples de chaînes de conidies se voient chez les genres *Aspergillus*, *Sterigmatocystis*, *Penicillium.*

Il ne peut échapper à personne que les conidies ne sont, à proprement parler, que les sommets des filaments qui leur servent de support, sommets qui, pour atteindre le but voulu,

ont été séparés de la partie inférieure par une cloison ou par un étranglement allant jusqu'à scission complète. Destinées à reproduire la plante, les conidies ne pouvaient partager la vie bornée des filaments, mais devaient se détacher de ceux-ci, pour inaugurer d'autant mieux leur évolution propre.

On pourrait, et assurément non sans raison, se figurer que le protoplasma de ces sommets privilégiés des filaments des Moisissures est le siège de quelque processus, qui leur communique une vitalité plus durable et les doue du pouvoir de se développer ultérieurement en plantes nouvelles; puis, continuant dans cette voie, on pourrait risquer la supposition qu'un pareil sommet, après avoir été détaché du filament-mère, doit en réalité être composé de deux parties: 1° une spore ou une conidie, et 2° une membrane enveloppante — provenant de la paroi cellulaire primitive. L'examen microscopique ne montre toutefois aucune trace d'une semblable séparation en deux éléments, et c'est ce qui explique pourquoi les mycologistes, tant actuels qu'antérieurs, n'ont jamais pu se rallier à l'idée que les spores portées par les filaments dressés des Moisissures seraient formées à l'intérieur de ces filaments, comme corpuscules autonomes.

En disant „jamais", je commets toutefois une erreur historique. Vers 1826, en effet, Desmazières fit connaître qu'il avait observé un cas de formation endogène des spores, de sorte qu'il se croyait autorisé à créer pour la Moisissure qui présentait ce phénomène un nom générique nouveau, celui de *Sporendonema*, destiné à remplacer ceux de *Mucor*, *Aegerita*, *Oidium*, *Sepedonium*, précédemment appliqués à la plante. Celle-ci fut décrite comme *Sporendonema Casei*, et distribuée aussi, sous ce titre en échantillons désséchés — entre autres dans les *Plantes Cryptogames du Nord de la France*, n° 161. La plante ne se trouve, en effet, que sur la croûte de fromages longtemps conservés en cave. Elle y forme des coussinets mous, rouge cinabre clair, qui se prêtent extrêmement bien à l'examen microscopique, raison pour laquelle, surtout après

la communication de Desmazières, ils ont été fréquemement soumis à cet examen.

Desmazières rendit compte de ses observations dans les termes suivants: „C'est d'après cet examen que j'ai créé le genre *Sporendonema*, et que j'ai reconnu que l'espèce unique qu'il renferme jusqu'à présent a pour caractère essentiel: des tubes ou filaments courts, simples ou rameux, continus, presque hyalins, dressés, groupés, d'un cent vingtième de millimètre de grosseur, contenant dans leur intérieur, et presque toujours dans toute leur étendue, de très-grosses sporules rougeâtres, arrondies, un peu inégales en diamètre et souvent fort serrées et comprimées les unes contre les autres, mais placées bout à bout sur une seule ligne, de manière que les filaments paraissent comme pourvus de cloisons très-rapprochées." L'auteur continue: „La sortie des sporules a lieu par le sommet des filaments qui, après la dissémination, deviennent tout-à-fait hyalins et un peu plus étroits. Quelquefois aussi les sporules sont mises en liberté par la destruction de la membrane excessivement mince qui constitue ces mêmes filaments."

Le résultat des recherches de Desmazières touchant la Moisissure du fromage ne fut pas contesté avant 1838. A cette époque, toutefois, Corda déclara, dans le second fascicule de ses *Icones Fungorum*, p. 8, qu'il ne pouvait s'associer aux vues du mycologiste français et que, des nombreux exemplaires de *Sporendonema Casei* qu'il avait étudiés avec le plus grand soin, aucun ne lui avait présenté le phénomène de la formation endogène des spores. Il assura n'avoir jamais vu que des chaînes de spores scissiparisées, telles, précisément, qu'il les attribuait au genre *Torula*.

Mais il faut remarquer que la figure (Pl. XII, fig. 36) donnée par Corda à l'appui de son texte représente une structure tout autre que celle du *Sporendonema* figuré par Desmazières dans ses *Plantes du Nord de la France* (Fig. 5 et 6), d'où il est permis de conclure que les deux mycologues ont examiné

des Champignons différents, et que le *Torula Casei* de Corda ne peut donc être regardé comme synonyme du *Sporendonema Casei* de Desmazières. Cette remarque, dont j'ai eu l'occasion de reconnaître la justesse, a été faite par Berkeley (*Ann. and Mag. of nat. History*, 2d Ser., V, p. 460).

La conclusion qui vient d'être énoncée enlève naturellement à l'étude de Corda l'importance que, sans cela, on aurait dû y attacher. D'un autre côté, toutefois, il ne suit nullement, du résultat négatif de cette étude, que les vues de Desmazières soient exactes. Berkeley a parfaitement établi, à l'endroit ci-dessus cité, que le genre *Sporendonema* n'avait pas de raison d'être et que le *Sporendonema Casei* devait rentrer dans le genre *Torula.* A cause de la différence des Champignons observés et décrits par Desmazières, d'une part, et par Corda, de l'autre, et attendu que le second de ces auteurs avait déjà employé la dénomination de *Torula Casei*, un autre nom devait être imaginé pour le *Sporendonema Casei* typique. Berkeley choisit celui de *Torula Sporendonema*, lequel implique une contradiction dans les termes pouvant être approuvée seulement au point de vue de la phytographie, mais non à celui de la logique.

L'erreur de Desmazières avait consisté à prendre pour des spores le contenu rouge des articles de ses filaments de *Sporendonema*, contenu qui tranchait fortement sur les parois incolores, et à ne pas remarquer les cloisons réellement existantes. En outre, son opinion que les sommets des filaments de *Sporendonema* devenaient hyalins par la sortie des spores rouges qui jusque-là y étaient incluses, avait été reconnue inexacte [1]), et l'assertion de la mise en liberté des spores sur d'autres points du filament ne pouvait non plus être jugée conforme aux faits. L'existence de cloisons et la rupture des filaments au niveau de ces diaphragmes furent constatées chez le *Sporendonema*, tout comme chez les *Torula*, et il ne put

---

1) L'aspect hyalin de ces sommets doit uniquement être attribué à ce qu'il ne s'était encore formé ni cloisons, ni protoplasma coloré.

donc plus être question de spores entièrement libres à l'intérieur des filaments du Champignon étudié.

Parmi les auteurs anciens qui acceptèrent de confiance l'observation de Desmazières, je citerai, comme l'un des plus célèbres, Elias Fries. Celui-ci alla même jusqu'à ranger dans le nouveau genre l'*Achlya prolifera*, Saprolegniacée qui venait d'être décrite en termes succincts, et à y renvoyer également, sous le nom de *Sporendonema Sebi*, une plante déjà connue, le *Torula epizoa*. Toutes ces déterminations fautives furent corrigées par les mycologues postérieurs, armés d'instruments plus parfaits, mais il en résulta que le *Sporendonema* se trouva effacé, tout de bon, de la liste des genres de la classe des Champignons.

Dans cet état des choses, on comprendra que je fus grandement surpris en trouvant, il y a quelques semaines, au milieu d'une couche de tan de l'une des serres chaudes du jardin botanique d'Amsterdam, une petite motte de terre recouverte d'un réseau de filaments moitié blancs, moitié brunâtres, lesquels, attentivement examinés, répondaient aux conditions essentielles du genre *Sporendonema* formé jadis par Desmazières, puis rentré dans l'oubli.

Le susdit réseau (voir Pl. XII, fig. 1) consistait en filaments incolores, irrégulièrement ramifiés, les uns rampants, les autres dressés, ceux-là représentant, comme d'ordinaire, la partie végétative ou le mycélium, ceux-ci la partie générative. Les uns et les autres étaient généralement couverts de petites aiguilles excessivement fines d'un sel calcaire (non de carbonate de chaux). Dans les filaments rampants je trouvai des cloisons; les filaments dressés en étaient dépourvus. Ces derniers, chargés de la formation des spores, ne les portaient pas à leur sommet ou sur de courts rameaux latéraux; les spores n'étaient pas non plus désarticulées une à une, ni produites sous forme de chaîne, mais elles se développaient bien dûment à l'intérieur des filaments. A intervalles réguliers (fig. 2) apparaissaient des portions de matière incolore plus denses,

— grumeaux de protoplasma condensé, — qui prenaient peu à peu une teinte brune, en même temps que les faces planes, par lesquelles elles étaient primitivement limitées à leurs deux pôles (fig. 2[a]), éprouvaient un certain arrondissement (fig. 2[b]), d'où résultait finalement une forme ovale un peu allongée (fig. 3). La paroi des spores mûres se montrait passablement épaisse.

Il était très remarquable, en outre, que les espaces intermédiaires entre les différentes spores non-seulement restaient vides et par conséquent incolores et transparents, mais finissaient par subir, juste au milieu, une section circulaire (fig. 3), par suite de laquelle les filaments se résolvaient en petits segments (fig. 4), dont chacun offrait au centre une partie sporifère, et de part et d'autre un court appendice tubuleux. Pour notre plante, le doute n'était donc pas possible quant à la formation endogène des spores, et il y avait lieu de réintroduire dans la science le genre *Sporendonema* et de proposer pour l'espèce observée le nom de *Sporendonema terrestre.*

Au niveau des sections circulaires aucune cloison n'était visible. On n'en découvrait pas trace non plus entre les spores et leurs appendices tubuleux.

Rappelons, avant de terminer, que la formation de spores à l'intérieur des filaments de quelques Hyphomycètes avait déjà été remarquée antérieurement, mais que le phénomène restait alors toujours borné aux filaments couchés, c'est-à-dire au mycélium. Aussi ces corps aptes à la germination étaient-ils considérés — surtout à cause de leur forme, différente de celle des spores ordinaires — moins comme de vraies spores que comme une sorte de propagules, et jamais on ne les voyait mis en liberté, à moins que les parois du filament dans lequel ils étaient nés ne fussent détruites. Cette formation ne peut évidemment être assimilée à celle qui a été décrite ci-dessus, et elle ne diminue donc en rien la rareté du phénomène tel que nous l'avons observé.

Nous ferons remarquer encore que notre Champignon est

du nombre de ceux qui se trouvent à la limite entre les Moisissures blanches et les Moisissures noires — les *white* et *black Moulds* des Anglais; les *Mucedineae* et *Dematiei* des mycologues écrivant en latin — de ceux, en d'autres termes, qui réunissent les filaments incolores du premier groupe aux spores foncées du second. L'usage veut, toutefois, que ces formes soient inscrites parmi les *Mucedineae* ou Moisissures blanches.

Le nom de conidies, qui convient exclusivement pour des grains reproducteurs exogènes, ne peut, bien entendu, être appliqué aux grains endogènes de notre *Sporendonema terrestre.* Il n'y a pas de raison, croyons-nous, pour refuser à ces productions le nom de spores. A cet égard aussi, notre Champignon tient donc le milieu entre deux groupes différents de la classe, mais maintenant entre un groupe inférieur, avec lequel il a en commun la structure plus simple, et un groupe supérieur, dont les formes plus composées se distinguent en outre par la production de spores endogènes.

Nous ne savons rien du Champignon supérieur auquel notre Hyphomycète pourrait être uni par un lien génétique. Précisément, toutefois, parce que la connaissance de ce lien est jusqu'ici entourée d'obscurité pour un nombre excessivement grand de Moisissures (y compris les Dematici), nous ne pouvons partager l'avis de ceux qui pensent que ces Champignons ne doivent par être admis dans le Système. Cette exclusion conduit, en effet, à négliger des formes ordinairement très élégantes, et en tout cas très intéressantes; la connaissance de ces plantes en éprouverait un recul, qu'elles sont loin de mériter. On peut du reste, à l'exemple de M. Fuckel, opposer à la serie des Champignons parfaits une série de Champignons imparfaits, et concilier ainsi les deux manières de voir.

La production de sections circulaires aux rameaux fertiles de notre Champignon est également un de ses caractères remarquables. Ce phénomène se présente assez rarement. Parmi les Algues il a été rencontré chez les Oedogoniacées, et parmi les organismes les plus inférieurs chez le *Bacillus*

subtilis (parmi les Schizomycètes) et chez les Mucorinées. Chez les Hyphomycètes, aucun cas n'en avait été observé jusqu'ici.

Après tout ce qui précède, voici comment doit être formulée la diagnose de notre Champignon:

Sporendonema terrestre OUD. Mycelio in terra humosa repente albo, articulato, ramoso; hyphis fertilibus erectis, ramosis, continuis. Sporis endogenis, a se invicem remotis, ex hypharum fertilium protoplasmate ortis, primitus achromis, utrimque planis, postremo fuscis, utrimque rotondatis, manicatis, i. e. tubulo membranaceo brevi, achromo, ex hypharum interstitiis vacuis circumcisione orto, ornatis. Longit. sporarum 7 μ, latitudo earum $2\frac{1}{3}$ μ, absque appendiculis maniciformibus.

EXPLICATION DE LA PLANCHE (N°. XII).

Fig. 1. Plante de *Sporendonema terrestre* OUD. (grossie: schématique).

" 2[a]. Portion d'un filament dressé, dans lequel les spores commencent à se former: les grumeaux protoplasmatiques incolores sont encore tronqués aux deux extrémités.

" 2[b]. Portion d'un filament dressé, à spores brun clair, dont les sommets sont déjà arrondis.

" 3. Filament dressé, à spores complètement formées.

" 4. Spores mûres isolées.

" 5. Rameau fertile du *Sporendonema Casei* DESM.

" 6. Spores isolées du même.

AMSTERDAM, février 1885.

SUR L'ENDODERME,

PAR

C. VAN WISSELINGH.

Introduction.

Le nom d'endoderme a été employé pour la première fois par M. Oudemans [1]). Celui-ci l'appliqua à la couche cellulaire qui dans les racines aériennes des *Orchidées* est directement sous-jacente au vélamen, laquelle couche cellulaire se distingue par une structure très spéciale. Une couche analogue se rencontre dans les racines aériennes des *Aroïdées*, et elle a été trouvée en outre, immédiatement sous l'épiderme, dans la racine d'un si grand nombre de *Phanérogames*, qu'on en est arrivé à regarder comme probable l'existence d'un endoderme dans toute racine quelconque [2]). Il a été reconnu que cette couche cellulaire, au moins si nous prenons le mot endoderme dans la signification que lui a attribuée M. Oudemans, doit toujours être considérée comme la couche externe de l'écorce, tandis que le vélamen dérive du dermatogène [3]).

Dans quelques cas, cet endoderme consiste en cellules de grandeur à peu près égale, dont les parois ont toutes la structure des parois des cellules du liège et où l'on peut donc

---

1) *Ueber den Sitz der Oberhaut bei den Luftwurzeln der Orchideen*, dans *Verhand. der Koninkl. Akad. van Wetensch.*, D. 9, p. 25.

2) V. Höhnel, *Ueber den Kork und verkorkte Gewebe überhaupt*, dans *Sitzungsb. d. Wiener Akad. d. Wissensch.*, Bd. 76, 1 Abth., p. 642.

3) V. Höhnel, *l.c.*, p. 640.

distinguer une membrane cellulosique (*Celluloseschlauch* von Höhnel), une lamelle subéreuse et une lamelle moyenne [1]); ailleurs, par exemple dans les racines aériennes des *Orchideés* [2]), l'endoderme est formé de rangées longitudinales de cellules alternativement longues et courtes, disposées de telle sorte que les cellules de même nom de deux rangées contiguës alternent toujours entre elles. Les cellules courtes, dont la longueur n'égale qu'une à deux fois la largeur, présentent souvent une forme particulière; ainsi, par exemple, elles sont plus ou moins globuleuses dans les racines aériennes des *Orchidées*. Mais ce n'est pas seulement par leur dimension moindre et leur forme spéciale qu'elles se distinguent; leur paroi et leur contenu diffèrent aussi, dans la plupart des cas, de ceux des cellules plus longues. Tandis que les parois de ces dernières ressemblent aux parois des cellules du liège, les cellules courtes possèdent ordinairement des parois très minces, où la subérification a fait peu de progrès [3]). La lamelle subéreuse est très mince dans les cellules de l'endoderme, et il en est ordinairement de même de la membrane cellulosique. Les parois radiales sont souvent ondulées, comme dans la gaîne du cylindre central. Jamais on ne trouve d'espaces intercellulaires dans l'endoderme, ni entre lui et l'épiderme. Vues sur des coupes transversales, les cellules de ces deux couches, lorsqu'elles sont de même largeur, ce qui est généralement le cas, alternent régulièrement entre elles. Suivant M. von Höhnel [4]), l'endoderme des *Dicotylédones* consiste ordinairement en cellules de même longueur, qui se ressemblent aussi quant à la paroi et au contenu, tandis que les plus grandes différences entre cellules longues et courtes se rencontrent chez les racines aériennes des *Orchidées* et des *Aroïdées*, où, en outre, celles des cellules du vélamen ou de l'épiderme qui

---

[1]) V. Höhnel, *l.c.*, p. 643.

[2]) Oudemans, *l.c.*, p. 25.

[3]) V. Höhnel, *l.c*, p. 639 et 648.

[4]) *l.c.*, p. 651.

recouvrent les cellules endodermiques courtes, se distinguent souvent par une forme particulière ou par des épaississements caractéristiques de leurs parois internes [1]). Entre ces deux cas si dissemblables s'en placent beaucoup d'autres, qui établissent une transition insensible.

Dans un Mémoire récemment paru, sur la dorsiventralité chez les racines aériennes des *Orchidées*, M. Janczewski [2]) arrive à des résultats qui ont aussi de l'intéret pour l'étude de l'endoderme. Lorsque les racines aériennes possèdent une structure dorsiventrale, l'endoderme est plus fortement développé au côté supérieur, où le vélamen manque, qu'au côté inférieur; ses cellules y sont, par exemple, plus grandes et à parois plus épaissies.

Tels sont les principaux résultats obtenus par différents botanistes dans leurs recherches sur la structure anatomique de l'endoderme. Outre la couche cellulaire ci-dessus définie, il y en a toutefois encore une autre à laquelle la même dénomination est appliquée, savoir celle qu'on a décrite sous les noms de gaîne du cylindre central, gaîne des faisceaux vasculaires, gaîne protectrice, membrane plissée, etc., et qui se trouve non-seulement dans les racines, mais aussi dans les organes caulinaires et foliaires [3]). Aussi la première de ces deux couches cellulaires est-elle parfois, en opposition avec la seconde, appelée endoderme externe [4]). Souvant même on ne se borne pas à désigner les deux couches sous le même nom, on les regarde aussi comme identiques; c'est ainsi que M. de Bary [5]), parlant de l'endoderme externe, qu'il appelle un „cas spécial de l'endoderme", dit: „Sie stimmt mit den Schutzscheiden in allen wesentlichen Punkten überein und ist nur durch die

---

1) Leitgeb, *Ueber kugelförmige Zellverdickungen in der Wurzelhülle einiger Orchideen*, dans *Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch.*, 1864, p. 277.

2) *Organisation dorsiventrale dans les racines des Orchidées*, dans *Ann. d. sc. botan.*, T. II, 1885.

3) De Bary, *Vergl. Anatom.*, p. 129.

4) Von Höhnel, *l.c.*, p. 638.

5) *l.c.*, p. 133.

eine Besonderheit allgemein ausgezeichnet, dass in jeder der Längsreihen, welche ihre Zellen bilden, langgestreckt-prismatische Elemente mit kurzen rundlichen oder ovalen regelmässig abwechseln."

Après que j'eus étudié, précédemment, la structure anatomique et le développement de la gaîne du cylindre central [1]), il me parut que l'identité, sous les rapports essentiels, des deux couches cellulaires dont il vient d'être question, n'était encore nullement démontrée. C'est ainsi, par exemple, qu'on n'a pas encore examiné si les cellules de l'endoderme externe, que dans la suite je nommerai simplement endoderme, possèdent, de même que celles de la gaîne du cylindre central [2]), une bande subéreuse s'étendant sur leurs parois latérales et transverses, avant que leur cavité ne soit enclose de tous les côtés par une lamelle subéreuse. Pour la gaîne du cylindre central, cette bande subéreuse, dans l'hypothèse très probable qu'elle y existe toujours, doit indubitablement être regardée comme le caractère anatomique principal. J'ai donc cherché, par l'étude anatomique et microchimique, à étendre notre connaissance de l'endoderme et à résoudre, en ayant surtout égard à l'existence des susdites bandes subérifiées, la question concernant la similitude de l'endoderme et de la gaîne du cylindre central. Ce sont les résultats de ces recherches que je vais communiquer.

Structure anatomique.

J'ai déjà dit que l'existence de l'endoderme dans les racines est un fait très général; pourtant il paraît y avoir, parmi les *Phanérogames*, des espèces dont les racines sont dépourvues de cette couche cellulaire spéciale. Chez l'*Helleborus viridis* L., du moins, je n'ai pas réussi à la mettre en évidence,

[1]) C. van Wisselingh, *La gaine du cylindre central* etc., dans *Arch. Néerl.*, T. XX, 1885, p. 95.

[2]) *l.c.*, p. 98 et 107.

malgré l'emploi de divers réactifs. Dans les 22 autres racines étudiées, qui appartenaient tant aux *Monocotylédones* qu'aux *Dicotylédones* et parmi lesquelles il y avait sept racines aériennes d'*Orchidées* et d'*Aroïdées*, j'ai, de même que les observateurs antérieurs, toujours trouvé un endoderme, immédiatement sous l'épiderme ou immédiatement sous le vélamen. Ce qui m'a causé quelque surprise, toutefois, c'est qu'aucun des écrits publiés sur ce sujet ne fasse mention d'un endoderme à plusieurs assises, alors que cinq des plantes examinées par moi furent reconnues en posséder un pareil. Le nombre des assises cellulaires que j'ai rencontrées dans les endodermes multiples était d'au moins deux chez le *Luzula sylvatica* Bichen. (Pl. XIII, fig. 14) et l'*Andropogon muricatus* Retz.; dans la *radix Sarsaparillae de Veracruz* (fig. 13) et *de Honduras* et chez l'*Hemerocallis Kwanso* Sieb. (fig. 10), il s'élevait au moins à deux et au plus à cinq. La preuve que dans ces divers cas on a affaire à un endoderme composé de plusieurs assises se déduit surtout de l'étude du développement et de la présence des cellules courtes ou naines. Chez l'*Hemerocallis Kwanso*, ces cellules ont été observées, sinon dans toutes les racines, au moins dans plusieurs, et j'ai constaté qu'elles ne s'y trouvaient pas exclusivement dans l'assise cellulaire externe (fig. 12).

Dans l'endoderme, les parois radiales ne sont jamais situées vis-à-vis de celles des couches cellulaires adjacentes, et cela s'applique aussi bien aux endodermes simples (Pl. XIII et XIV, fig. 1 et 9) qu'aux endodermes multiples (fig. 10 et 14). Dans ces derniers, les parois radiales de leurs assises cellulaires propres ne sont pas non plus opposées les unes aux autres. Quand les cellules des différentes couches juxtaposées ont à peu près la même largeur, elles alternent d'ordinaire régulièrement entre elles sur des coupes transversales. Quelques racines font plus ou moins exception à cette règle. Ainsi, par exemple, dans la *radix Sarsaparillae*, les cellules épidermiques (fig. 13) sont notablement plus larges que les cellules endodermiques, tandis que ces dernières, vues sur la coupe transversale, sont d'au-

tant plus grandes qu'elles sont situées plus en dedans. Au côté extérieur de l'endoderme, et entre les cellules de celui-ci, je n'ai jamais vu d'espaces intercellulaires; au côté intérieur, je n'ai rencontré de ces lacunes, en petit nombre et de faibles dimensions, que dans une couple de cas, savoir dans les racines de *Sarsaparilla* et de *Vanilla planifolia* ANDR.

Ainsi qu'il a déjà été dit au début, on doit distinguer dans l'endoderme deux formes de cellules, dont l'une s'y rencontre toujours, tandis que l'autre manque dans beaucoup de cas. Commençons par décrire les cellules qui représentent la première des deux formes en question.

Dans la plupart des cas elles sont plus ou moins allongées; on les trouve très fortement développées en longueur, entre autres, dans la *radix Sarsaparillae*; parfois elles possèdent la forme parenchymateuse, comme par exemple chez *Aristolochia*, où elles ne sont, fréquemment, qu'une à deux fois plus longues que larges. Le plus souvent elles se terminent par des parois transverses horizontales, ou plus ou moins obliques; ces dernières se voient le mieux sur des coupes tangentielles (fig. 7 et 11). Quand l'allongement des cellules est un peu considérable, on y trouve aussi des extrémités atténuées en pointe. Dans quelques cas les parois transverses sont courbées, par suite de la forme particulière que tendent parfois à prendre les cellules courtes (fig. 5). Vues sur des coupes transversales, les cellules sont d'ordinaire développées à peu près également dans la direction tangentielle et dans la direction radiale; quelquefois elles sont un peu allongées dans l'une de ces deux directions; parfois leur forme se rapproche de celle d'un hexagone, par exemple chez l'*Hemerocallis Kwanso* et le *Rodriguezia Barkeri* HOOK.

La paroi des cellules qui existent constamment présente la structure des parois des cellules du liège. De même que chez celles-ci, nous pouvons y reconnaître trois couches principales, savoir la membrane cellulosique (*Celluloseschlauch* von Höhnel), la lamelle subéreuse et la lamelle moyenne. Fréquemment on

pourrait y distinguer encore une quatrième couche, qui se rencontre également dans beaucoup de tissus subéreux et que M. von Höhnel [1]) a appelée lamelle intermédiaire. Cette lamelle intermédiaire, qui se trouve intercalée entre les deux premières des couches sus-nommées, peut toutefois être considérée aussi comme une subdivision de la membrane cellulosique. Celle-ci manque rarement; l'*Aristolochia Clematitis* L. et l'*A. Serpentaria* L. sont les seules espèces où je n'aie pas réussi à la découvrir. Dans quelques cas, toutefois, elle est si mince, qu'elle ne devient nettement observable qu'après avoir été détachée de la paroi cellulaire, par exemple à l'aide du chlorate de potasse et de l'acide nitrique, ou à l'aide de la potasse caustique. J'ai trouvé une pareille membrane cellulosique mince chez *Anthurium Miquelianum* S., *Monstera Lemnei* C. Koch (fig. 4 *c*), *Fornelia lacirata* S., *Philodendron bipennifolium* S., *Convallaria majalis* L., *Tradescantia virginica* L. et *Valeriana officinalis* L. Dans d'autres cas, par contre, la membrane cellulosique peut atteindre une épaisseur notable, par exemple chez *Vanilla planifolia* et *radix Sarsaparillae.* Souvent elle est plus fortement développée à la paroi externe ou à la paroi interne; par exemple, à la paroi externe chez *Vanilla planifolia*, *Renanthera coccinea* Lour., *radix Sarsaparillae de Veracruz* et *de Honduras* et *Tradescantia virginica*, et à la paroi interne chez *Valeriana officinalis.* Jamais je n'ai vu la membrane cellulosique manquer partiellement, mais je l'ai bien trouvée, par exemple chez *Vanilla planifolia*, très peu développée à l'un des côtés de la cellule, tandis qu'au côté opposé elle avait acquis une épaisseur extraordinaire. Dans quelques endodermes à assises cellulaires multiples, la membrane n'est pas épaissie au même degré, ou pas développée d'une manière tout à fait semblable, dans toutes les cellules ou dans toutes les assises. Chez l'*Hemerocallis Kwanso* (fig. 10 et 12), par

---

[1]) *l.c.*, p. 568.

exemple, son développement est souvent considérable dans certaines cellules ou assises cellulaires, faible dans les autres. Chez la racine de *Sarsaparilla* (fig. 13), elle s'est développée très inègalement dans l'assise cellulaire externe, tandis que dans les assises intérieures son épaisseur est plus uniforme. Ordinairement la membrane cellulosique a subi une lignification plus ou moins forte. Quelquefois elles nous montre déjà une structure stratifiée, sans qu'il soit nécessaire de recourir aux réactifs; dans des cas peu nombreux elle est pourvue de pores faciles à voir.

J'ai observé une lamelle intermédiaire chez *Menyanthes trifoliata* L., *Convallaria majalis*, *Funkia ovata* Spr., *Iris pallida* Lam., *Hemerocallis Kwanso*, *Vanilla planifolia*, *Renanthera coccinea* et *Rodriguezia Barkeri*. Toujours j'ai trouvé qu'elle possédait une faible épaisseur et qu'elle était plus fortement lignifiée que la membrane cellulosique. Après avoir détruit la lamelle subéreuse par le chauffage avec une solution de potasse caustique et lavé la préparation à l'eau, on peut souvent, au moyen du traitement par l'iode et l'acide sulfurique un peu étendu, rendre nettement visible la lamelle intermédiaire (fig. 6 *t*). Elle forme alors comme une bordure jaune ou brune autour de la membrane cellulosique gonflée et colorée en bleu ou en verdâtre.

La partie principale de la paroi cellulaire est la lamelle subéreuse. Dans tous les cas étudiés par moi, elle entourait complètement la membrane cellulosique ou la cavité de la cellule. Jamais je n'ai observé de subérification locale sous la forme d'une bande subéreuse s'étendant sur les parois latérales et transverses, telle qu'on la trouve dans la gaîne du cylindre central. L'examen attentif de la lamelle subéreuse ne fait pas non plus présumer qu'une semblable bande subéreuse existe dans l'état de jeunesse, car, après avair traité l'endoderme par l'iode et l'acide sulfurique assez concentré, on ne voit jamais, sur les parois latérales et transverses, deux petites raies juxtaposées. Dans la gaîne du cylindre central, ainsi que

je l'ai mentionné antérieurement [1]), de pareilles raies indiquent souvent encore la place où, avant l'apparition d'une lamelle subéreuse complète, s'étendait la bande subéreuse. Dans l'endoderme, j'ai toujours trouvé que la lamelle subéreuse possédait une faible épaisseur. Parfois elle est un peu plus développée à la paroi externe qu'à la paroi interne, par exemple chez le *Veratrum album* L., le *Funkia ovata* (fig. 2 *k*) et le *Fornelia lacirata.* Quand on traite une coupe transversale par le chlorate de potasse et l'acide nitrique, la lamelle subéreuse, avant de se gonfler et de se fondre en grumeaux d'acide cérinique, se contourne ordinairement en plis ou en sinuosités (fig. 2 et 4 *k*). Dans quelques cas ce phénomène ne se produisit pas, ce qui doit probablement être attribué en partie à la résistance de la membrane cellulosique, car le plissement fait surtout défaut là où cette membrane est fortement développée, par exemple dans les cellules endodermiques de *radix Sarsaparillae* (fig. 13 *k*), ainsi que dans celles de l'*Hemerocallis Kwanso*, lorsqu'elles sont pourvues d'une paroi cellulosique épaisse.

Il y a un rapport intime entre la subérification de la paroi cellulaire et son aspect ondulé. Chez beaucoup de plantes cette ondulation s'observe nettement, quoique non constamment; telles sont, par exemple, *Ficaria ranunculoides* MOENCH., *Menyanthes trifoliata* (fig. 7), *Tradescantia erecta*, *Funkia ovata*, *Iris pallida*, *Convallaria majalis*, *Hemerocallis Kwanso*, *Vanilla planifolia*, *Renanthera coccinea et Rodriguezia Barkeri.* Chez d'autres plantes elle paraît ne jamais se produire, mais on peut alors, à l'aide de réactifs, provoquer une ondulation artificielle (fig. 5). L'ondulation est presque toujours bornée aux parois radiales. Chez l'*Hemerocallis Kwanso*, dans le cas où l'ondulation est arrivée à développement, toutes les parois longitudinales qui appartiennent exclusivement à l'endoderme sont ondulées. La membrane cellulosique n'est pas ondulée,

---

[1]) *l.c.*, p. 101 et 108.

ou l'est moins fortement que la lamelle subéreuse. Vue sur la coupe transversale, la paroi cellulaire, ou seulement la lamelle subéreuse, semble se déplacer quand on vise à différentes profondeurs (fig. 9). Vues de côté, les parois cellulaires ondulées des plantes ci-dessus citées montrent, sur toute leur largeur, des raies alternativement claires et sombres, sans limites bien nettes (fig. 8).

La lamelle moyenne présente une faible épaisseur; là où elle appartient en entier à l'endoderme, que celui-ci soit simple ou à assises multiples, elle est fortement lignifiée, ce qu'on peut mettre en évidence, par exemple, à l'aide de la phloroglucine et de l'acide chlorhydrique. Au côté externe de l'endoderme elle a également, dans la plupart des cas, subi une forte lignification, tandis qu'au côté interne elle est en géneral moins sujette à pareille transformation. Pour s'en convaincre, on n'a qu'à chauffer la préparation avec la potasse caustique, qui détruit la lamelle subéreuse et emporte parfois la membrane cellulosique; la potasse ayant ensuite été enlevée au moyen de l'eau, l'addition d'acide sulfurique concentré fait ordinairement dissoudre la lamelle moyenne sur la face intérieure de l'endoderme, tandis qu'ailleurs cette lamelle résiste généralement à l'action de l'acide (voir fig. 6). On rencontre pourtant des exceptions à la règle qui précède. C'est ainsi que chez l'*Iris pallida*, après chauffage avec la solution de potasse caustique, le traitement par l'acide sulfurique concentré attaque la lamelle moyenne à la paroi externe, mais non à la paroi interne. Lorsque immédiatement sous l'endoderme il commence à se développer du liège, la lamelle moyenne, au côté interne, est plus sujette à se lignifier. Il me paraît qu'à la limite de l'endoderme le degré de sa lignification dépend plus ou moins de la nature des parois cellulaires adjacentes; quand celles-ci sont lignifiées ou subérifiées, on peut supposer chez la lamelle moyenne un degré de lignification plus élevé que lorsqu'elles consistent presque exclusivement en cellulose.

Outre la forme de cellules qui vient d'être décrite, l'endo-

derme en présente encore une autre. J'ai trouvé celle-ci chez *Funkia ovata* (fig. 1 *k.c.*, fig. 2 *k.c.*, fig. 3), *Convallaria majalis*, *Ficaria ranunculoides*, *Aristolochia Clematitis*, *A. Serpentaria*, *Veratrum album*, *Monstera Lemnei* (fig. 4 *k.c.*), *Anthurium Miquelianum*, *Fornelia lacirata*, *Rodriguezia Barkeri*, *Renanthera coccinea*, *Vanilla planifolia*, *Philodendron bipennifolium* (fig. 5) et *Hemerocallis Kwanso* (fig. 11 et 12). Par contre, je l'ai cherchée vainement chez *Iris pallida*, *Tradescantia virginica*, *Valeriana officinalis*, *Menyanthes trifoliata*, *Luzula sylvatica*, *Andropogon muricatus* et *radix Sarsaparillae de Honduras* et *de Veracruz.* La seconde forme cellulaire diffère sous plus d'un rapport de celle décrite ci-dessus. Ses cellules, appelées cellules courtes *Kurzzellen*), se distinguent presque toujours des autres cellules de l'endoderme par leur longueur beaucoup moindre. Le plus souvent elles ne sont qu'une à deux fois plus longues que larges, et parfois encore moins. Chez deux espèces seulement, l'*Aristolochia Clematitis* et l'*A. Serpentaria*, où la première forme cellulaire est également représentée par des cellules très courtes, on n'observe aucune différence de longueur entre les deux formes. Quelquefois, entre autres dans les racines aériennes d'*Orchidées* et d'*Aroïdées* dont j'ai fait l'examen, les cellules courtes montrent une forte tendance à prend la forme ronde ou ovale. Une lamelle subéreuse et une membrane cellulosique, telles qu'elles ont été décrites plus haut, n'existent généralement pas dans les cellules courtes. Dans trois cas seulement, savoir chez *Philodendron bipennifolium*, *Hemerocallis Kwanso* et *Vanilla planifolia*, j'ai rencontré des cellules courtes dont la paroi était constituée exactement comme celle des cellules endodermiques longues. Parfois les cellules courtes restent à parois très minces, par exemple chez *Monstera Lemnei* (fig. 4 *k.c.*), *Anthurium Miquelianum*, *Fornelia lacirata*, *Rodriguezia Barkeri* et *Renanthera coccinea.* Chez *Monstera Lemnei* et *Fornelia lacirata* les parois internes de l'épiderme, et chez *Anthurium Miquelianum* celles du vélamen sont un peu épaissies aux endroits où elles recouvrent les cellules endo-

dermiques courtes. Des épaississements de ce genre, très singuliers, ont été trouvés par M. Leitgeb [1]) dans les racines aériennes de quelques *Orchidées*. Chez ces plantes, celles des cellules du vélamen qui recouvrent les cellules courtes de l'endoderme possèdent souvent aussi une forme particulière, ce qui a été remarqué, pour la première fois, par M. Oudemans [2]). Non moins intéressant est le fait que m'ont présenté les *Funkia ovata*, *Convallaria majalis*, *Ficaria ranunculoides*, *Aristolochia Clematitis*, *A. Serpentaria* et *Veratrum album*. Chez ces plantes, les cellules endodermiques courtes sont elles-mêmes épaissies, d'une manière qui les distingue absolument des cellules longues. Leur paroi externe a acquis une épaisseur plus ou moins considérable et est d'ordinaire distinctement lignifiée, tandis les autres parois sont restées très minces (fig. 1, 2 et 3 *v. b.*). Parmi les cellules courtes du *Vanilla planifolia*, j'en ai rencontré quelques-unes qui étaient divisées en segments par des cloisons. De même que les observateurs antérieurs, j'ai trouvé que les cellules longues et les cellules courtes, lorsqu'elles sont dissemblables par la structure de leurs parois, offrent aussi des points de différence quant à leur contenu. Les cellules courtes sont généralement beaucoup plus riches en protoplasma que les cellules longues; en outre, la situation du noyau y est souvent différente; chez *Rodriguezia Barkeri* et *Renanthera coccinea*, par exemple, j'ai trouvé que dans les cellules courtes le noyau se trouvait au centre de la cavité, tandis que dans les cellules longues il était appliqué contre la paroi.

Dans les racines aériennes des *Orchidées*, l'endoderme est composé de rangées cellulaires longitudinales, dont chacune comprend des cellules longues et des cellules courtes, régulièrement alternantes; les deux formes y sont donc représentées

---

1) *Ueber kugelförmige Zellverdick. in d. Wurzelhülle einiger Orchideen*. dans *Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch.*, 1864, p. 277 et suiv.

2) *l. c.*, p. 10.

par un nombre égal de cellules. Mais le plus souvent les cellules courtes existent en nombre moindre; les deux formes cellulaires ne peuvent alors, bien entendu, alterner aussi régulièrement entre elles que cela a lieu chez les *Orchidées.* Chez l'*Aristolochia* j'ai parfois vu, dans les rangées longitudinales, deux ou un plus grand nombre de cellules sans lamelle subéreuse se suivre immédiatement, ce qui, à coup sûr, doit être regardé comme un cas rare. Les cellules courtes de deux rangées adjacentes se trouvent généralement à quelque distance l'une de l'autre (fig. 5 et 11); très rarement il arrive qu'une couple de ces cellules soient rapprochées ou contiguës. Chez l'*Hemerocallis Kwanso*, les cellules courtes des assises cellulaires différentes sont également plus ou moins éloignées l'une de l'autre (fig. 12). Dans certains cas on observe, sur des coupes tangentielles, que deux cellules longues appartenant à une même rangée embrassent par leurs extrémités, complètement ou d'un seul côté, une cellule courte intermédiaire (fig. 5). Ce phénomène peut se présenter pour toutes les cellules courtes, par exemple chez le *Renanthera coccinea*, pour un grand nombre de ces cellules, par exemple chez *Anthurium Miquelianum*, *Monstera Lemnei* et *Philodendron bipennifolium*, ou pour quelques-unes seulement.

Histoire du développement.

J'ai suivi le développement de l'endoderme simple chez le *Convallaria majalis* et le *Funkia ovata* et celui de l'endoderme multiple chez l'*Hemerocallis Kwanso.* Voici, brièvement décrits, les résultats de cette étude.

Avant qu'aucune lignification ou subérification n'ait eu lieu dans l'endoderme, celui-ci, qu'il soit simple ou multiple, possède des parois cellulaires très minces. Dans l'endoderme multiple, toutes les assises cellulaires sont déjà indiquées dès le jeune âge. La paroi cellulaire s'y constitue d'abord dans

l'assise externe, puis successivement dans les autres assises. Tant chez l'endoderme simple que chez l'endoderme multiple, les parois cellulaires, sauf au côté tourné vers le parenchyme cortical, éprouvent, avant que la lamelle subéreuse commence à se former, une lignification, qui peut être mise en évidence par la phloroglucine et l'acide chlorhydrique.

Le développement de la lamelle subéreuse, que j'ai étudié surtout à l'aide du chlorate de potasse et de l'acide nitrique, n'est pas, comme dans la gaîne du cylindre central, précédé de la formation d'une bande subéreuse s'étendant sur les parois latérales et transverses [1]). Au mois d'août, j'ai encore pu observer une lamelle subéreuse, chez le *Convallaria majalis* et le *Funkia ovata*, jusqu'à environ 1 cm. de distance du point végétatif, et chez l'*Hemerocallis Kwanso* jusqu'à 1,5 à 2 cm. La grandeur de cette distance dépend beaucoup, toutefois, de la saison de l'année. Chez le *Funkia ovata* on peut reconnaître, dès les plus jeunes états de développement, que la lamelle subéreuse devient un peu plus épaisse à la paroi externe qu'à la paroi interne.

Tandis que, chez le *Convallaria majalis* et le *Funkia ovata*, les cellules longues s'entourent d'une lamelle subéreuse et ensuite d'une membrane cellulosique (*Celluloseschlauch* von Höhnel), la paroi externe des cellules courtes acquiert une épaisseur de plus en plus considérable et subit en outre une lignification. Chez l'*Hemerocallis Kwanso*, lorsqu'il y existe des cellules courtes dans l'endoderme, elles s'entourent ordinairement, tout comme les longues, d'une lamelle subéreuse et d'une membrane cellulosique.

En tous les points du contour l'endoderme se développe à peu près simultanément; jamais je n'ai pu observer, comme dans la gaîne du cylindre central [2]), que certaines parties fussent plus avancées que d'autres.

---

[1]) *l.c.*, p. 107. Pour la gaîne du cylindre central j'ai trouvé, par l'examen de différentes plantes, que la bande subéreuse commence déjà à se développer à une distance de quelques millimètres, au plus, du point végétatif.

[2]) *l.c.*, p. 107 et 109.

Résultats.

Pour mieux faire ressortir les résultats obtenus dans cette étude, je vais comparer l'endoderme avec la gaîne du cylindre central quant à leur localisation et à leur structure anatomique.

L'endoderme se trouve immédiatement sous l'épiderme ou le vélamen dans presque toutes les racines de *Phanérogames* (il manque chez l'*Helleborus viridis*); la gaîne du cylindre central paraît ne jamais faire défaut dans les racines susdites.

En ce qui concerne la structure anatomique, on ne saurait nier qu'il n'existe entre les deux tissus certains points d'analogie, savoir, la ressemblance de la paroi cellulaire adulte avec la paroi des cellules du liège, sa faible épaisseur à l'état jeune et sa tendance à former des plis. A ces quelques analogies on peut toutefois opposer un certain nombre de différences, dont plusieurs plus importantes. C'est ainsi que dans l'endoderme on ne voit jamais la bande subéreuse, étendue sur les parois latérales et transverses, qui est toujours si caractéristique pour la gaîne du cylindre central. Tandis que la gaîne du cylindre central ne consiste qu'en une seule couche de cellules, l'endoderme est parfois formé de deux ou d'un plus grand nombre d'assises cellulaires. La remarquable différenciation en cellules longues et cellules courtes, qui dans beaucoup de cas distingue si nettement l'endoderme, ne se rencontre jamais dans la gaîne du cylindre central. Dans celle-ci, à la vérité, il arrive parfois que les cellules situées vis-à-vis des faisceaux libériens soient en moyenne un peu plus longues que celles faisant face aux vaisseaux ligneux primaires, et que chez les premières l'accroissement en épaisseur de la paroi s'opère plus rapidement que chez les secondes, lesquelles, en conséquence, s'arrêtent ordinairement à un degré inférieur de développement; mais la différence de longueur n'est jamais aussi grande que dans l'endoderme, et

jamais la paroi n'a une structure différente, comme cela est le cas chez ce dernier tissu, où la paroi des cellules longues ressemble à la paroi des cellules du liège, tandis que celle des cellules courtes, tout en restant très mince ailleurs, subit souvent au côté externe un épaississement notable et une lignification prononcée. Chez les cellules de la gaîne du cylindre central on n'observe donc qu'une différence dans le degré de développement; chez celles de l'endoderme, nous pouvons parler d'une différence de nature. Tandis que dans la gaîne du cylindre central on trouve ordinairement, à des places déterminées, des bandes longitudinales en avance de développement sur les parties intermédiaires, l'endoderme se développe, sur toute son étendue, d'une manière uniforme.

Ce qui précède montre suffisamment, à mon avis, que l'endoderme et la gaîne du cylindre central présentent de notables différences. Je crois donc pouvoir admettre que ces deux tissus ne doivent pas être regardés comme identiques. Cette opinion s'impose avec encore plus de force quand on compare la gaîne du cylindre central, telle qu'on la trouve dans la racine, avec celle qui existe dans le rhizome, ou ailleurs, et avec l'endoderme. Tandis que, chez la même plante, les deux premiers de ces tissus possèdent des rapports de similitude jusque dans les détails, l'endoderme offre avec eux, même au premier coup d'œil, des différences frappantes. J'estime, en conséquence, qu'il conviendra de réserver le nom d'endoderme exclusivement à l'assise cellulaire, ou aux assises cellulaires, qu'on trouve dans les racines immédiatement sous l'épiderme ou sous le vélamen et dont les cellules, pour la moitié de leur nombre au moins, s'accordent, sous le rapport de la structure de la paroi, avec les cellules du liège; elles diffèrent toutefois de celles-ci qu ant à l'origine, vu qu'elles ne naissent pas d'un phellogène. L'emploi des dénominations „endoderme intérieur" et „endoderme extérieur", pour la gaîne du cylindre central et pour l'endoderme proprement dit, me paraît d'autant moins justifié que chez les *Equisétacées* il existe souvent deux

gaînes protectrices, une externe et une interne (*eine äussere und eine innere Gesammtschutzscheide* [1])); le susdit emploi pourrait donc donner lieu à confusion.

EDAM, janvier 1886.

---

1) E. Pfitzer, *Ueber die Schutzscheide der deutschen Equisetaceen*, dans Pringsheim, *Jahrbuch*, VI, p. 310, 350 et suiv.

EXPLICATION DES FIGURES.

(Pl. XIII et XIV.)

ep. Epiderme, end. endoderme, p parenchyme, l.c. cellules longues, k.c. cellules courtes, c membrane cellulosique, t lamelle intermédiare, k lamelle subéreuse, m lamelle moyenne, v.b. paroi externe épaissie, g pellicule limitante, c.b. grumeaux d'acide cérinique.

Fig. 1. *Funkia ovata*, coupe transversale.
" 2. Id. , coupe transversale, après chauffage avec le chlorate de potasse et l'acide nitrique.
" 3. Id. , coupe radiale.
" 4. *Monstera Lemnei*, coupe transversale, après chauffage avec le chlorate de potasse et l'acide nitrique.
" 5. *Philodendron bipennifolium*, coupe tangentielle, après court chauffage avec le chlorate de potasse et l'acide nitrique.
" 6. *Convallaria majalis,* coupe transversale, après chauffage avec une solution de potasse caustique et traitement par l'iode et l'acide sulfurique.
" 7. *Menyanthes trifoliata*, coupe tangentielle.
" 8. Id. , coupe radiale.
" 9. *Tradescantia virginica*, coupe transversale.
" 10. *Hemerocallis Kwanso*, coupe transversale.
" 11. Id. , coupe tangentielle.
" 12. Id. , coupe radiale.
" 13. *Radix Sarsaparillae de Veracruz*, coupe transversale, après chauffage avec le chlorate de potasse et l'acide nitrique.
" 14. *Luzula sylvatica*, coupe transversale, après traitement par l'iode et l'acide sulfurique.

NOTE ADDITIONNELLE.

A l'occasion de l'analyse de mon Mémoire sur la gaîne du cylindre central [1]), donnée par M. Wieler dans la *Botanische Zeitung* (n° 6, 1886), je crois devoir présenter encore quelques remarques au sujet de la couche cellulaire en question.

Dans le travail cité, j'ai dit que l'ondulation des parois radiales est le plus prononcée à l'endroit où se trouve la bande subéreuse [2]), et non, comme le rapporte M. Wieler, qu'elle ne s'étend pas plus loin que cette bande. En ce qui concerne la cause de l'ondulation, j'étais arrivé à conclure que celle-ci ne prend pas naissance, comme l'admet M. Schwendener, au moment même de la préparation et par suite d'une diminution de la turgescence, mais qu'elle existe déjà dans la plante vivante et intacte, où elle est vraisemblablement due à un accroissement de volume lors de la subérification de la paroi cellulaire, de la même manière que, suivant l'opinion de M. Strasburger, des ondulations et des plis se forment dans beaucoup de cuticules. A ces conclusions M. Wieler oppose qu'il n'est pas prouvé que la subérification et la cuticularisation soient des processus similaires, et qu'il n'est pas non plus absolument certain que l'explication donnée par M. Strasburger soit exacte. A mon avis, toutefois, les recherches de M. von Höhnel [3]) et d'autres, ainsi que la manière dont les parois subérifiées et cuticularisées se comportent en présence des réactifs, autorisent à regarder les deux processus, sinon comme identiques, au moins comme très rapprochés l'un de l'autre. M. Wieler croit aussi pouvoir objecter à mon hypothèse que des phénomènes analogues devraient se rencontrer chez les cellules subéreuses typiques, où pourtant on ne les a pas observés jusqu'ici. Tant dans la gaîne du cylindre

---

[1]) *l.c.*

[2]) *l.c.*, p. 5.

[3]) *l.c.*

central que dans l'endoderme j'ai remarqué que les parois, qui montrent une si forte tendance au plissement, ne possèdent à l'état jeune, avant la formation de la lamelle subéreuse, qu'une épaisseur très faible. Des recherches ultérieures doivent encore nous apprendre s'il en est de même pour la paroi des cellules subéreuses typiques. Mon hypothèse serait aussi en contradiction avec l'observation de M. Caspary touchant l'effacement de l'ondulation chez les cellules âgées. M. Caspary [1]) rapporte, en effet, que chez le *Charlwoodia*, après la formation de la paroi secondaire, les cellules de la gaîne du cylindre central étaient devenues $1\frac{1}{2}$ à $2\frac{1}{2}$ fois plus longues et que la tache obscure avait disparu. Quant à moi, j'ai bien observé antérieurement, chez un petit nombre de plantes, que l'ondulation manquait dans quelques racines, tandis que dans d'autres elle était parfois nettement développée; mais de nombreuses mesures, effectuées sur des cellules adultes à parois ondulées et à parois non ondulées et sur des cellules jeunes chez qui la paroi secondaire n'était pas encore formée, m'ont conduit à ce résultat que, dans les cas examinés, il ne pouvait être question d'un allongement aussi considérable que celui dont parle M. Caspary. Les cellules de la gaîne du cylindre central différant parfois beaucoup en longueur, il me semble permis de soupçonner que M. Caspary n'a pas exécuté des mesures assez nombreuses pour pouvoir déterminer avec précision la longueur moyenne des cellules avant et après la formation de la paroi secondaire. J'ai déjà noté antérieurement que, lorsque la paroi secondaire s'applique contre la lamelle subéreuse, le phénomène dit de Caspary, que nous montre une section transversale, devient notablement plus faible ou même entièrement invisible, bien que la paroi cellulaire conserve son ondulation. Je me crois donc autorisé à révoquer en doute la disparition ultérieure de l'ondulation, et à regarder comme très probable, d'après mes recherches

---

[1]) *Bemerk. über die Schutzsch.* etc., dans Pringsh. *Jahrb.*, IV, p. 110.

précédentes, que cette ondulation, là où elle manque à l'état adulte, n'était pas arrivée à développement dans l'état de jeunesse.

D'autres phénomènes encore, dans le règne végétal, paraissent venir à l'appui de l'idée que la cuticularisation et la subérification s'accompagnent d'un accroissement de volume; tel est, entre autres, le déchirement que M. von Höhnel [1]) a vu se produire, par suite d'une extension transversale, dans la paroi de cellules subéreuses, déchirement auquel sont exposées la lamelle moyenne et la paroi cellulosique, mais non la lamelle subéreuse; telle est aussi la manière dont, chez l'*Aristolochia Clematitis*, la gaîne du cylindre central est distendue en direction tangentielle par suite du développement des tissus situés à son intérieur, distension à laquelle sont précisément sujettes, à un haut degré, les cellules pourvues d'une lamelle subéreuse.

Provisoirement, bien entendu, la présomption qu'une augmentation de volume, accompagnant la subérification de la paroi cellulaire, puisse être la cause du plissement dans la gaîne du cylindre central et dans l'endoderme, reste une simple hypothèse; des recherches exactes seront nécessaires pour décider si cette hypothèse renferme quelque part de vérité et pour faire connaître la cause réelle du phénomène. Dans cette étude il faudra tenir compte surtout de la contraction des racines. Suivant M. Hugo de Vries [2]), ces organes subissent chez la plante vivante, sous l'influence de la turgescence, une contraction par suite de laquelle les couches cellulaires subérifiées se plissent et les racines acquièrent de nombreuses rides transversales. Dans quelques cas cette contraction était même de 20 à 25 pour cent. Sur des sections tangentielles, qui avaient longtemps séjourné dans la glycérine étendue d'eau et chez lesquelles le protoplasma était tué et la turgescence abolie, j'ai

---

[1]) *l.c.*, p. 595.

[2]) *Over de contractie van Wortels*, dans *Versl. en Meded. d. Koninkl. Akad. v. Wetensch.*, 2de Reeks, Deel XV.

essayé de déterminer à quel chiffre, en centièmes, devrait s'élever la contraction des racines, si celle-ci était à regarder comme la cause exclusive de l'ondulation. Chez l'*Iris Guldenstaedtiana* je trouvai pour la hauteur des ondes, en moyenne, $0^{mm},0021$, et pour leur longueur $0^{mm},0052$ (190 ondes sur 1 millimètre); chez le *Ficaria ranunculoides*, en moyenne $0^{mm},00245$ pour la hauteur et $0^{mm},0045$ pour la longueur des ondes (221 ondes sur 1 mm.). Dans le premier cas, la contraction subsistante chez les préparations conservées dans la glycérine devrait donc atteindre environ $\frac{1}{4}$ de la longueur primitive, ou 25°/₀, et dans le second cas environ $\frac{1}{3}$, ou 33°/₀, tandis que chez les plantes vivantes la contraction aurait dû être encore plus forte.

Laissant indécise la question de savoir si le phénomène est dû à la contraction des racines, ou à une augmentation de volume lors de la subérification, ou à ces deux causes réunies, je persiste toutefois à croire que l'ondulation existe aussi dans la plante vivante et ne peut être expliquée par une diminution de la turgescence lors de la préparation. Cette explication est d'ailleurs à mon avis, en désaccord avec les résultats obtenus par M. Hugo de Vries, qui a observé un raccourcissement des différents tissus de la racine quand la turgescence augmentait. Il m'est difficile d'admettre que la paroi cellulosique (paroi secondaire), qui acquiert assez souvent une épaisseur considérable et est parfois notablement lignifiée, possède un si faible pouvoir de résistance qu'elle soit incapable d'empêcher le plissement de la lamelle subéreuse. En outre, l'explication donnée par M. Schwendener ne nous apprend nullement pourquoi l'ondulation se montre bien chez les parois radiales de la gaîne du cylindre central, mais non chez les parois tangentielles. Ces deux difficultés s'évanouissent lorsqu'on admet que l'ondulation prend naissance au cours du développement de la paroi cellulaire, avant la formation de la lamelle cellulosique; les parois sujettes à l'ondulation se distinguent en effet, à l'état de jeunesse, par leur épaisseur extrêmement faible, de sorte que, chez elles, la tendance au

plissement, inhérente aux parties subérifiées de la paroi, ne peut rencontrer que peu de résistance.

Finalement, je présenterai encore une couple de remarques au sujet de la paroi cellulosique (paroi secondaire) de la gaîne du cylindre central, paroi qui existe surtout chez les *Monocotylédones*. D'après les indications données par divers auteurs [1]), on serait tenté d'admettre que, dans beaucoup de cas, cette membrane ne se développe pas dans la paroi externe des cellules. Moi-même je partageais jadis cette opinion. Après avoir trouvé, toutefois, que dans l'endoderme la partie en question peut bien être excessivement mince à l'un des côtés de la cellule, mais qu'elle n'y manque pourtant pas, je jugeai nécessaire d'étudier de plus près, sous ce rapport, la gaîne du cylindre central. Dans les cas où, sans le secours des réactifs, il m'était impossible de distinguer une membrane cellulosique dans la paroi externe, je reconnus, après échauffement avec le chlorate de potasse et l'acide nitrique ou avec la solution de potasse caustique, que cette membrane était néanmoins développée, quoique très faiblement, à l'endroit indiqué (*Iris pallida*, *Funkia ovata*, *Convallaria majalis*, *Hemerocallis Kwanso*, *Veratrum album*, *Vanilla planifolia*). De même que chez l'endoderme, je pus aussi en différents cas chez la gaîne du cylindre central, après l'avoir traitée par la solution chaude de potasse caustique puis par l'iode et l'acide sulfurique, mettre en évidence une lamelle intermédiaire; c'est ce qui eut lieu chez *Iris pallida*, *Funkia ovata*, *Convallaria majalis*, *Vanilla planifolia*, *Renanthera coccinea* et *radix Sarsaparillae de Honduras* et *de Veracruz*. Lorsque la membrane cellulosique était très peu développée dans la paroi externe, je ne réussissais pas à observer en cet endroit la lamelle intermédiaire.

---

[1]) Russow, *Vergl. Unters.*, dans *Mém. de l'Acad. imp. d. sc. de St.Pétersb.*, VIIe Sér., T. XIX, p. 169.

v. Tieghem, *Rech. sur la symétrie de struct. d. pl. vascul.*, dans *Ann. d. sc. nat.*, 5e Sér. T. XIII, p. 284.

SUR LE POINT DE FUSION DE LA GLACE SOUS DES PRESSIONS INFÉRIEURES A CELLE DE L'ATMOSPHÈRE,

PAR

B. J. GOOSSENS.

L'abaissement du point de fusion de la glace sous l'influence d'une augmentation de pression a été pour la première fois déduite du principe de Carnot par M. J. Thomson. Il trouva cet abaissement égal à 0°,0075 Celsius pour un accroissement de pression d'une atmosphère. Les expériences de M. W. Thomson confirmèrent entièrement cette prévision; elles donnèrent un abaissement de température de 0°0072 C. et de 0°0076 C. par atmosphère, lorsque la pression sous laquelle se trouvait un mélange de glace et d'eau était portée de 8,1 à 16,8 atmosphères.

M. Zeuner, dans ses *Grundzüge der mechanischen Wärmetheorie*, 2e éd. p. 567, construit la courbe représentant la relation entre la pression et le point de fusion, et pour la pression zéro il admet une température d'environ 1° C. Je ne m'explique pas bien, comment M. Zeuner a été conduit à cette hypothèse. L'équation différentielle qui exprime la relation entre la pression et le point de fusion est, en effet:

$$\frac{r}{A u} = T \frac{d p}{d T},$$

où r désigne la chaleur latente de fusion, A l'équivalent

thermique de l'unité de travail, u la différence entre les volumes de l'unité de poids de la matière à l'état liquide et à l'état solide, T la température absolue et p la pression.

Les quantités r et u sont des fonctions inconnues de la température, et l'équation n'est donc pas résoluble. En prenant leurs valeurs à 0° C., on a $\frac{dT}{dp} = -0{,}°0075$ C.

La valeur de r, comme l'a montré M. Clausius, augmente, quand la température s'élève, tandis que u diminue dans ces conditions; par conséquent, la variation du point de fusion, produite par une diminution de pression d'une atmosphère, sera plutôt inférieure que supérieure à 0°,0075 C.

Pour trancher la question, j'ai déterminé le point de fusion de la glace sous une faible pression. Une expérience préliminaire fit voir immédiatement que le changement de température, qu'il s'agit de mesurer, est beaucoup trop faible pour se laisser observer à l'aide d'un thermomètre ordinaire.

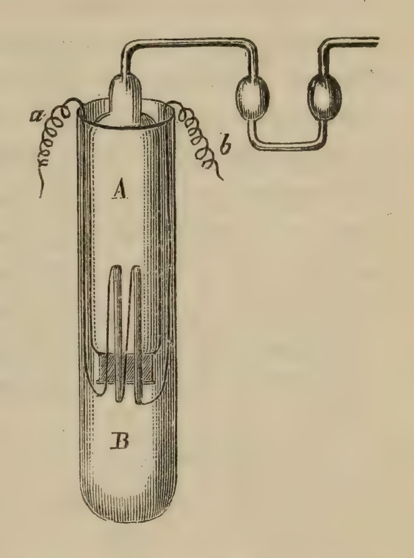
Une pile thermo-électrique composée de trois éléments fer-argentan avait trop peu de force électromotrice pour donner, avec mon galvanomètre à miroir de Meisner et Meyerstein, une déviation à la fois constante et bien mesurable; en outre, malgré l'application d'une légère couche de vernis, le fer s'oxydait promptement et l'eau devenait par suite impure.

Le résultat fut meilleur avec une pile de deux éléments composés de fil d'argentan et d'un alliage, à équivalents égaux, d'antimoine, de bismuth et de cadmium, suivant le précepte de Becquerel. La fonte de cet alliage en petits barreaux m'offrit d'abord quelque difficulté, mais plus tard j'y réussis très bien, en aspirant le métal liquide dans de petits tubes de verre.

Au moment de la solidification, les tubes de verre éclatèrent par la dilatation de l'alliage, et j'obtins ainsi deux très beaux petits barreaux lisses, longs de 100 mm. et épais de 5 mm. Vu leur grande fragilité, je les mastiquai dans des tubes de verre, où ils étaient étroitement serrés et qu'ils dépassaient

légèrement par leurs extrémités. Ensuite ils furent passés à travers un bouchon de liège et unis, au moyen d'une soudure aisément fusible, aux fils d'argentan, de manière à constituer une pile thermo-électrique.

Le bouchon fut introduit, comme le montre la figure, dans un tube de verre, et recouvert d'un mastic aisément fusible, afin que le tout fût hermétiquement fermé. Le tube fut rempli, jusqu'à une couple de centimètres au-dessus des barreaux, d'eau distillée, puis enfoncé dans un tube un peu plus large, où il plongeait jusqu'au bouchon dans de l'eau distillée.



A l'aide d'un mélange réfrigérant de glace et de sel marin, j'amenai l'eau à congélation complète, et lorsque la glace formée commença à fondre, j'adaptai le tube à une pompe pneumatique à mercure de Geissler. Le tube fut ensuite introduit en entier dans un large verre cylindrique, qui était enveloppé de ouate et rempli de glace grossièremest pilée. De cette manière je pus, dans un local où régnait une température de 8 à 9° C, maintenir pendant plusieurs jours de la glace dans l'appareil, et en même temps il m'était possible, en raréfiant suffisamment l'air, de faire regeler l'eau qui se formait au-dessus des barreaux.

Les fils de cuivre *a* et *b* se rendaient à un commutateur, auquel aboutissaient également les fils conducteurs du galvanomètre. Les déviations de celui-ci se lisaient au moyen d'une lunette à échelle divisée, placée à environ trois mètres de l'appareil.

Durant toute une série d'expériences le commutateur restait

fermé et recouvert d'une couche de ouate, afin d'éviter les courants thermo-électriques résultant de variations accidentelles de la température des contacts.

L'air qui surmontait la glace était-il maintenant raréfié jusqu'à environ 5 millimètres, j'obtenais un écart de l'aiguille indiquant clairement une élévation du point de fusion. Pour éliminer les variations possibles du zéro de l'aimant, je faisais rentrer l'air et déterminais de nouveau le zéro, à circuit fermé. La moyenne était prise pour le zéro vrai pendant la durée de l'expérience, qui naturellement exigeait un certain temps. Comme la sensibilité du galvanomètre n'avait pas besoin d'être poussée à l'excès, la différence des deux zéros ne montait généralement pas à plus d'une couple de millimètres.

J'obtins de cette manière des résultats assez concordants, comme le montrent les chiffres suivants des déviations notées:

24 janvier		26 janvier.	
le matin	25 mm.	le matin	31 mm.
	28 „	l'après-midi . .	26 „
l'après-midi . .	28 „		38 „
	34 „		31 „
			38 „

29 janvier.
31 mm.

La moyenne de ces observations est : 31 millimètres.

Pour trouver à quelles élévations de température correspondaient ces déviations, je déterminai d'abord, au moyen du pont de Wheatstone, la résistance des éléments thermo-électriques. Afin d'éviter les changements de température, et par suite les courants thermo-électriques, auxquels donne lieu le passage d'un courant constant, je fis usage d'un petit appareil d'induction dont le courant primaire était interrompu par un diapason électromagnétique, et jugeai au moyen d'un téléphone de l'absence de courant dans le pont. La résistance

des éléments fut, de cette façon, trouvée égale à 0,46 unités de Siemens.

Le galvanomètre, avec les fils adducteurs, présentait une résistance de 0,567 unités de Siemens, et la résistance totale était donc de 1,027 unités.

J'intercalai maintenant dans le circuit un rhéostat de Siemens et, introduisant successivement des résistances différentes, je notai les déviations qui se produisaient à la suite de différences de température des soudures. Celles-ci plongeaient dans de l'eau, dont la température était mesurée par des thermomètres divisés en 10ièmes de degré C.

Voici les résultats de ces déterminations:

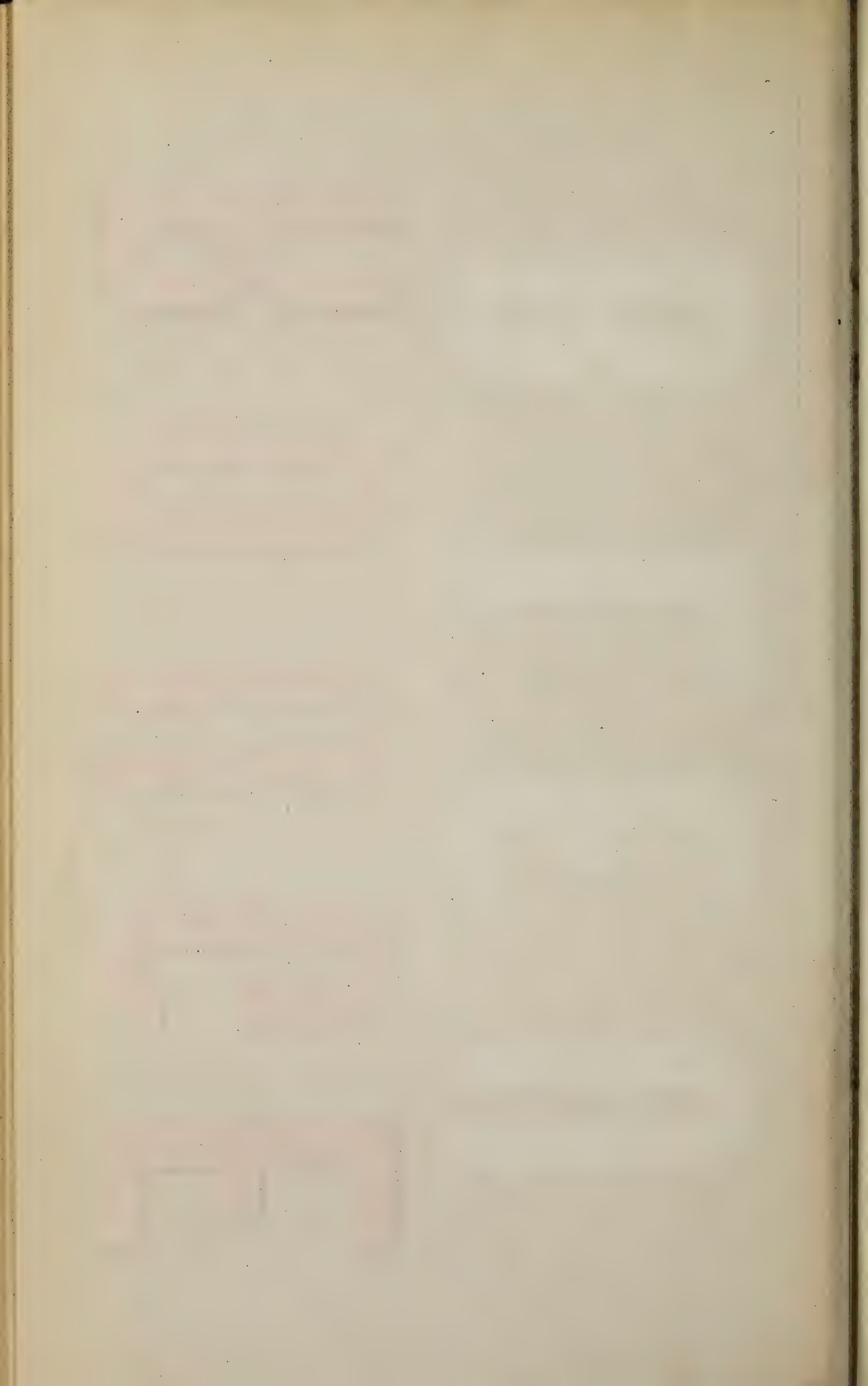
Résistance ajoutée.	Différence de température des soudures.	Déviation de l'aiguille.	Déviation calculée pour 1° C.	Dév. calculée pour 0°,001 C., sans résist. ajoutée.
100	0,7	33	47,1	4,7
200	2,0	48	24	4,8
200	0,4	10	25	4,9
100	0,45	21	46,7	4,9
50	0,47	46	97,9	4,8
20	0,35	86	245,7	5,1
10	0,3	129	430	4,6
200	2,0	48	24	4,7
200	1,7	38	22,35	4,4
			Moyenne	4,7

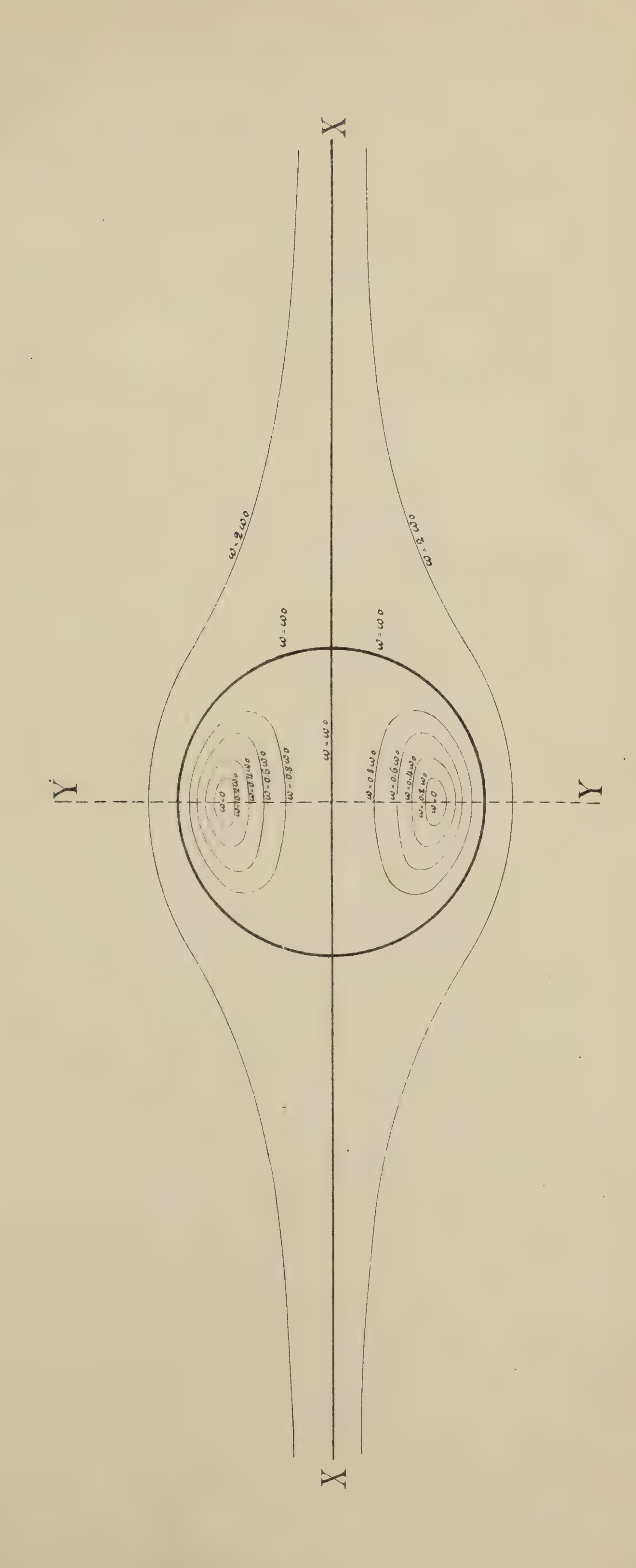
A une diminution de pression d'une atmosphère correspond donc, d'après ces observations, une élévation de température de $\frac{31}{4,7} = 0°,0066$ C, chiffre inférieur d'environ 0,001 C à celui trouvé par Thomson pour une égale augmentation de pression. Eu égard à la faible valeur de l'élévation de température qu'il s'agit de mesurer, ce résultat est très satisfaisant.

Avant de finir, je dois faire remarquer qu'entre la glace

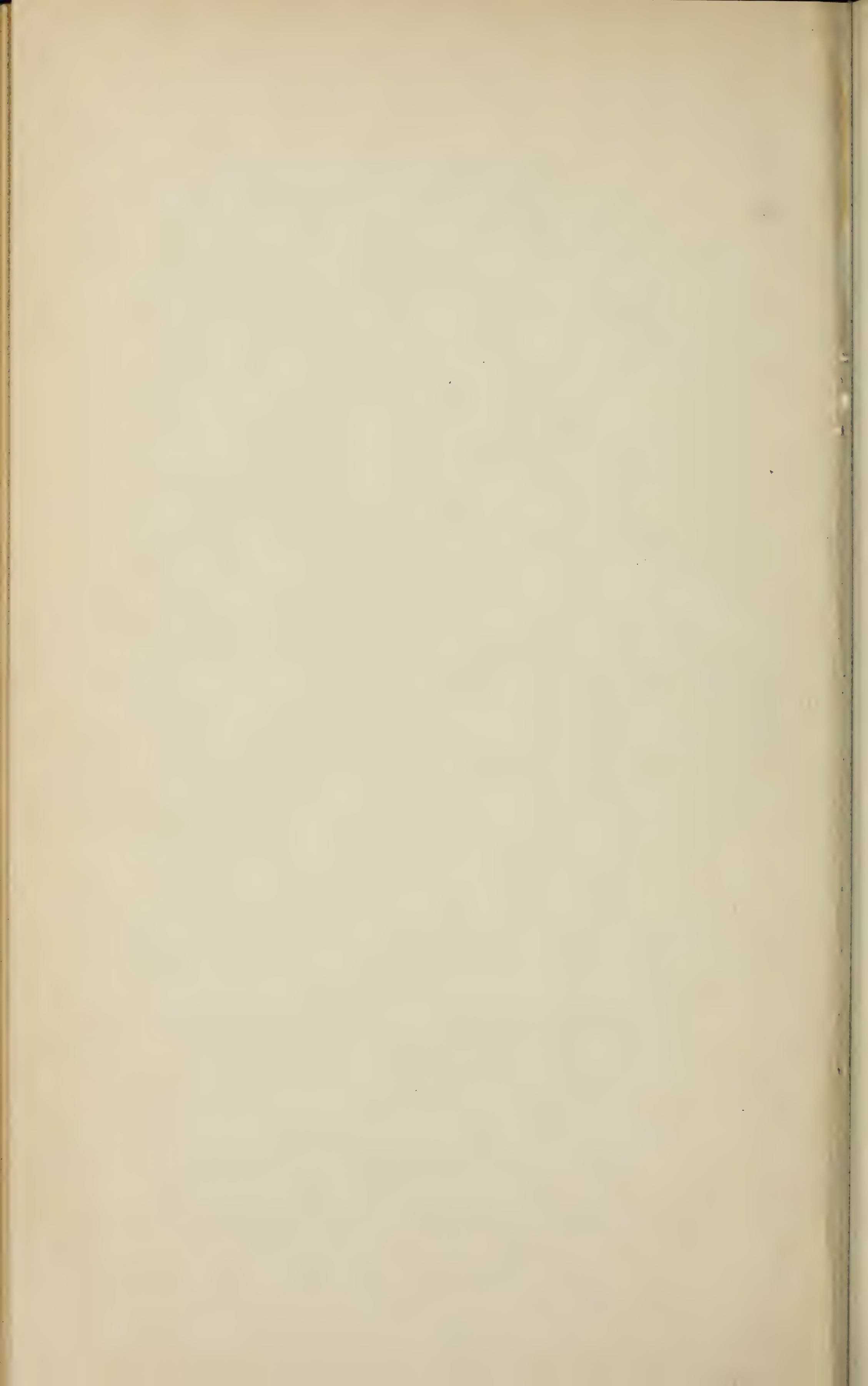
contenue dans le tube A et celle contenue dans le tube B il existait, même au bout de plusieurs jours, une différence de température, bien que les deux tubes eussent reçu de la même eau distillée. Cette différence ne saurait être attribuée à ce que l'eau s'était souillée de quelque combinaison métallique dissoute, car, soumise plus tard à un examen spécial, l'eau ne se troubla que très légèrement sous l'influence de hydrogène sulfuré. L'abaissement du point de fusion dans le tube A, qui n'était pas tout à fait constant, mais s'élevait en moyenne à 0°,1 C., me paraît avoir été occasionné par l'expulsion de l'air dissous. Ainsi que je l'ai déjà dit, la glace fondait souvent dans la partie supérieure de A, et l'on ramenait alors l'eau à l'état solide en raréfiant jusqu'à moins de 4 millimètres l'air qui la surmontait.

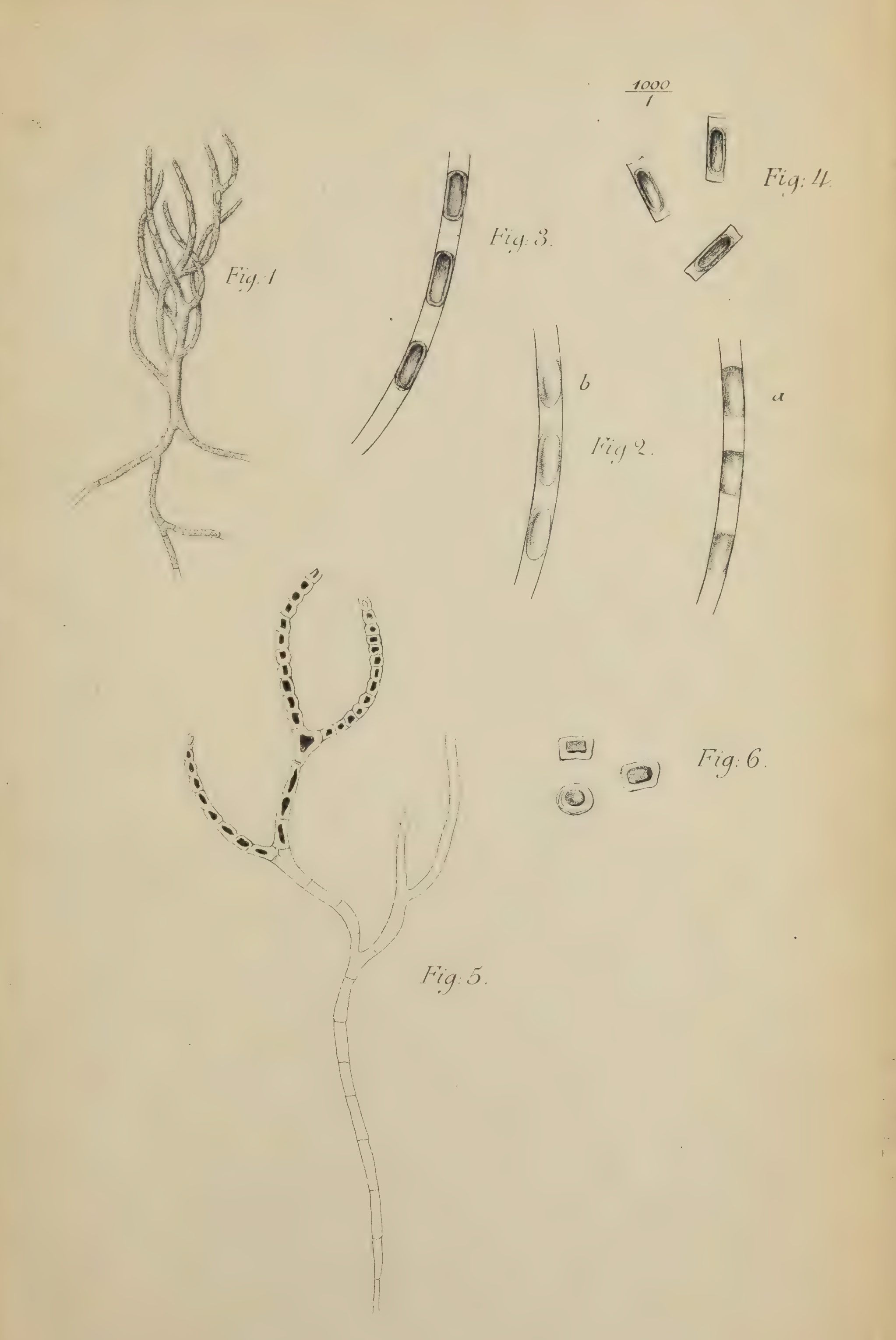

ROUGE
BLEU

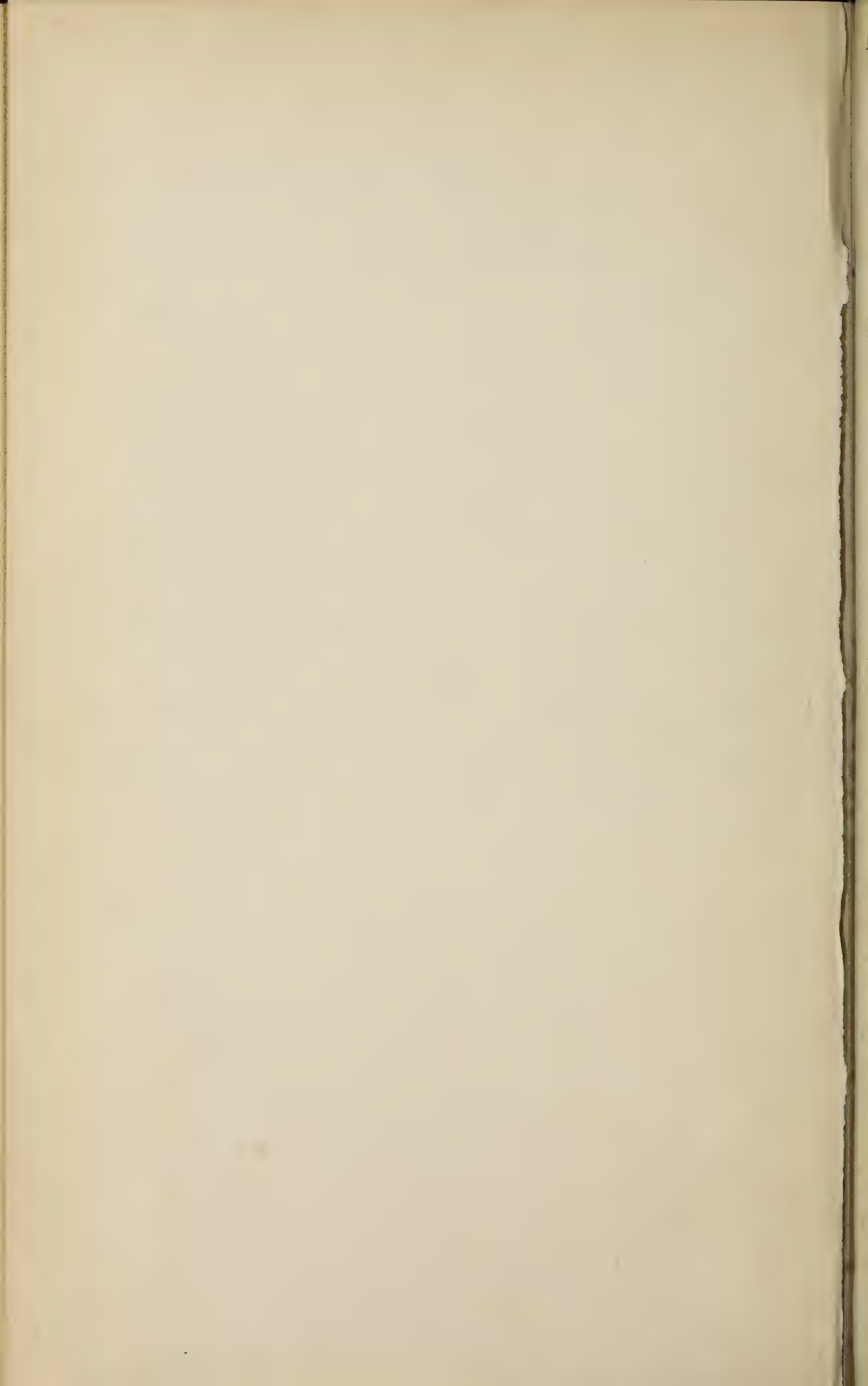


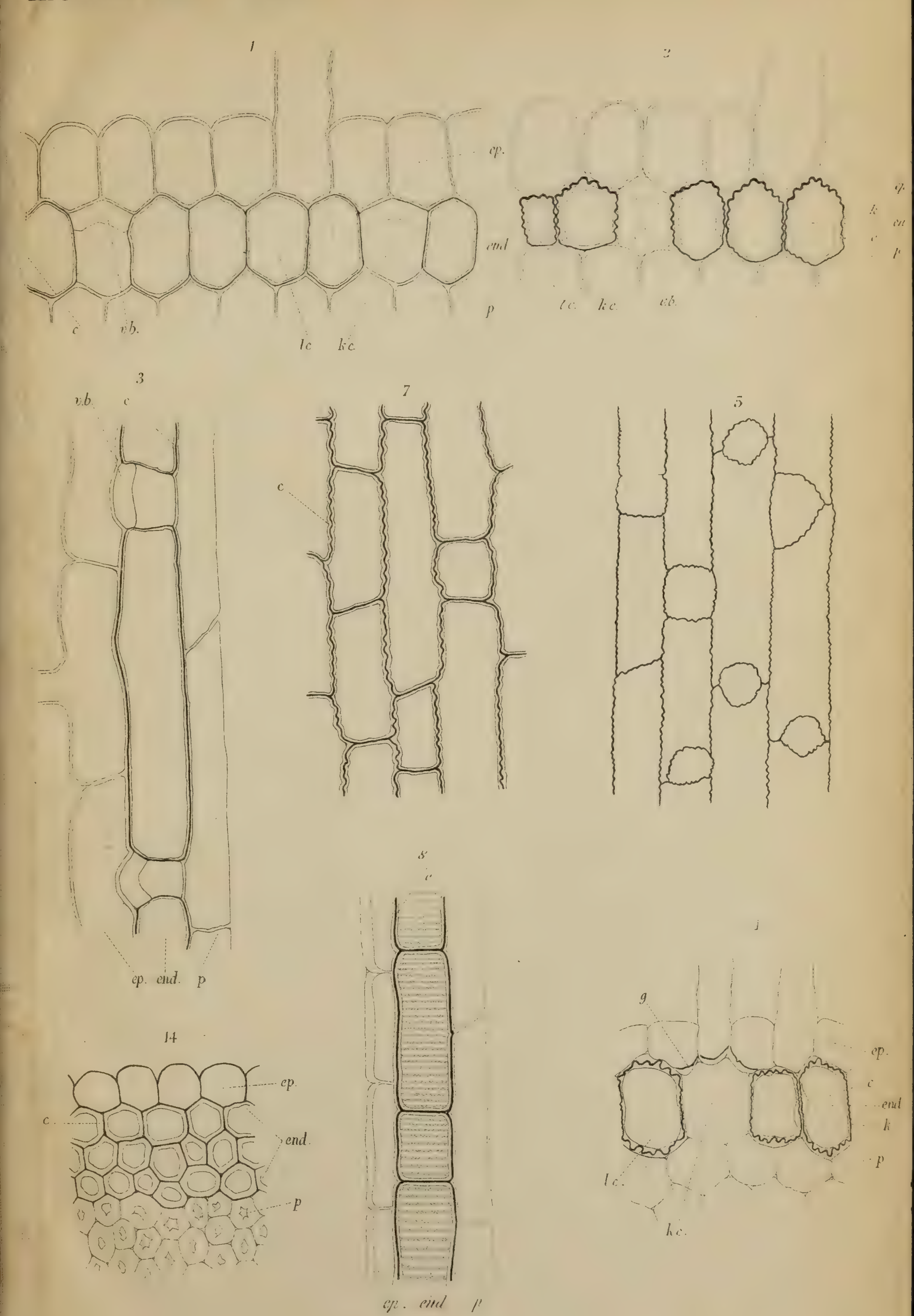


Lith: Gebr. Reimeringer, Amst:

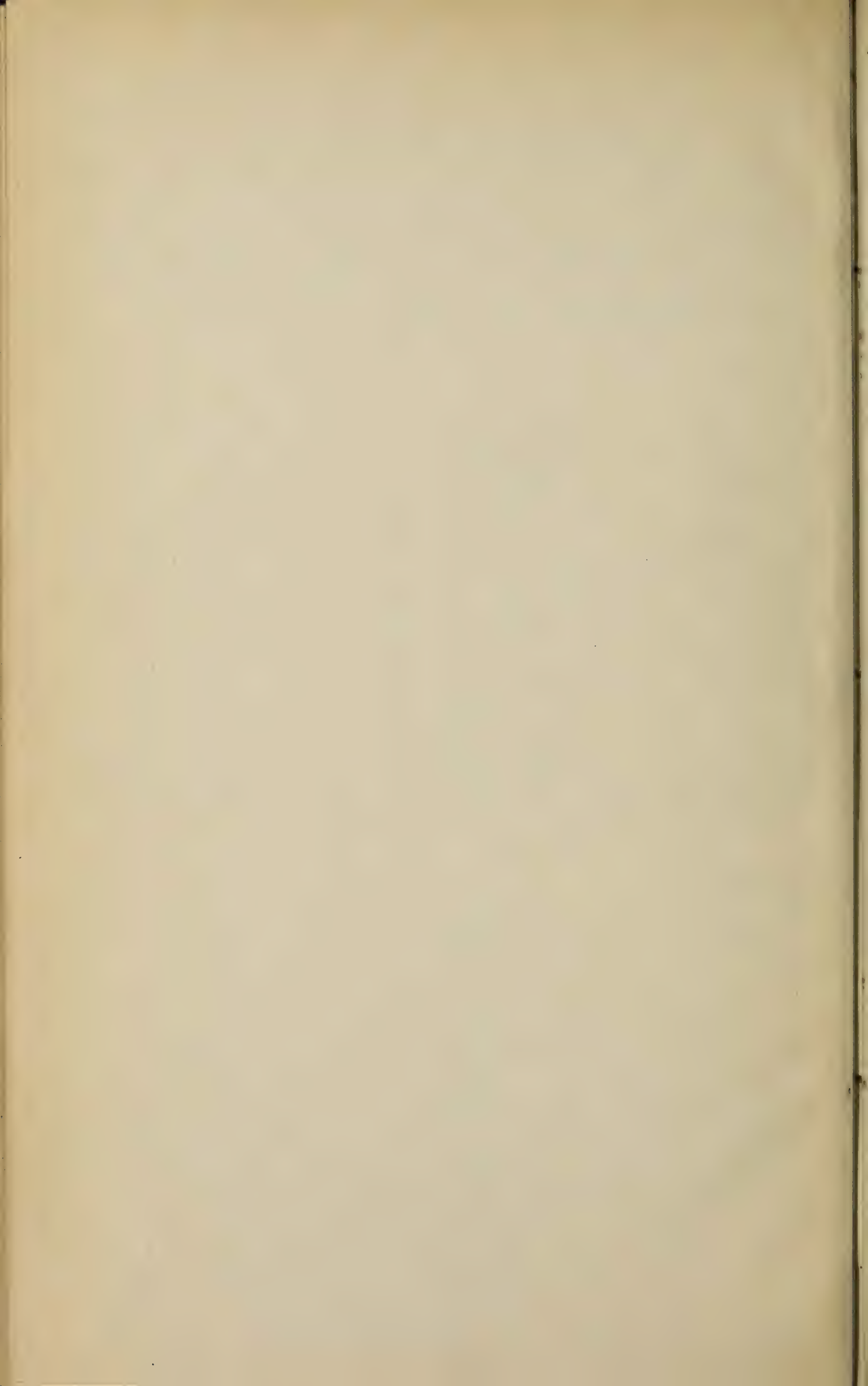


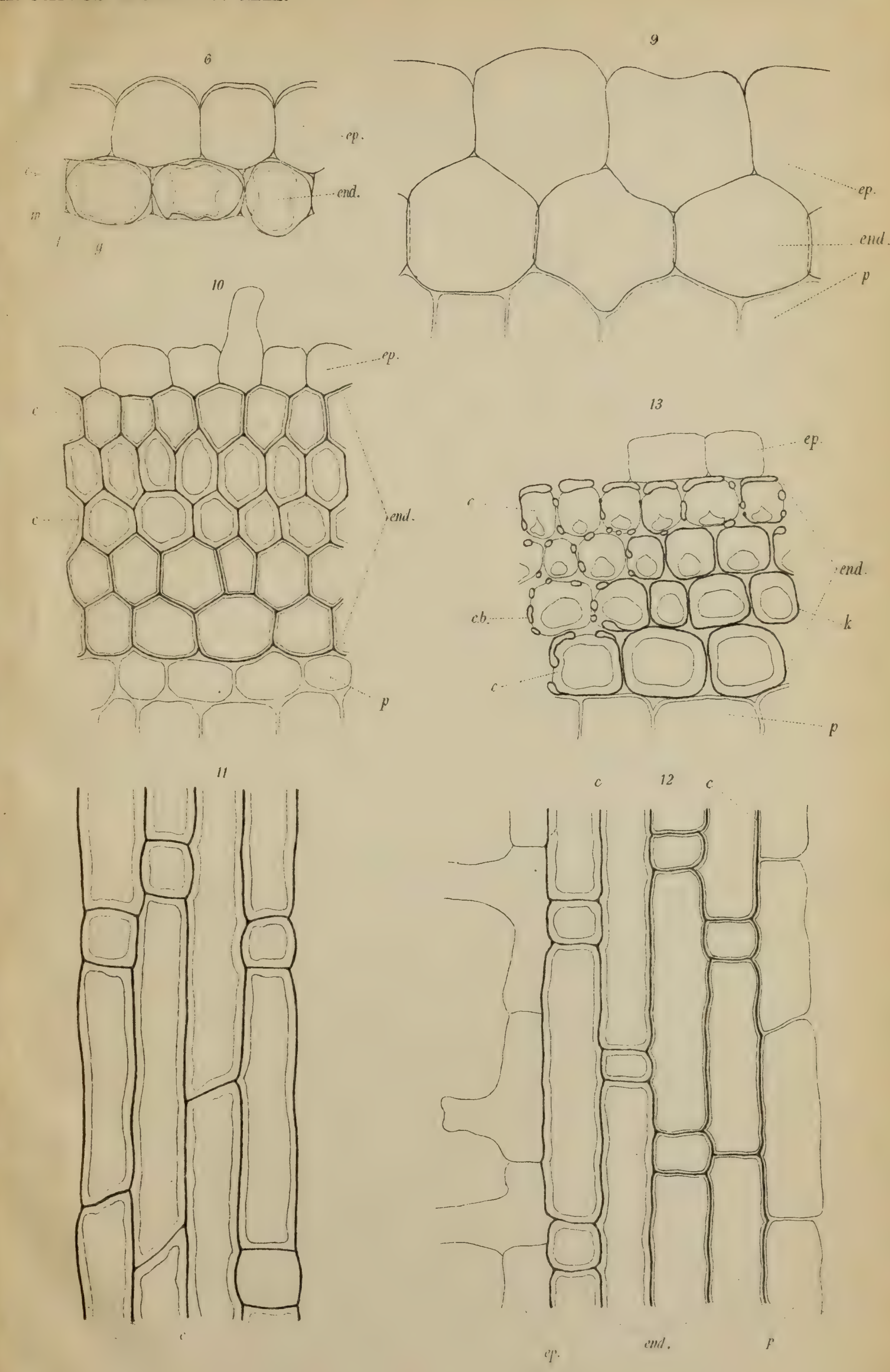

1000/1
Fig: 1
Fig: 3.
Fig: 4.
Fig 2.
b
a
Fig: 5.
Fig: 6.



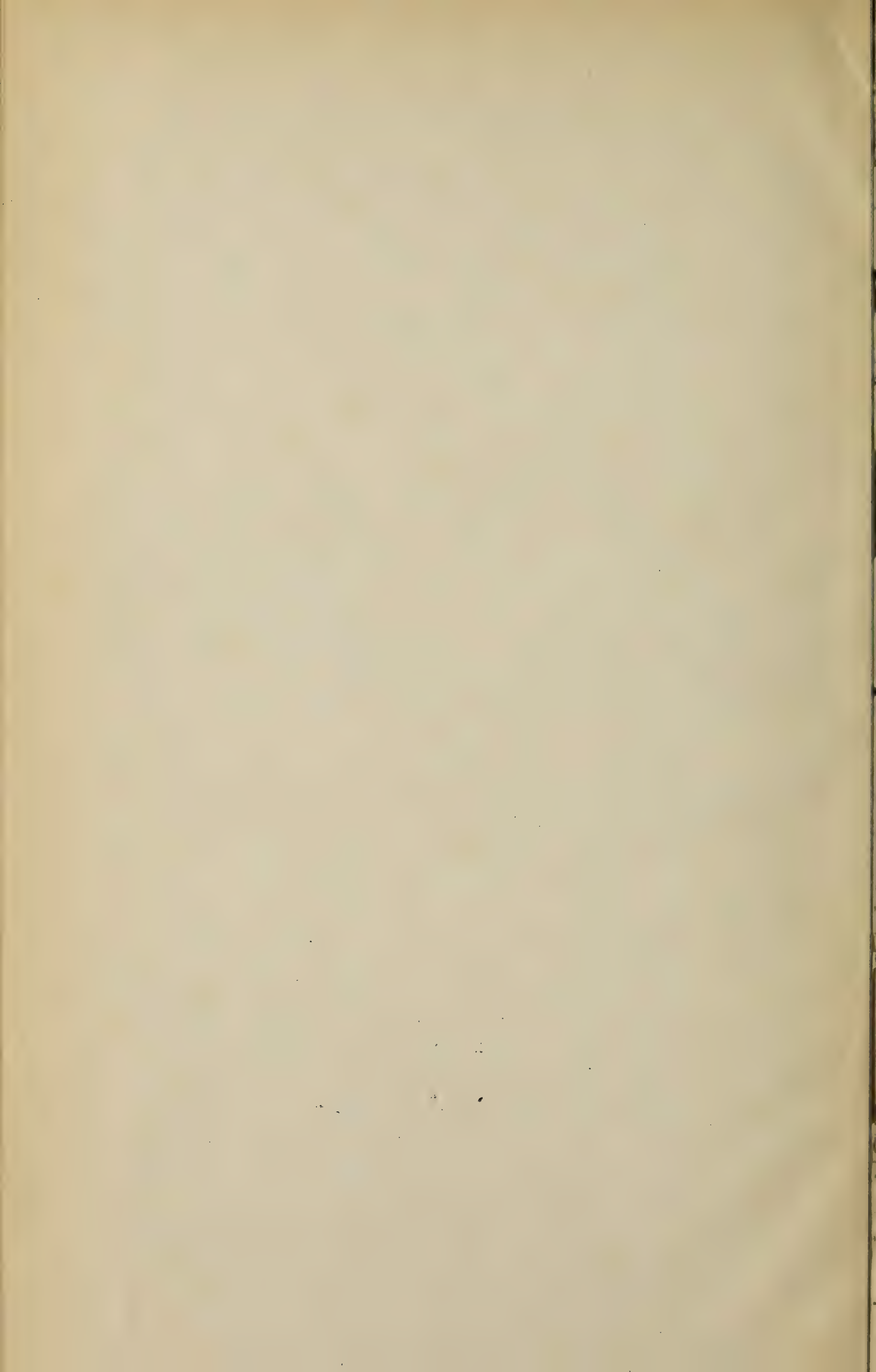


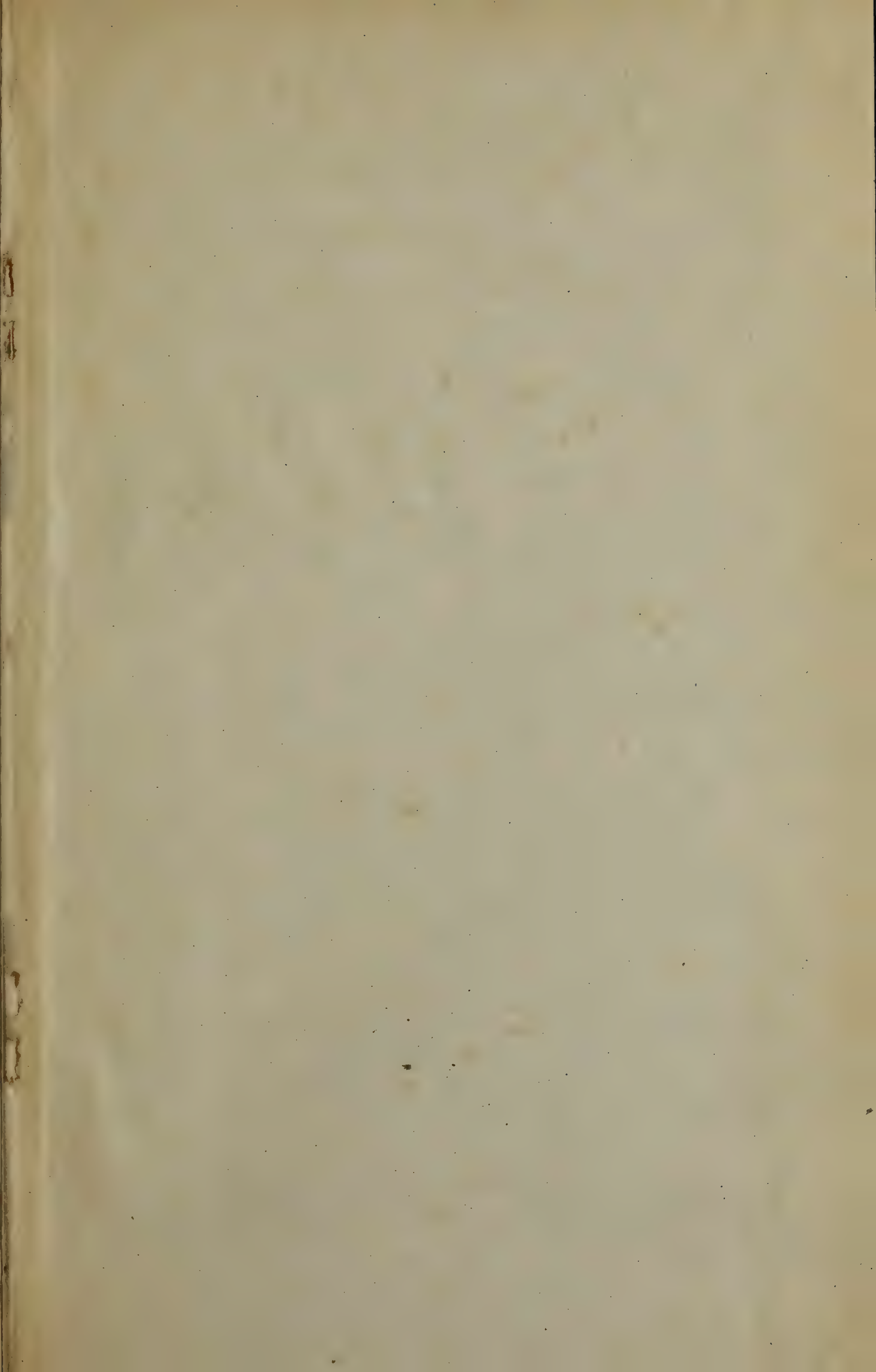
van Wisselingh del.





C. van Wisselingh del.





CINQIÈME LIVRAISON.

W. Einthoven, Stéréoscopie dépendant d'une différence de couleur.............. ....Pag. 361.
Ch. M. Schols, Une projection équivalente avec déviation minimum pour un terrain circulaire d'étendue restreinte... " 368.
C. A. J. A. Oudemans et **C. A. Pekelharing**, Saccharomyces Capillitii Oudemans et Pekelharing, Blastomycète du cuir chevelu.................................... " 404.
C. A. J. A. Oudemans, Sporendonema terrestre Oud., exemple de formation endogène des spores chez les hyphomycètes.. " 419.
C. van Wisselingh, Sur l'endoderme.. " 427.
B. J. Goosens, Sur le point de fusion de la glace sous des pressions inférieures a celle de l'atmosphère... " 449.

CONDITIONS DE L'ABONNEMENT.

Les **Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles** paraissent à des époques indéterminées, en livraisons de 6 à 12 feuilles d'impression, avec un nombre illimité de planches coloriées et noires.

Trente feuilles forment un volume.

Avec la dernière livraison de chaque volume les souscripteurs reçoivent gratis une table des matières, un titre général et une couverture.

Les abonnements engagent à un volume seulement. Les livraisons ne se vendent pas séparément.

Le prix du volume, avec les planches, est fixé à *fl.* 6.—.

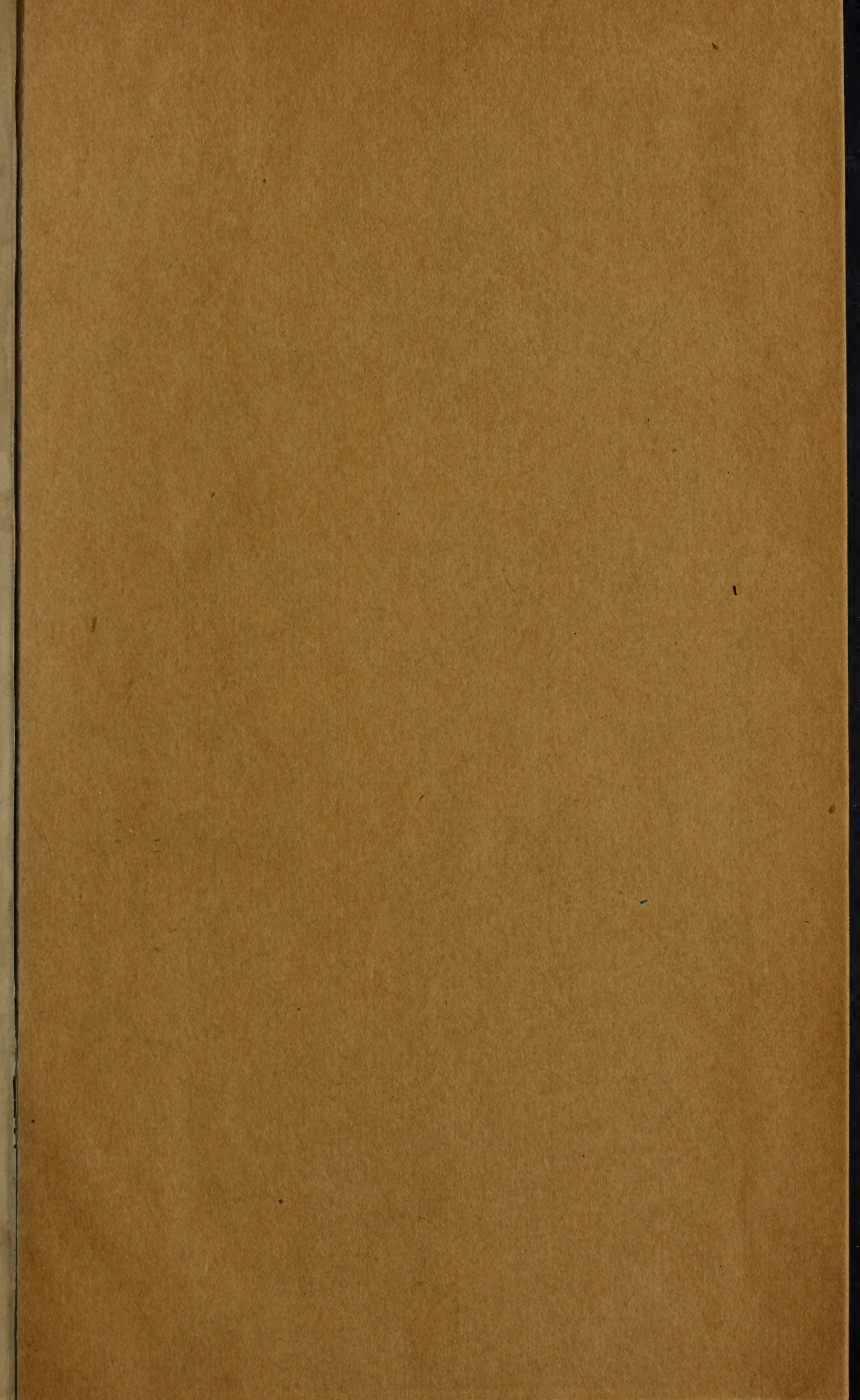
On souscrit chez l'éditeur et chez tous les libraires des Pays-Bas et de l'étranger.

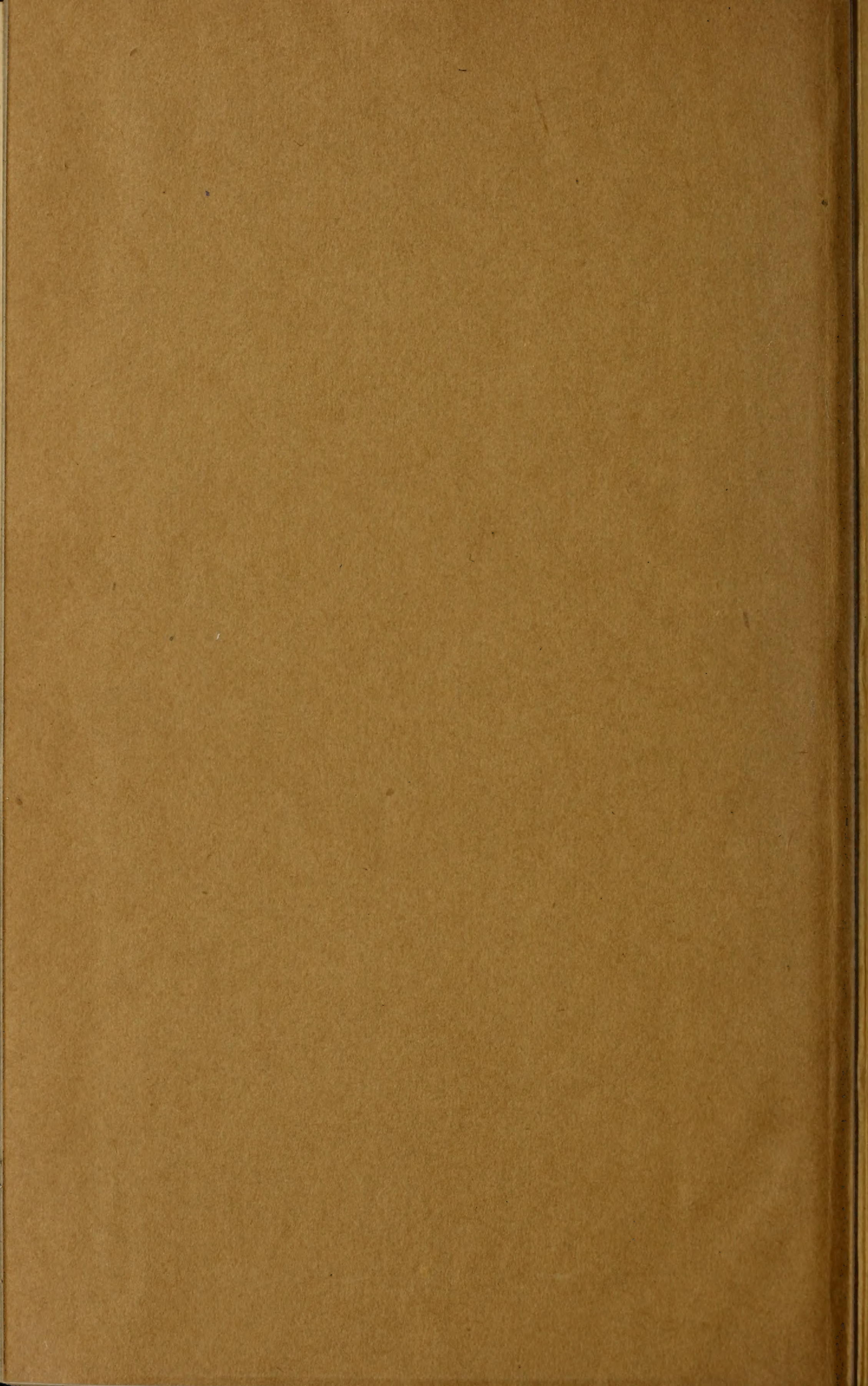
Pour faciliter l'acquisition de la première série du recueil, composée des volumes I à X (années 1866—1875), avec tables alphabétiques générales des matières et des noms d'auteurs, cette série est offerte temporairement au prix réduit de:

fl. de Holl. 40 = francs 84 = marks 67.

Les personnes qui voudraient profiter de cette offre sont priées de s'adresser directement au Secrétaire de la Société hollandaise des sciences à Harlem.

HARLEM. — IMPRIMERIE DES HÉRITIERS LOOSJES.






U. HOLZER
BINDER,
BOSTON, MASS.

